

JAK MATEMATIKA POPSALA CHAOS

aneb

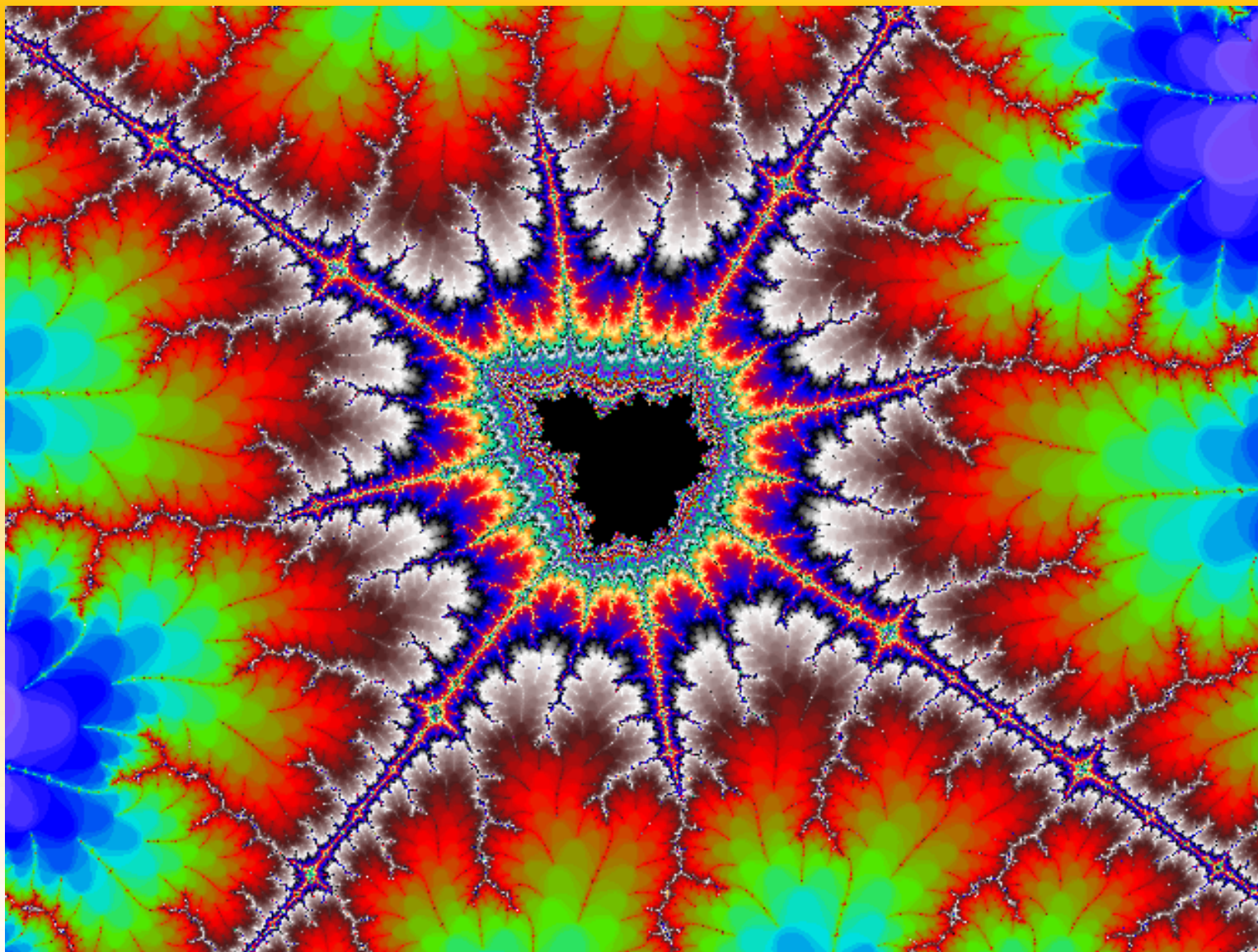
Jak matematika popsala nepopsatelné

Eduard Fuchs

Brno, 4. 4. 2019

- **JE LEPŠÍ MÍŘIT KE HVĚZDÁM A MINOUT,
NEŽ MÍŘIT DO KUPKY HNOJE A TREFIT SE**

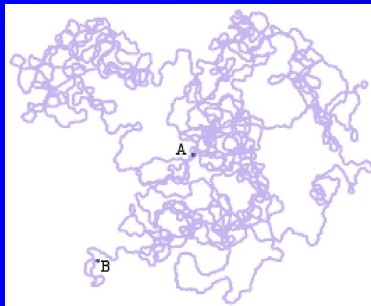
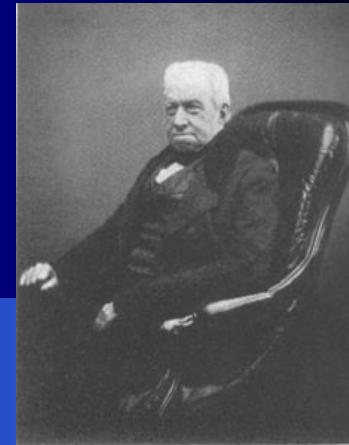
Co mají následující obrázky společného?





Robert Brown (1773–1858)

- V roce 1827 objevil tzv. Brownův pohyb – neustálý chaotický pohyb malých částec (o průměru řádově 10^{-6} - 10^{-7} m), např. pylu.



- Brownův pohyb ve své době nevzbudil velkou pozornost, předpokládalo se, že je obdobou vířivého pohybu prachových částic ve vzduchu, který je způsoben drobnými pohyby vzduchu vyvolanými nevelkými rozdíly teploty a tlaku.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

MATEMATIKA PRO VŠECHNY

Werner Heisenberg

- Proč teorie relativity?
- Proč turbulence?
- Doufám, že alespoň na první otázku bude mít odpověď.



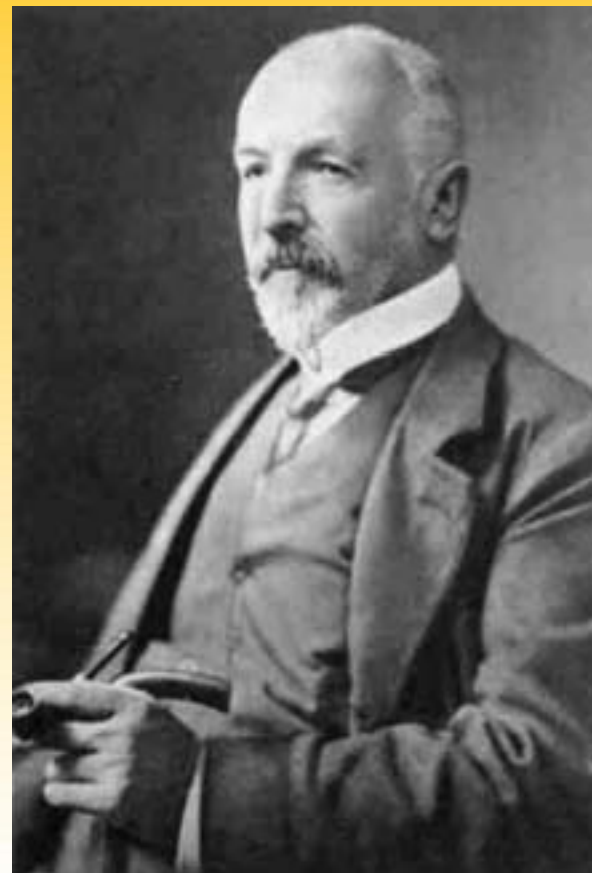
Foto © Tomki Němec

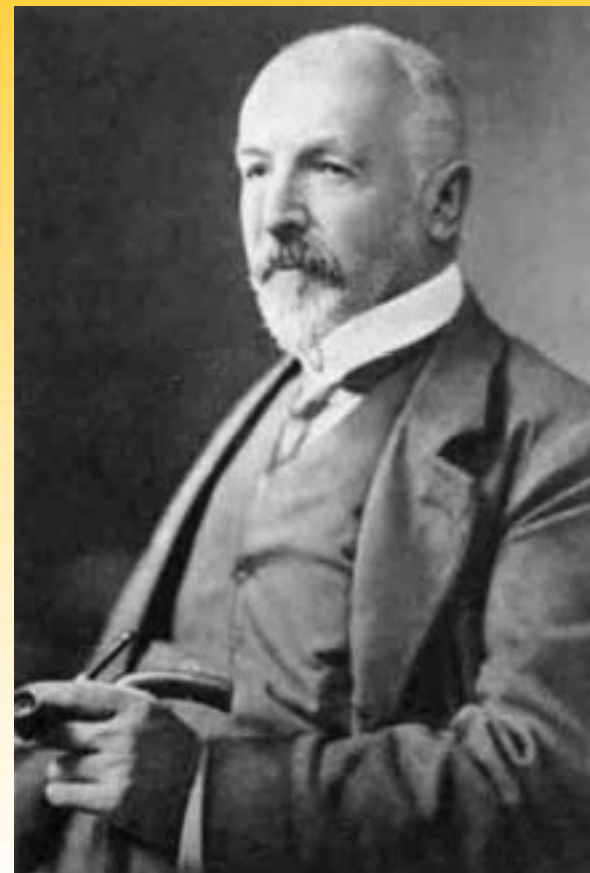
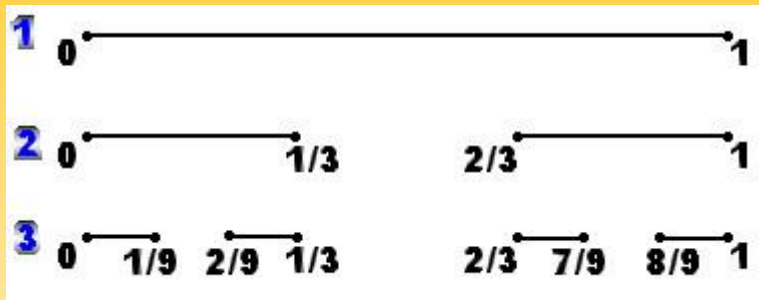


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

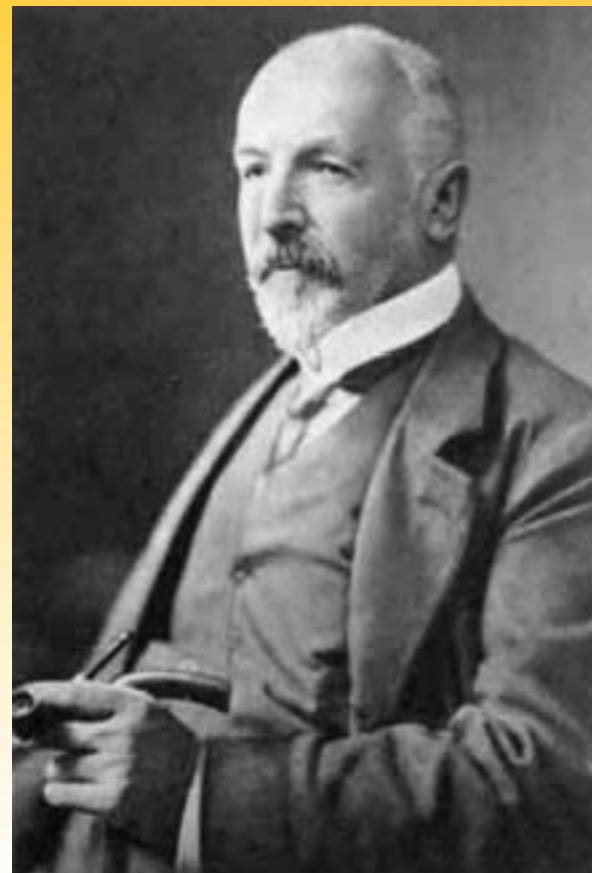
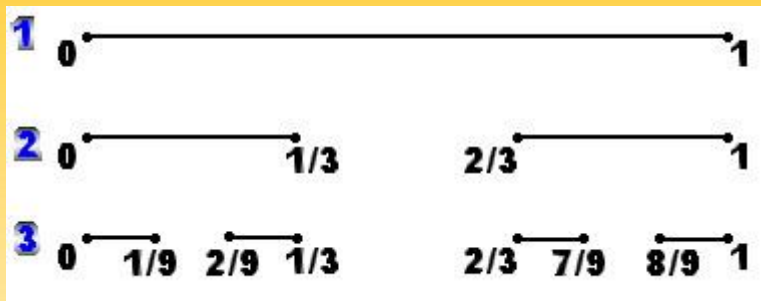
MATEMATIKA PRO VŠECHNY





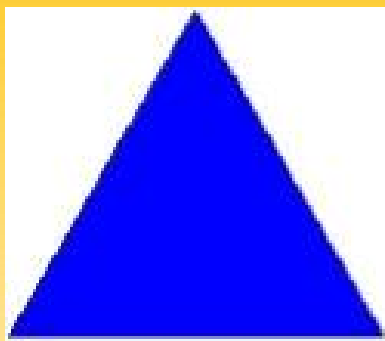


Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

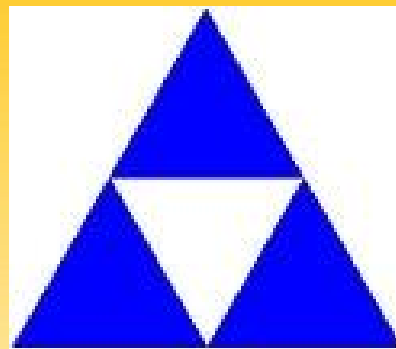
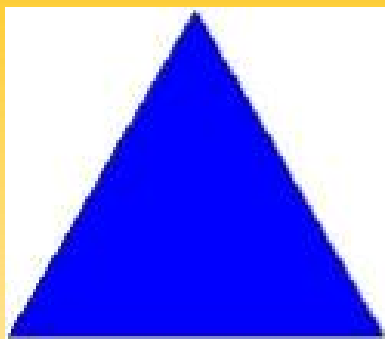


Sierpinského krajka

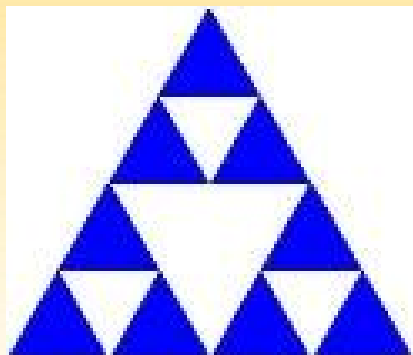
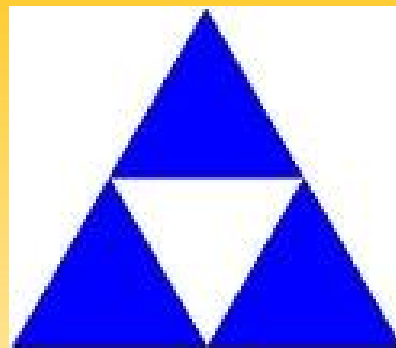
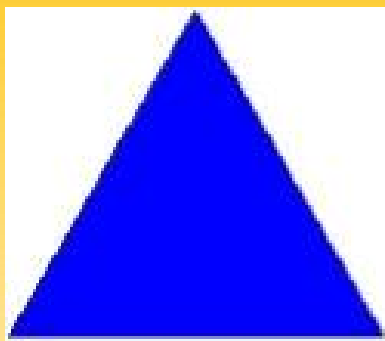
Sierpinského krajka



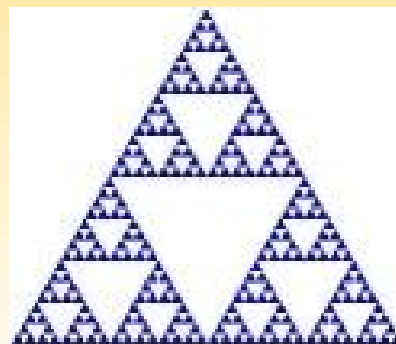
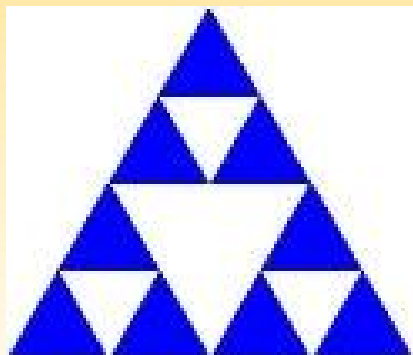
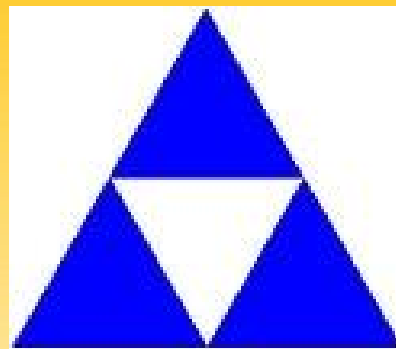
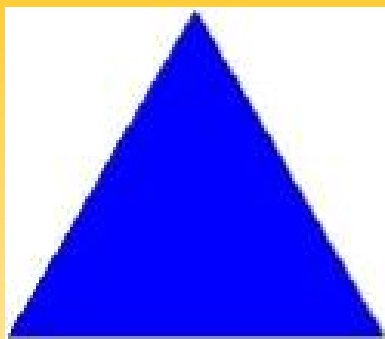
Sierpinského krajka



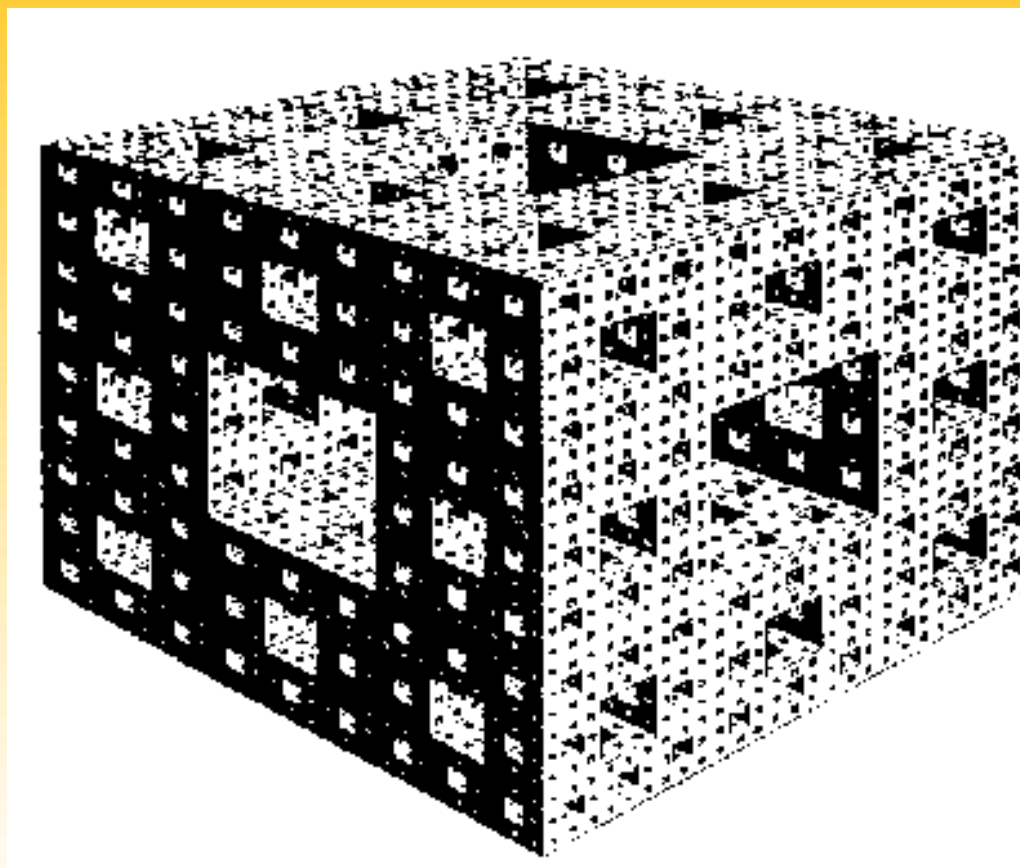
Sierpinského krajka



Sierpinského krajka



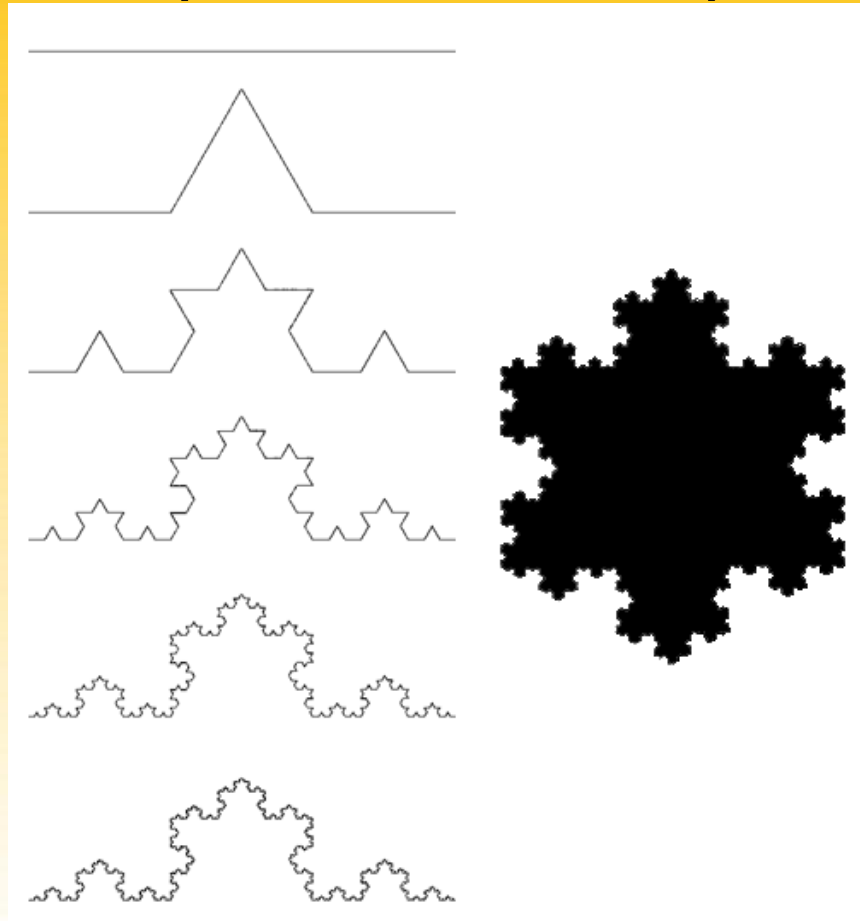
Karl Menger (1902-1985)



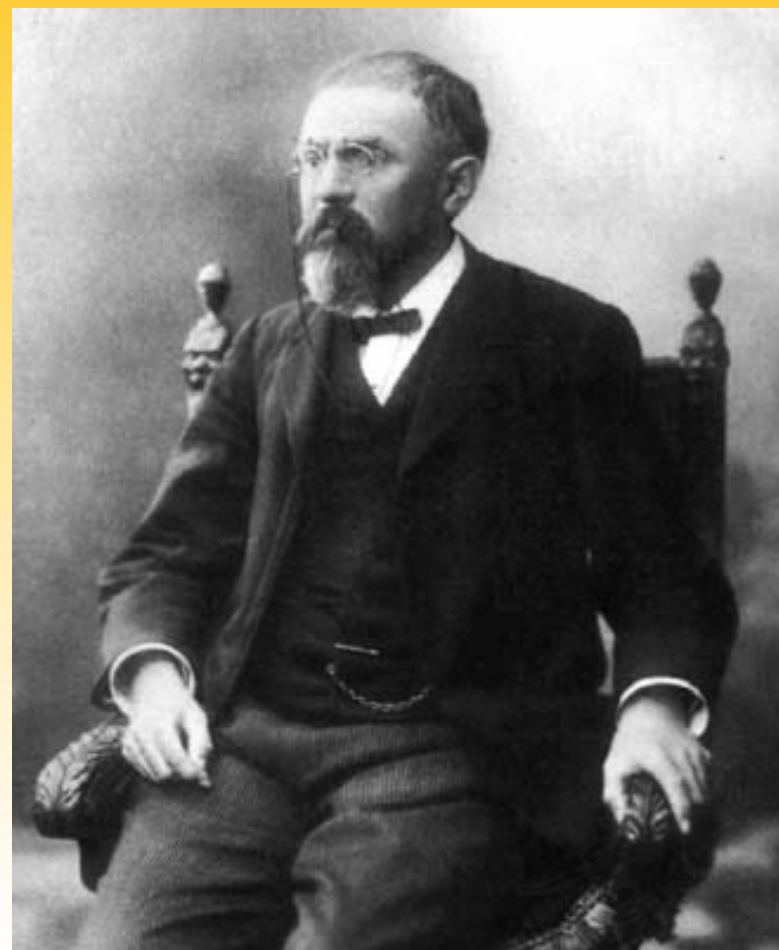
Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924)



Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924)



Jules Henri Poincaré (1854-1912)



Brusel 1911



Počátek teorie chaosu

- Problém tří těles

20. léta 20. století

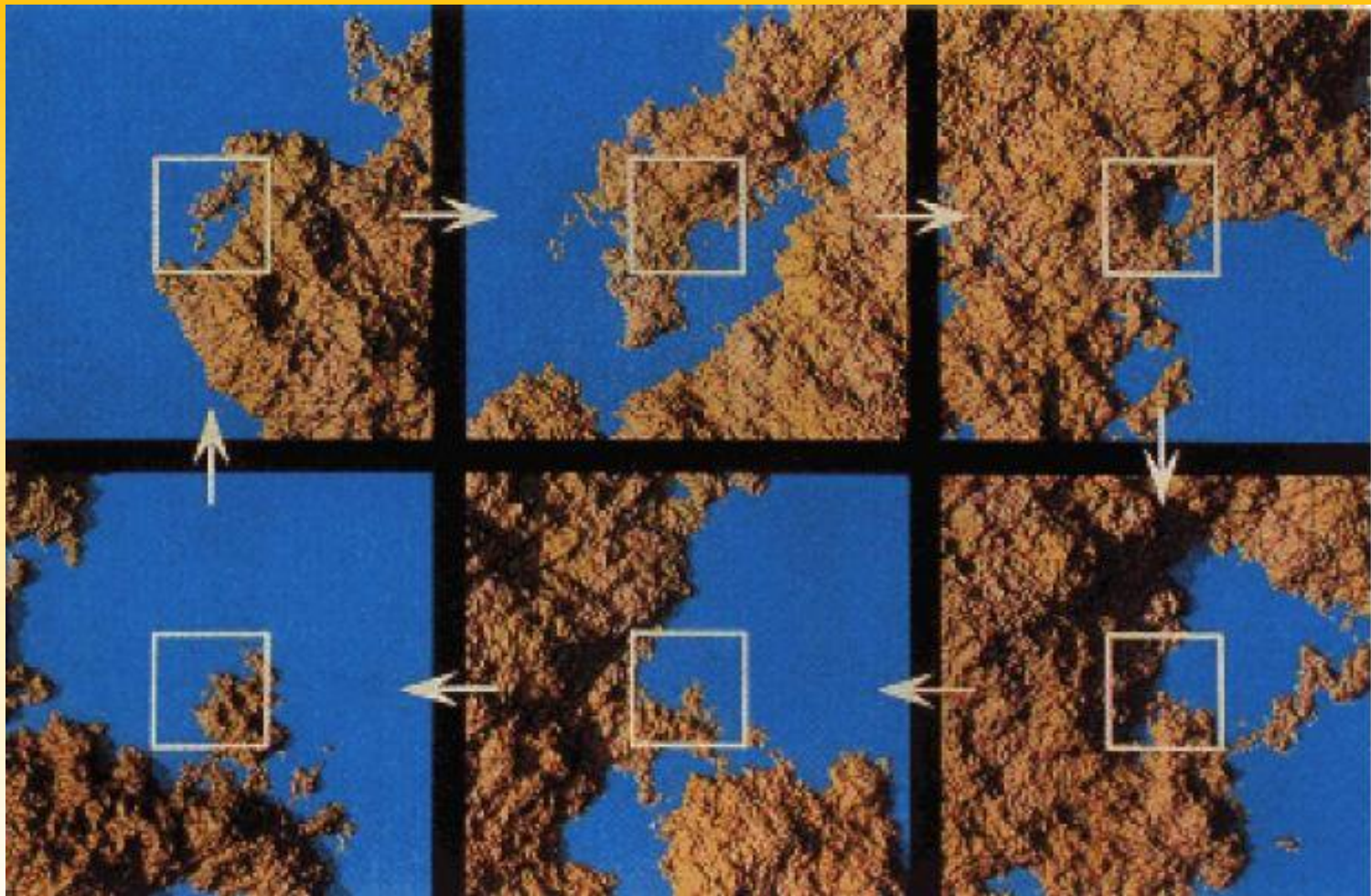
- Lewis F. Richardson –

délka pobřeží Velké Británie



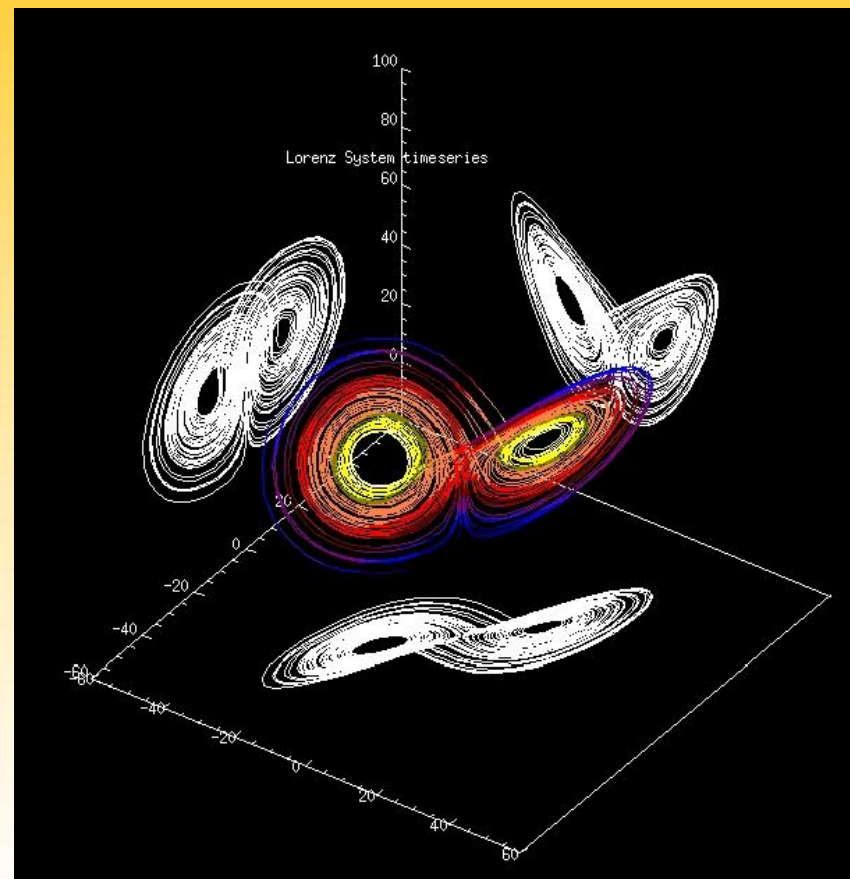
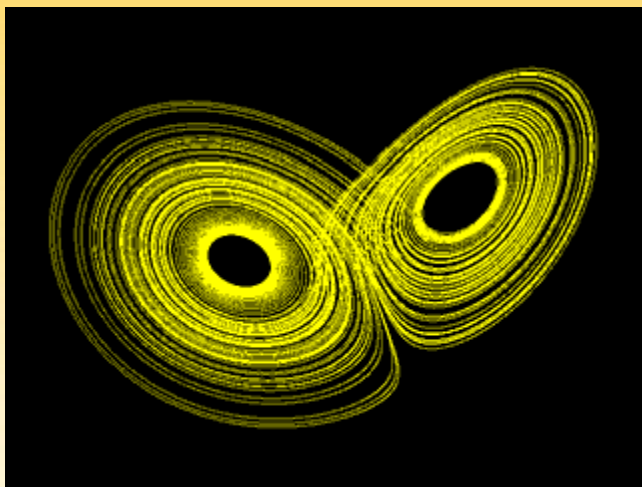






1960 Edward LORENZ

efekt motýlího křídla

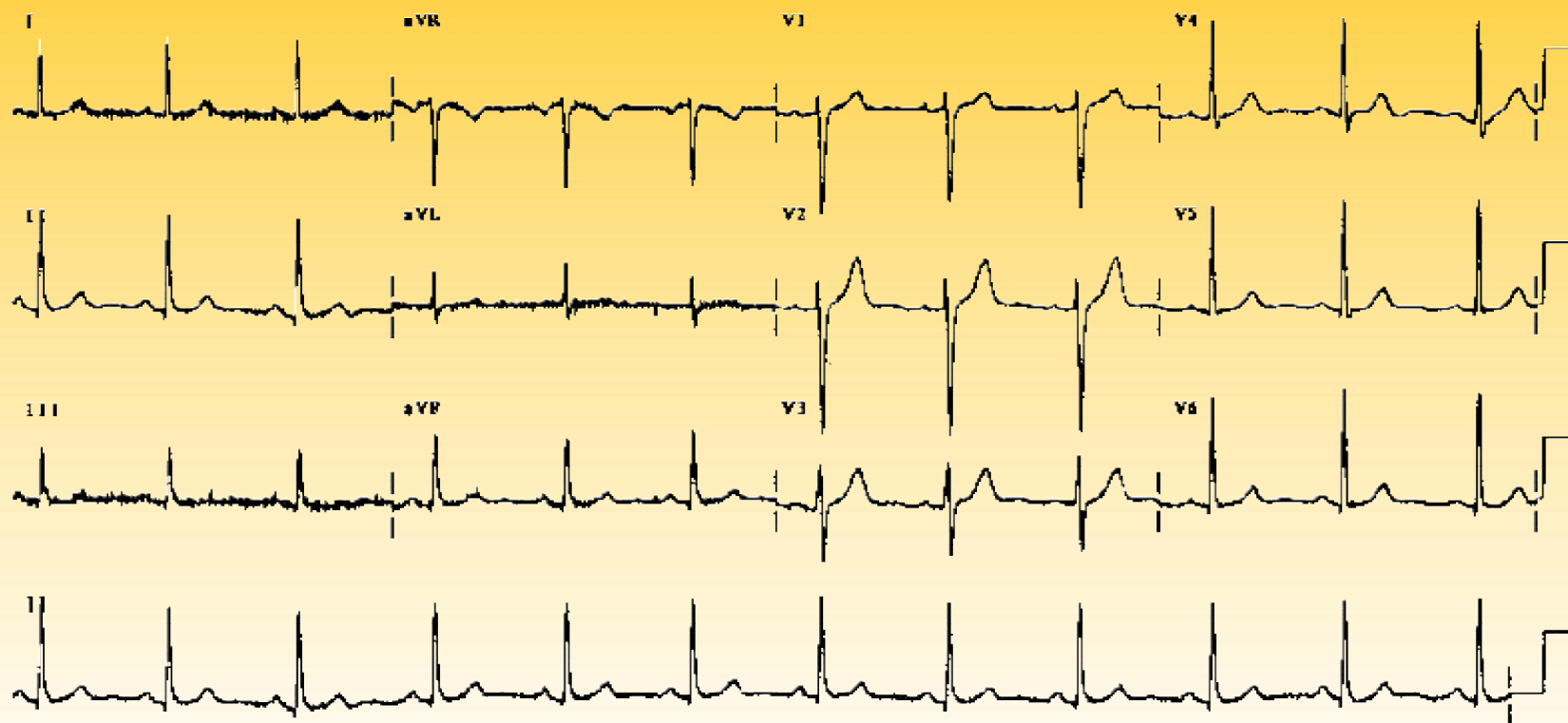


Benoit Mandelbrot (1924-2010)



Přenos signálů – Cantorovo diskontinuum

EKG



LOC 00000-0000 Speed: 25 mm/sec Limb: 10 mV Chest: 10 mm/mV

50% 0.15-150 Hz

16405

Fraktály (Mandelbrot 1975)

Fraktály (Mandelbrot 1975)

- Jsou soběpodobné – pokud daný útvar pozorujeme v jakémkoliv měřítku či rozlišení, pozorujeme stále opakující se určitý charakteristický tvar

Fraktály (Mandelbrot 1975)

- Jsou soběpodobné – pokud daný útvar pozorujeme v jakémkoliv měřítku či rozlišení, pozorujeme stále opakující se určitý charakteristický tvar
- Mají na první pohled velmi složitý tvar, jsou však generovány opakovaným použitím jednoduchých pravidel.

Fraktály (Mandelbrot 1975)

- Jsou soběpodobné – pokud daný útvar pozorujeme v jakémkoliv měřítku či rozlišení, pozorujeme stále opakující se určitý charakteristický tvar
- Mají na první pohled velmi složitý tvar, jsou však generovány opakovaným použitím jednoduchých pravidel.
- **Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než dimenze topologická.**

Bud' X metrický prostor, $S \subseteq X$, $d \in \langle 0, \infty \rangle$.
 d -dimensionální Hausdorffova míra množiny S
je číslo

$$C_H^d(S) = \inf \left\{ \sum_i r_i^d : \text{existuje pokrytí } S \text{ koulemi o poloměrech } r_i > 0 \right\}.$$

- Hausdorffova dimenze prostoru X je číslo

$$\dim_H(X) = \inf \left\{ d \geq 0 : C_H^d(X) = 0 \right\}.$$

Iterovaná posloupnost

$$f(x) = x^2$$

- Když iteraci začneme například v bodě 2, obdržíme posloupnost

2, 4, 16, 256, ... ,

- Když však za počáteční bod zvolíme $\frac{1}{2}$ dostaneme posloupnost

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \dots$

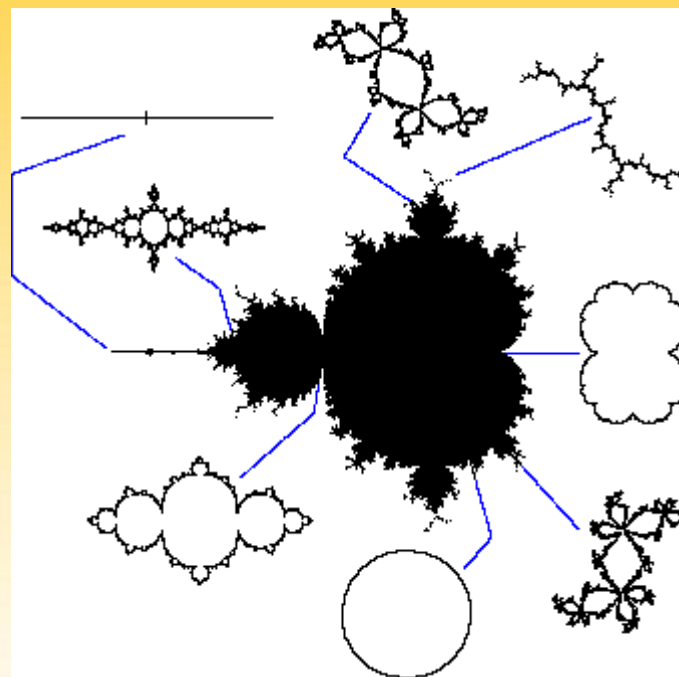
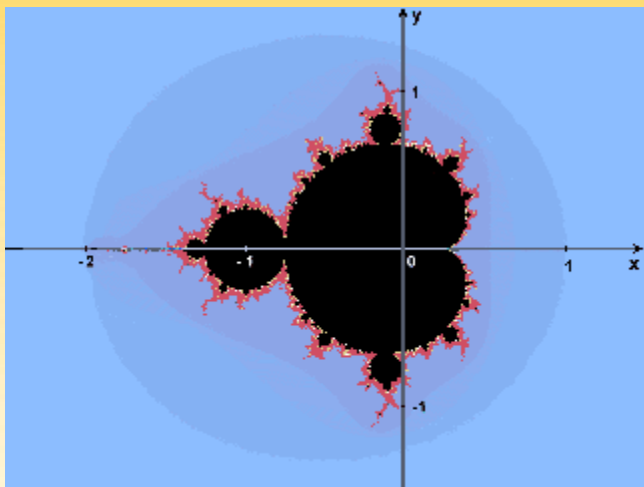
Mandelbrotova množina

- Funkce

$$f(z) = z^2 + c$$

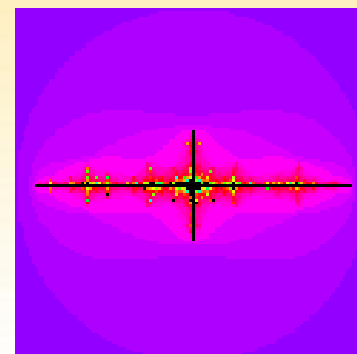
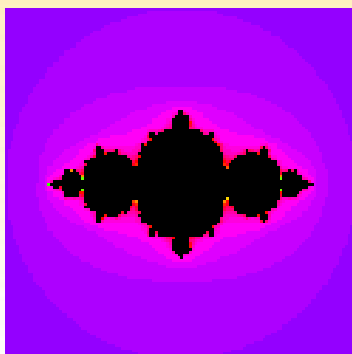
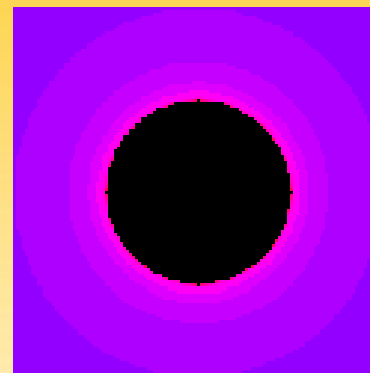
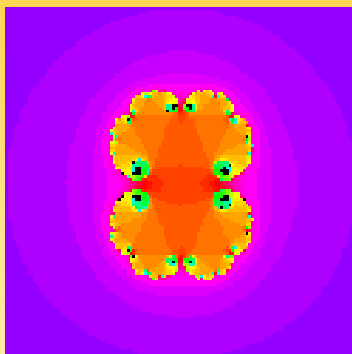
- Iterace: $z_1 = 0$,

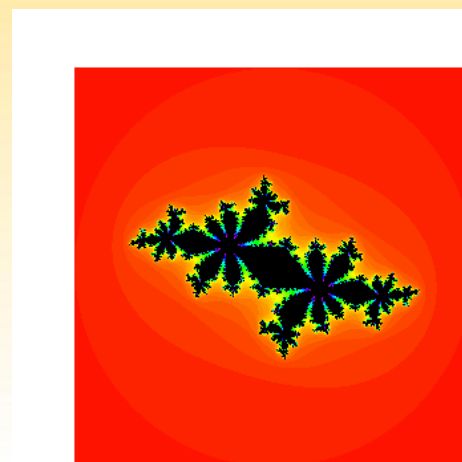
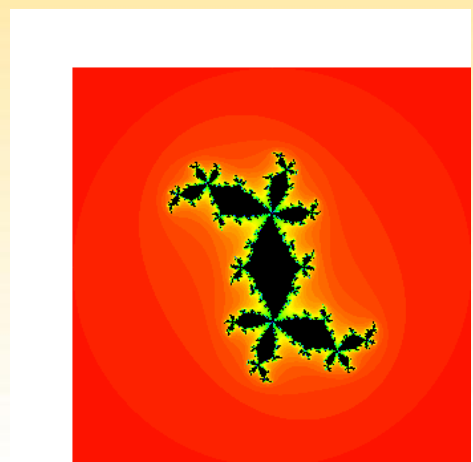
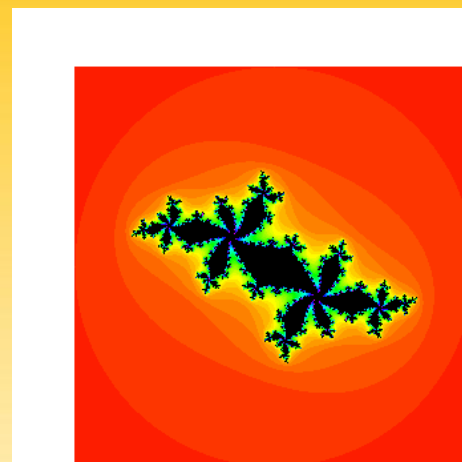
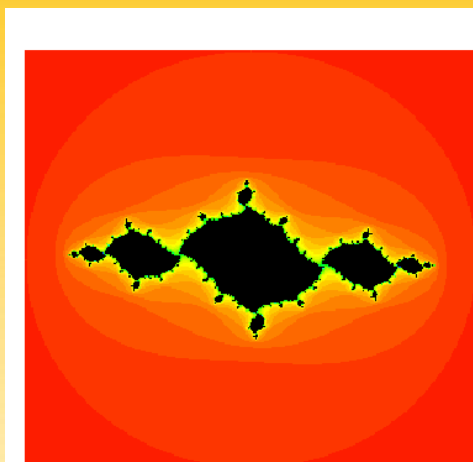
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

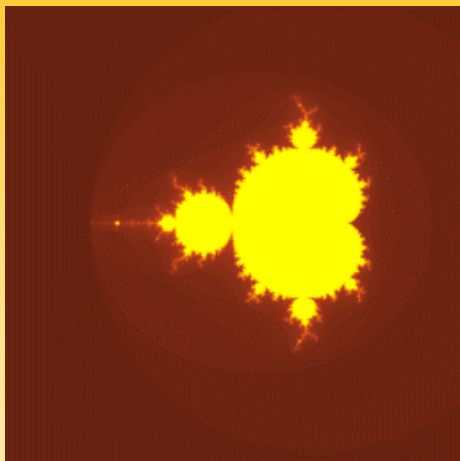


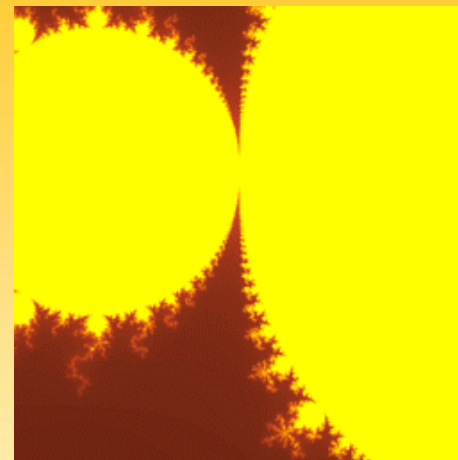
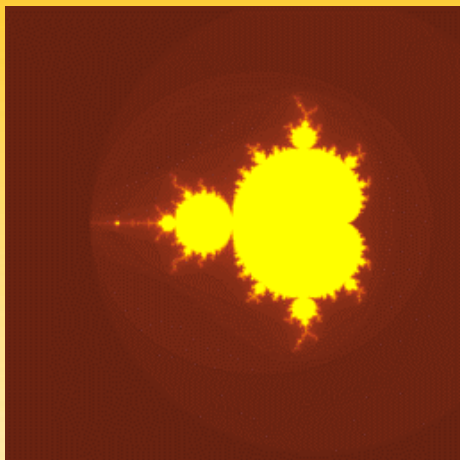
Gaston Maurice JULIA (1893–1978)

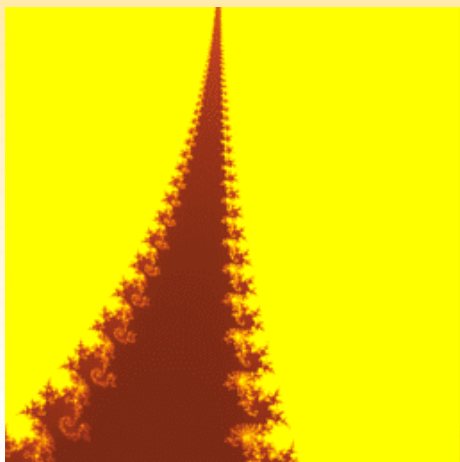
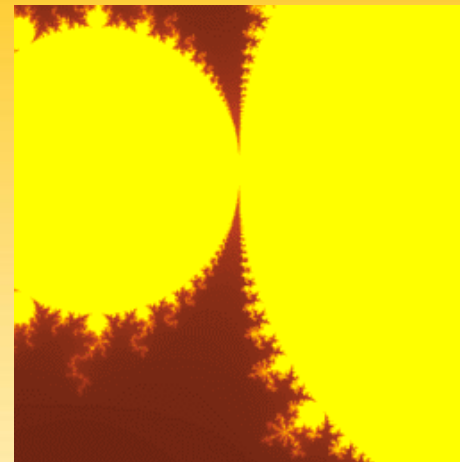
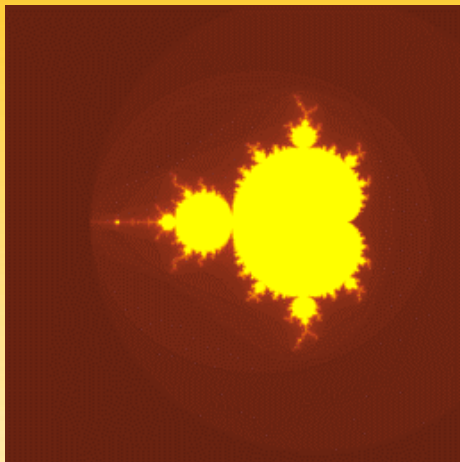


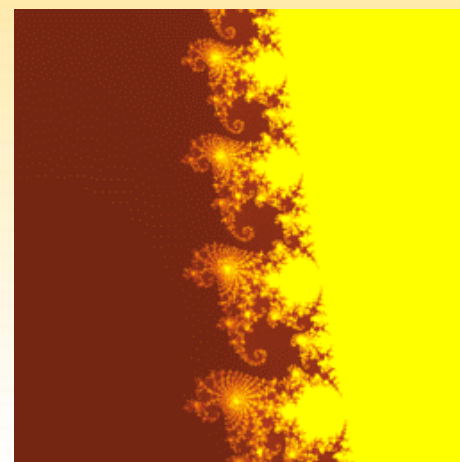
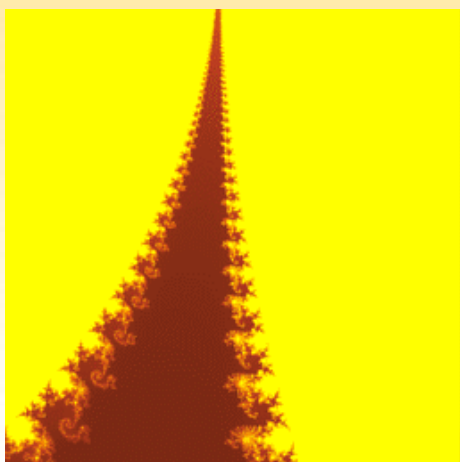
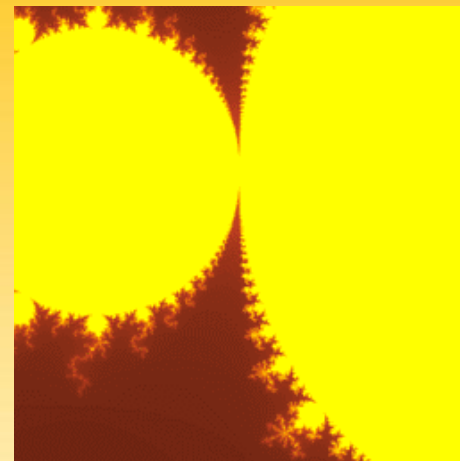
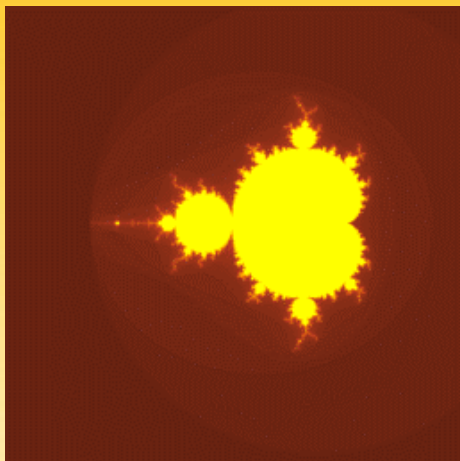


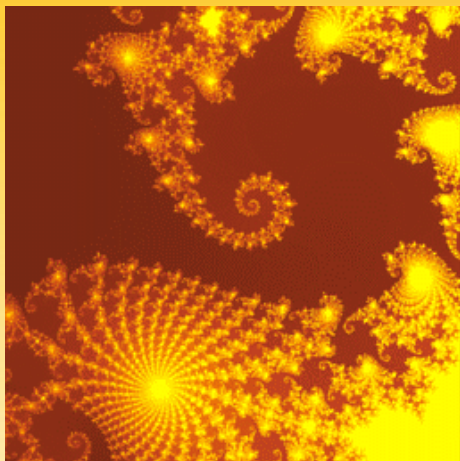


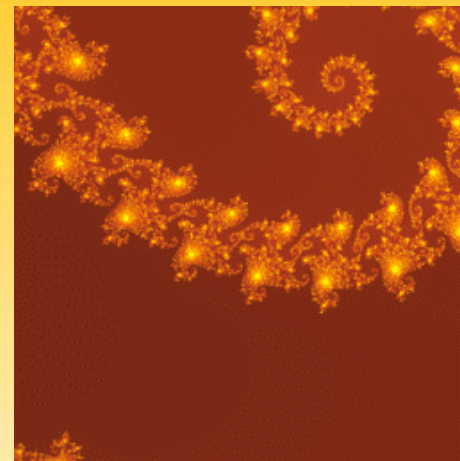
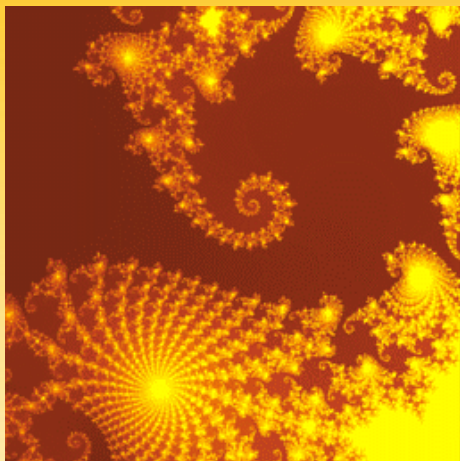


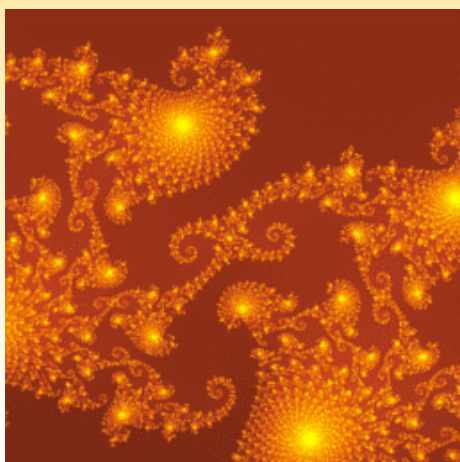
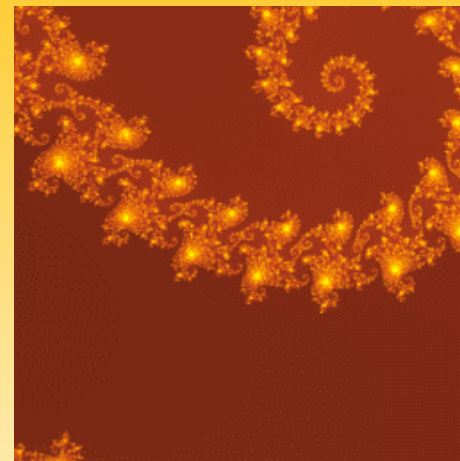
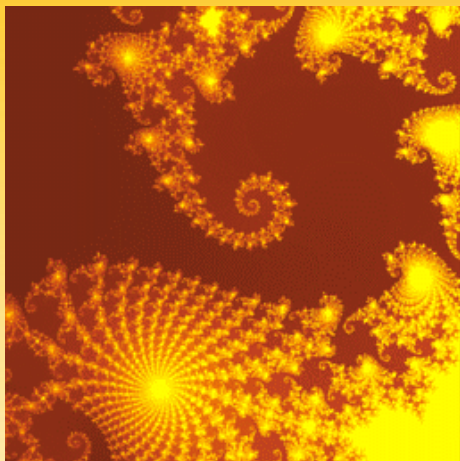


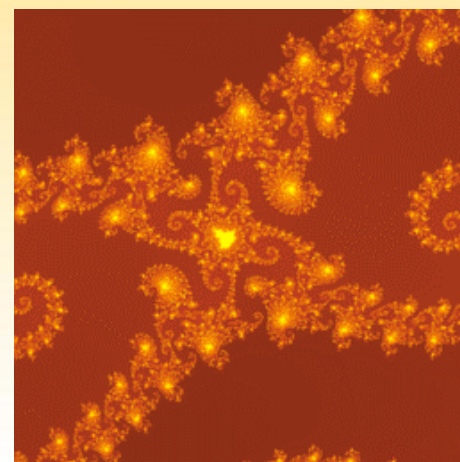
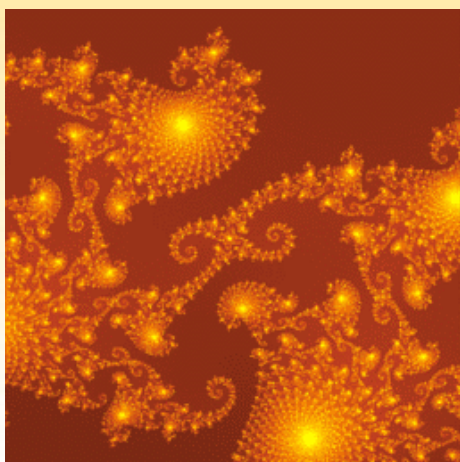
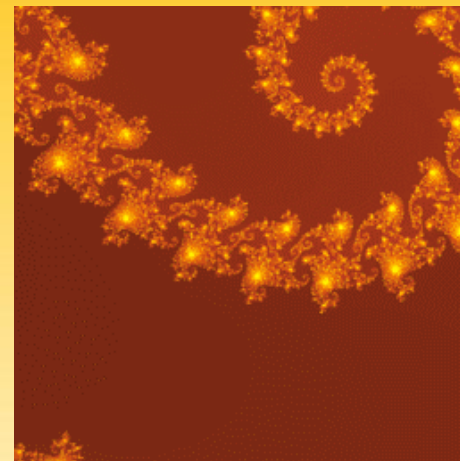
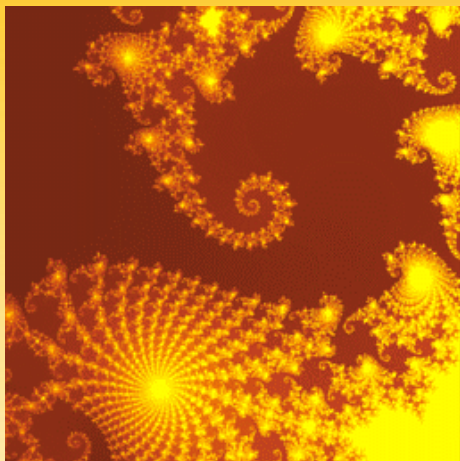


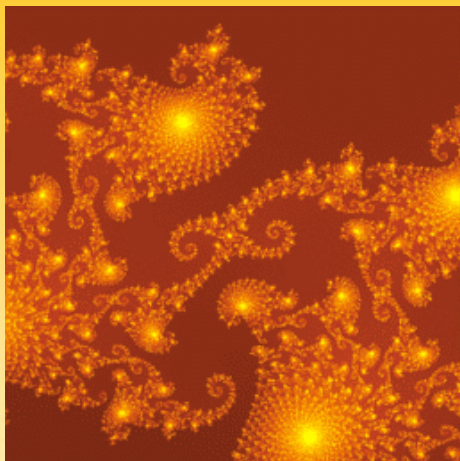


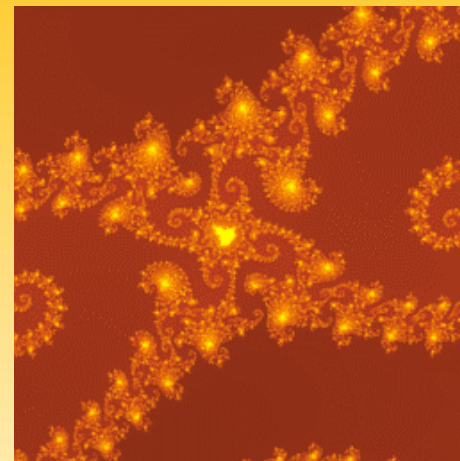
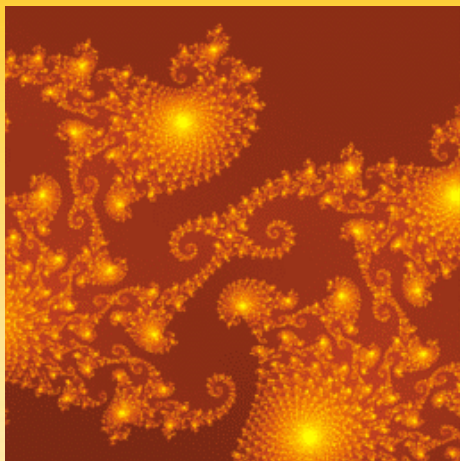


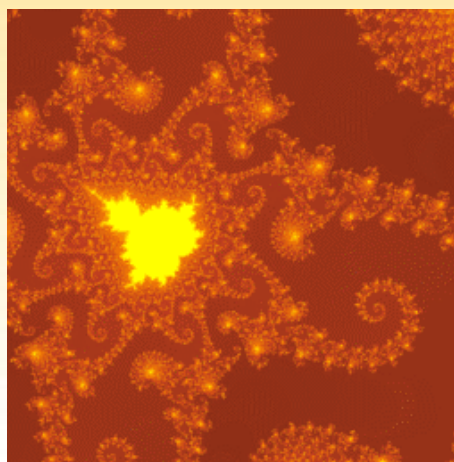
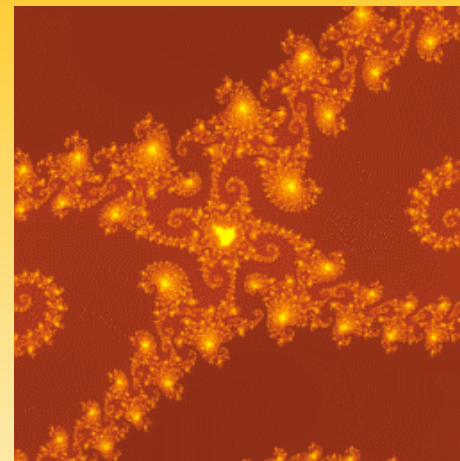


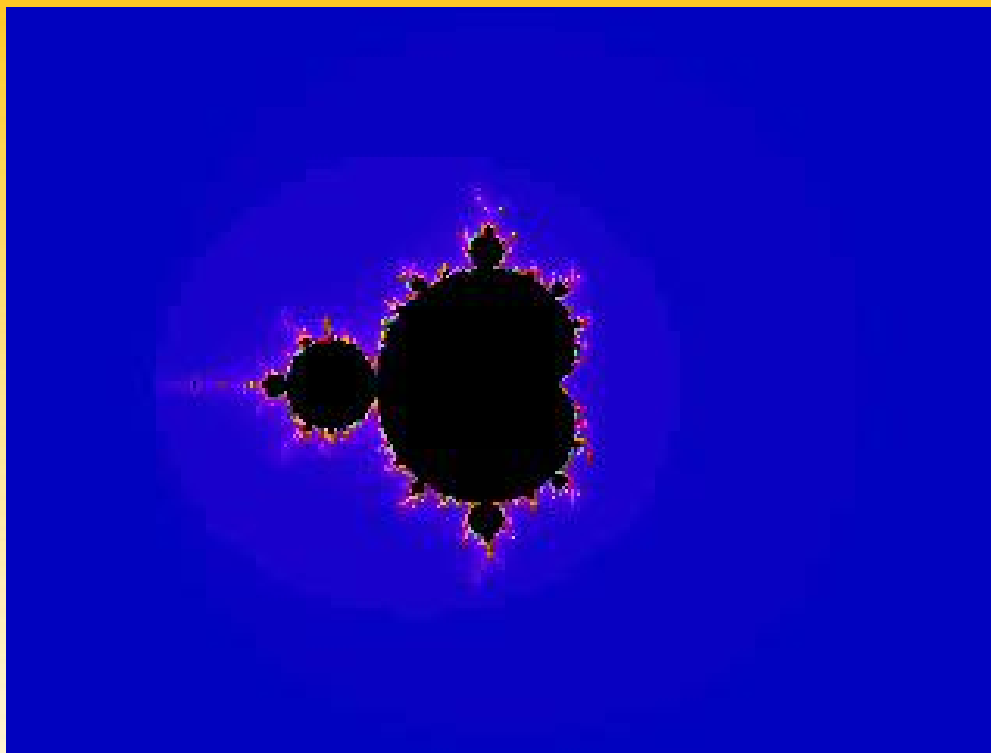


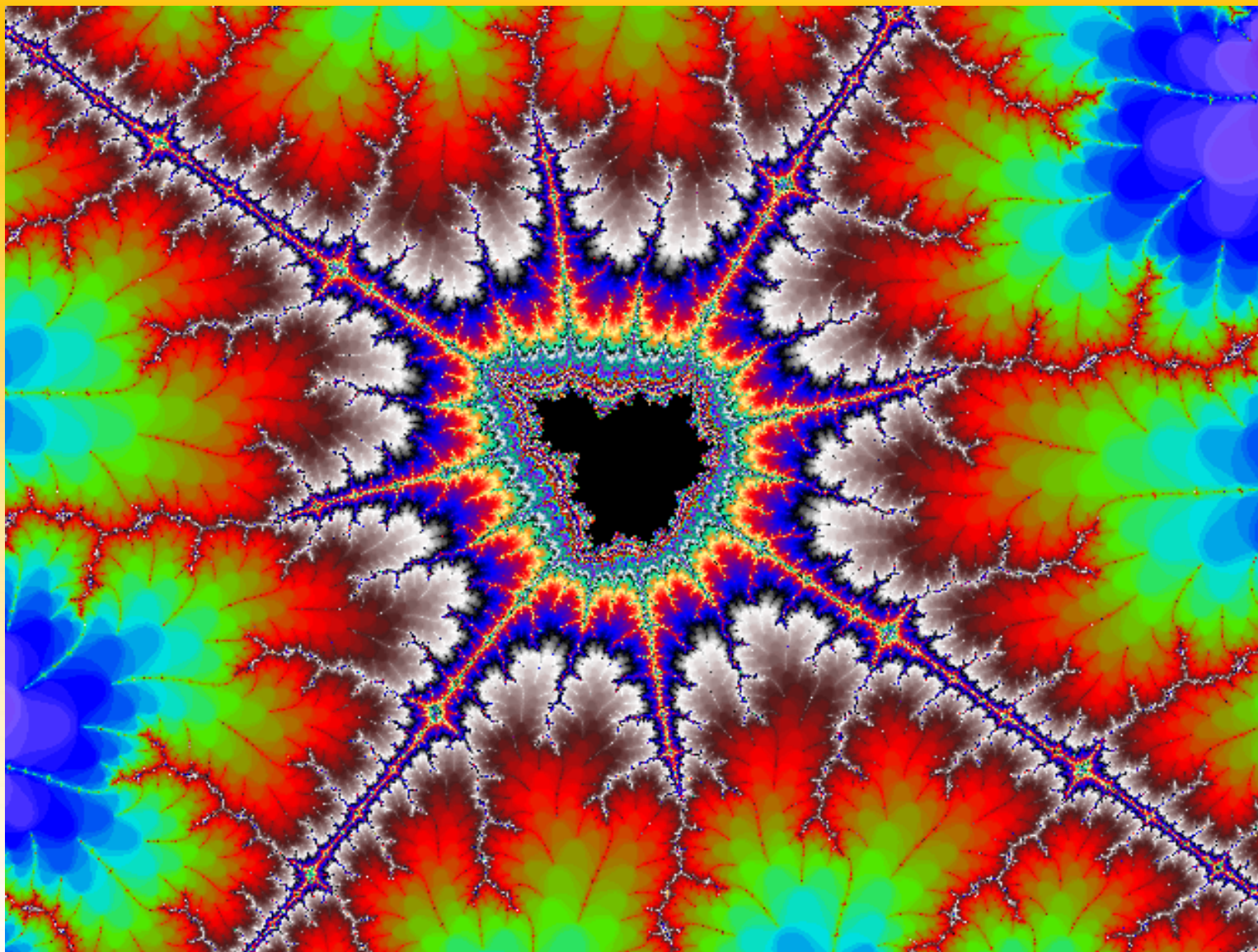










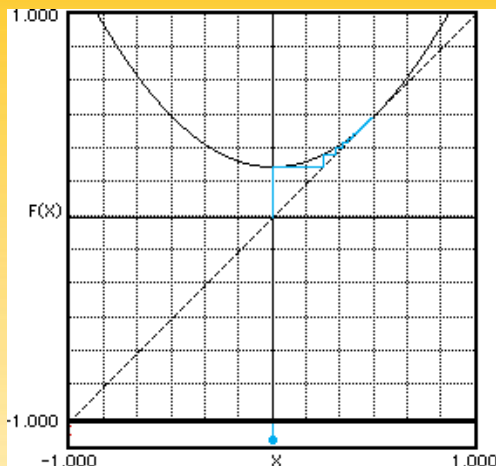




Mitchell Jay Feigenbaum (1944)

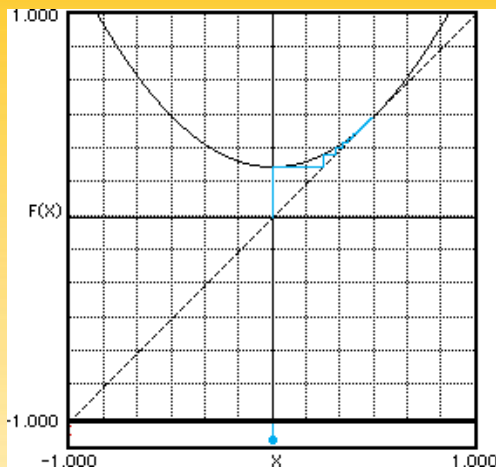


Feigenbaum

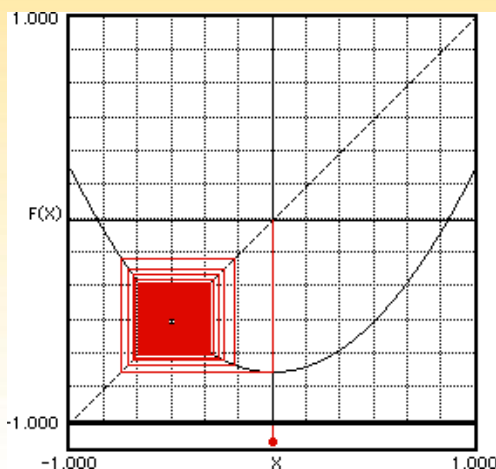


- $c = 1/4$, jeden atraktor

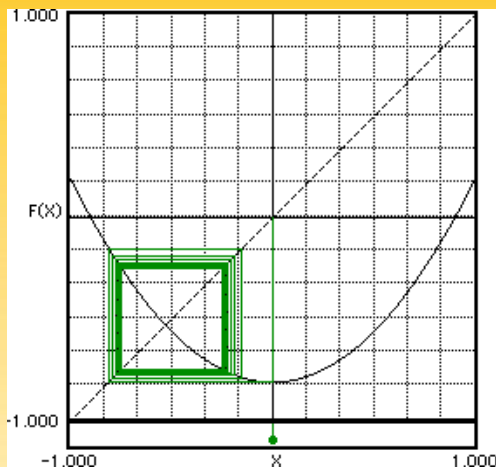
Feigenbaum



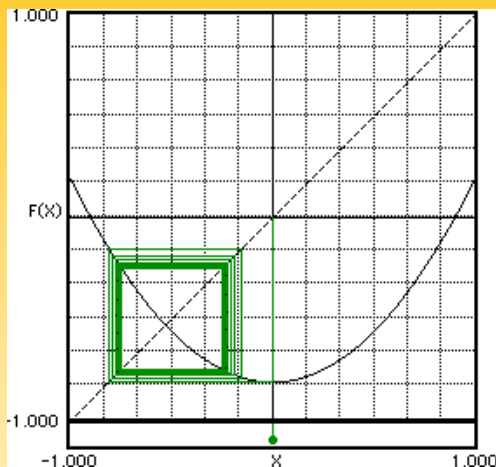
- $c = 1/4$, jeden atraktor



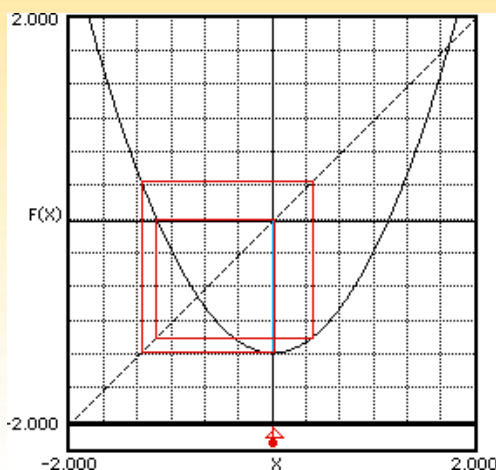
- $c = -3/4$



- $c = -13/16$, orbita je mezi hodnotami $-3/4$ a $-1/4$

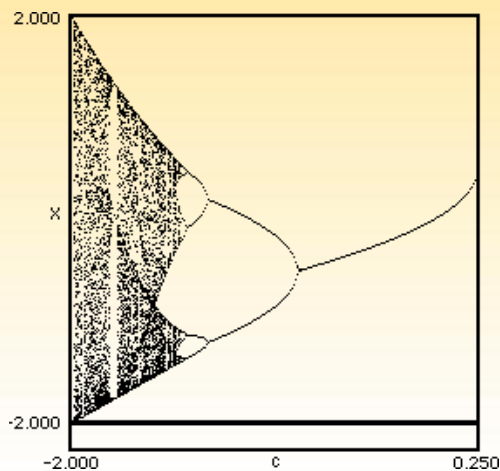
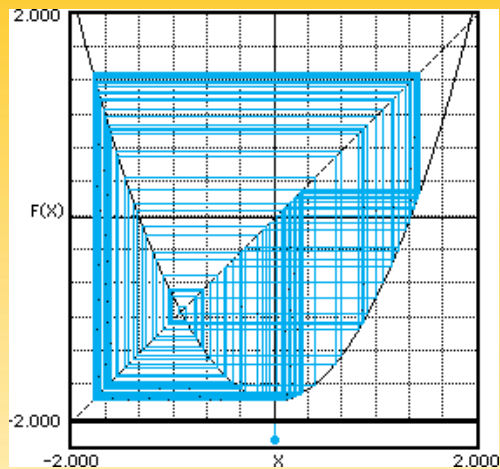


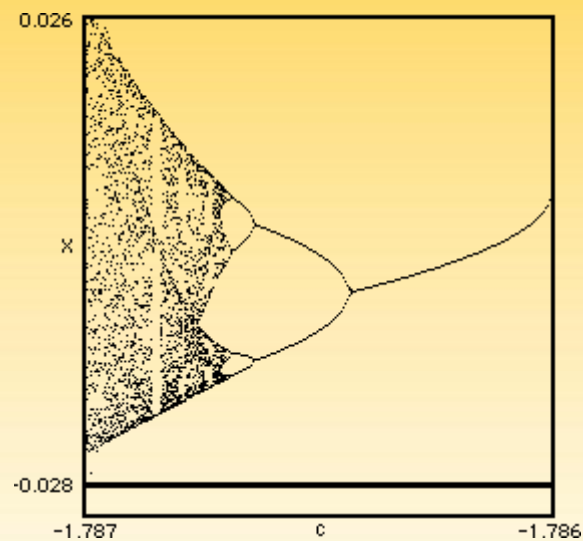
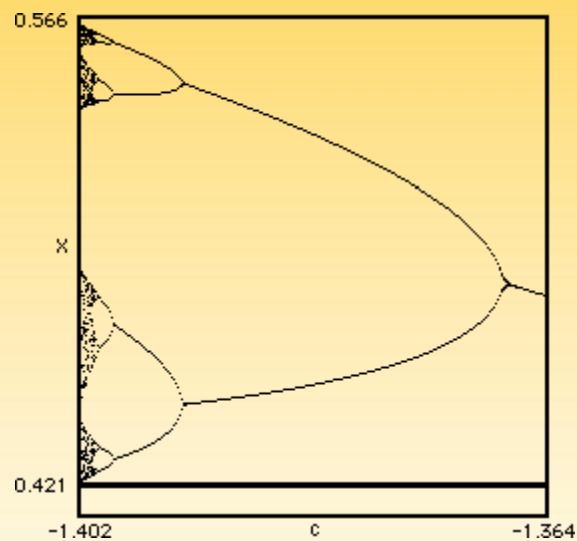
- $c = -13/16$, orbita je mezi hodnotami $-3/4$ a $-1/4$



- $c = -1.3$ orbita osciluje mezi čtyřmi hodnotami

- $C = -1.8$ chaos





Bekyně velkohlavá



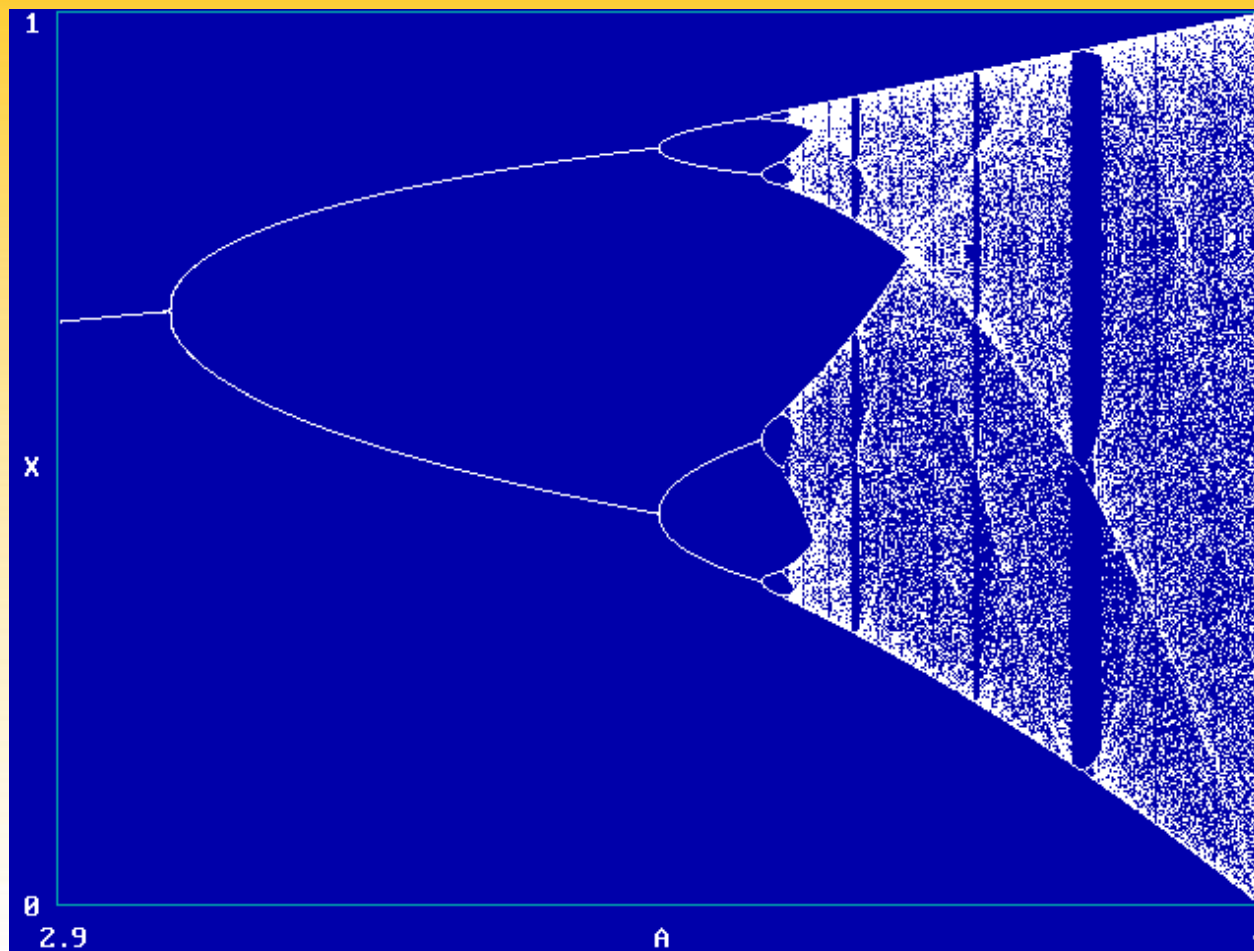
- Velikost populace je vyjádřena číslem mezi 0 a 1.
- 0 – vyhynutí, 1 – maximální populace
- Biologové předpokládali, že když se hodnoty střídavě zvětšují a zmenšují, tak nutně oscilují kolem rovnovážného stavu
- Vůbec nepředpokládali, že může nastat chaos

- Malá populace se množí rychle
- Přemnožená se začne zmenšovat
- Hledáme funkci, která rychle roste, pokud je populace malá, omezí růst na nulu při optimálním stavu a klesá, je-li populace příliš velká
- **LOGISTICKÁ DIFERENČNÍ ROVNICE**

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n).$$

- r – parametr růstu
- $(1 - x)$ udržuje růst v jistých mezích:
jakmile x vzroste, $1 - x$ klesne

- Zvolme $r = 2,7$, počáteční stav populace např. 0,02
- Dosazujeme do logistické rovnice
- Dojdeme ke stálému číslu 0,6296 –
stabilní stav
- Zvyšujeme-li parametr, hodnota bude vzrůstat, při dalším růstu parametru dojde k bifurkacím, ty budou přicházet stále častěji, nakonec se systém stane chaotickým



• 4.

6692016091029906718532038204662016
1725818557747576863274565134300413
4330211314737138689744023948013817
1659848551898151344086271420279325
2231244298889089085994493546323671
3411532481714219947455644365823793
2020095610583305754586176522220703
8541064674949428498145339172620056
8755665952339875603825637225

Děkuji za pozornost

