

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

Matematika 2

(Biomedicínská technika a bioinformatika)

Jan Chvalina
Štěpán Křehlík
Zdeněk Svoboda
Jiří Vítovec



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



VYSOKÉ
UČENÍ
TECHNICKÉ
V BRNĚ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014

<http://www.umat.feec.vutbr.cz>

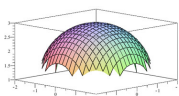
Obrázky pomocí METAPOSTu a METAFONTu: Jaromír Kuben

Animace a 3D objekty: Roman Plch

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,
Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně.



Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.



Součástí tohoto učebního textu jsou animace, resp. prvky 3D grafiky. Pro korektní zobrazení těchto multimediálních prvků a práci s nimi je nutné správně nastavit zabezpečení prohlížeče PDF souborů, a to zejména na záložkách typu *3D a multimédia*, *Důvěryhodnost multimedií (starší)*, *Multimédia (starší)*. Vlastnosti zobrazení těchto prvků lze ovlivnit pomocí položek jejich kontextového menu, příp. pomocí práce s myší nebo jiným polohovacím zařízením.



Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v [elektronické bance příkladů](#).

Obsah

1	Diferenciální počet funkcí více proměnných	5
1.1	Funkce více proměnných a související pojmy	5
1.2	Zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m	7
1.3	Metrické vlastnosti \mathbb{R}^n	9
1.4	Limita a spojitost funkce	11
1.5	Parciální derivace, derivace ve směru	18
1.6	Diferenciál funkce	24
1.7	Funkce zadané implicitně	26
1.7.1	Funkce jedné proměnné zadaná implicitně	26
1.7.2	Funkce dvou proměnných zadaná implicitně	29
1.8	Příklady na procvičení	31
	Cvičení	31
	Výsledky	32
2	Obyčejné diferenciální rovnice	34
2.1	Základní pojmy	34
2.2	Diferenciální rovnice prvního řádu	37
2.2.1	Geometrická interpretace rovnic prvního řádu	38
2.2.2	Rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými	39
2.2.3	Homogenní separovatelné rovnice prvního řádu	41
2.2.4	Lineární diferenciální rovnice prvního řádu	43
2.3	Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů	46
2.3.1	Homogenní rovnice s konstantními koeficienty	50
2.3.2	Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty	51
2.4	Příklady na procvičení	58
	Cvičení	58
	Výsledky	59
3	Funkce komplexní proměnné	62
3.1	Komplexní čísla	62
3.1.1	Základní pojmy	62
3.1.2	Rozšíření komplexních čísel o nevlastní bod	65
3.1.3	Množiny komplexních čísel	66
3.2	Posloupnosti, řady, mocninné řady	67

3.2.1	Mocninné řady	68
3.3	Funkce reálné proměnné	68
3.3.1	Křivky v \mathbb{C}	69
3.4	Funkce komplexní proměnné	71
3.4.1	Grafické znázornění funkce komplexní proměnné	72
3.5	Limita, spojitost	78
3.6	Derivace funkce komplexní proměnné	79
3.6.1	Geometrický význam Cauchy-Riemannových podmínek a derivace funkce komplexní proměnné	81
3.6.2	Holomorfní a harmonické funkce	82
3.7	Elementární funkce komplexní proměnné	84
3.8	Integrál funkce komplexní proměnné	88
3.9	Řady v komplexním oboru a singulární body	95
3.9.1	Singulární body a jejich klasifikace	97
3.10	Rezidua a jejich užití	100
3.10.1	Užití reziduí při výpočtu reálných integrálů	103
3.11	Příklady na procvičení	105
	Cvičení	105
	Výsledky	106
4	Speciální funkce, Fourierovy řady a Fourierova transformace	107
4.1	Diracova zobecněná funkce $\delta(t)$, zobecněná derivace	107
4.2	Fourierovy trigonometrické řady	113
4.2.1	Periodické a harmonické funkce	113
4.2.2	Fourierovy trigonometrické řady	115
4.2.3	Rozvoj pouze do sinů resp. kosinů	121
4.2.4	Grafické znázornění Fourierova rozvoje - Spektrum	123
4.3	Fourierova transformace a Fourierův integrál	124
4.3.1	Zavedení Fourierovy transformace	125
4.3.2	Užití Fourierovy transformace při určování obrazů některých funkcí	128
4.3.3	Užití Fourierovy transformace při řešení diferenciálních rovnic	131
4.3.4	Slovník Fourierovy transformace	132
4.4	Příklady na procvičení	133
	Cvičení	133
	Výsledky	134
5	Laplaceova transformace	136
5.1	Zpětná Laplaceova transformace	144
5.1.1	Zpětná transformace racionální lomené funkce	144
5.1.2	Integrální tvar inverzní transformace	145
5.2	Souvislost Fourierovy a Laplaceovy transformace	148
5.3	Užití Laplaceovy transformace k řešení rovnic	149
5.4	Slovník Laplaceovy transformace	155
5.5	Příklady na procvičení	156
	Cvičení	156

6	\mathcal{L} transformace	159
6.1	Souvislost \mathcal{L} a Laplaceovy transformace	165
6.2	Zpětná \mathcal{L} transformace	165
6.2.1	Předmět k racionální funkci	166
6.3	Řešení diferenčních a rekurentních rovnic	169
6.4	Konečné součty	175
6.5	Příklady na procvičení	178
	Cvičení	178
	Výsledky	179
7	Signály	181
7.1	Pojem signálu	181
7.1.1	Zavedení pojmu a klasifikace signálu	181
7.2	Deterministické signály využívané při analýze lineárních systémů	184
7.2.1	Jednotkový impuls	184
7.2.2	Jednotkový skok	185
7.3	Signály se spojitým časem	186
7.4	Periodické signály, harmonické signály a jejich spektra	186
7.4.1	Diskrétní signály	192
8	Systémy	194
8.1	Zavedení pojmu a klasifikace	194
8.2	Matematický model systému se spojitým časem	206
8.3	Lineární systém se spojitým časem	212
8.3.1	Vstupně–výstupní popis	213
	Literatura	219

Předmluva

Tento učební text je určen pro posluchače druhého semestru bakalářského studia oboru Biomedicínská technika a bioinformatika na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií Vysokého učení technického v Brně.

Autoři předpokládají znalost základních matematických pojmů probraných v rámci předmětu Matematika 1, zejména základů lineární algebry a geometrie, diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné a nekonečných řad. Obsah tohoto textu je zaměřen na dvě významné matematické disciplíny, které velice těsně souvisejí s četnými praktickými aplikacemi rozvíjenými v navazujících předmětech. Těmito disciplínami jsou především diferenciální rovnice a různé (zejména integrální) transformace. Zvláštní význam pro studium biomedicíny a bioinformatiky mají i spojité a diskrétní systémy a signály, které přímo souvisí se zmiňovanými disciplínami.

První až šestá kapitola je při zohlednění odlišných studijních programů převzata z textu určeného pro posluchače oboru Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika. Jeho autory jsou Jiří Vítovec (první a druhá kapitola) a Zdeněk Svoboda (třetí až šestá kapitola). Zbývající dvě kapitoly, specifické pro obor Biomedicínská technika a bioinformatika vznikly za vzájemné spolupráce autorů Jana Chvaliny a Štěpána Křehlíka.

S ohledem na aplikační zaměření textu je většina matematických tvrzení formulována bez důkazů. S výjimkou několika málo případů, kde je stručně naznačeno, jak by se uvedené tvrzení dokazovalo. Přitom, pokud to je možné, vyhýbáme se složitým teoretickým úvahám. Cílem je především využít formulovaných vět při řešení rozmanitých úloh. Z tohoto důvodu je text doplněn o velké množství řešených úloh i s naznačením možných technických interpretací. V tomto směru se autoři inspirovali zejména učebním textem [18] autorů Melkese a Řezáče. Vzhledem k rozsahu textu jsou pro zájemce uvedeny odkazy na použitou literaturu, kde se mohou s danou problematikou seznámit podrobněji.

Ke správnému pochopení probrané látky jsou ke konci většiny kapitol uvedeny příklady k procvičení, společně s jejich výsledky. V úplném závěru těchto kapitol jsou navíc přidány odkazy na tzv. maplety, kde si lze pomocí webové aplikace procvičit probraná témata.

Celý text je strukturován tak, že některé jeho části jsou vysázeny drobným písmem. Tyto části jsou náročnější a jejich pochopení není předpokladem pro porozumění dalšího textu.

1 Diferenciální počet funkcí více proměnných

V první kapitole se stručně seznámíme se základními pojmy, které se týkají funkcí více proměnných a jsou nezbytné pro výklad dalších tematických celků probíraných v rámci předmětu Matematika 2. Ze základních témat vynecháme pouze studium extrémů funkcí více proměnných¹.

Omezíme se především na funkce dvou proměnných, které se dají (jako jediné funkce více proměnných) rozumně geometricky interpretovat v trojrozměrném prostoru. Navíc jsou důležitým základem pro pochopení látky v kapitole věnované funkcím komplexní proměnné.

Reálná funkce jedné reálné proměnné je zobrazení z \mathbb{R} do \mathbb{R} . Zobecněním tohoto pojmu dostaneme zobrazení z \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) do \mathbb{R} , které se nazývá funkce více proměnných. V tomto textu budeme body v \mathbb{R}^n , tj. prvky prostoru \mathbb{R}^n , značit malými písmeny, např. $x = [x_1, \dots, x_n]$. Naopak množiny v \mathbb{R}^n , tj. souhrny (většinou nekonečně mnoha) bodů, budeme značit velkými písmeny, např. $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

1.1 Funkce více proměnných a související pojmy

Definice 1.1. Nechtě $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, $D(f) \neq \emptyset$. Zobrazení $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **reálná funkce n reálných proměnných** a množina $D(f)$ se nazývá **definičním oborem** funkce f . Funkci obvykle zapisujeme ve tvaru $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nebo zkráceně $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. V případě funkce dvou proměnných, resp. tří proměnných obvykle preferujeme zápis $z = f(x, y)$, resp. $u = f(x, y, z)$. Množinu $H(f)$ definovanou jako $H(f) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid [x_1, x_2, \dots, x_n] \in D(f)\}$ nazýváme **oborem hodnot** funkce f .

Příkladem funkce více proměnných mohou být například známé matematické (či fyzikální) vzorce. Objem rotačního válce V je funkcí svého poloměru r a výšky v , což zapíšeme jako

$$V = V(r, v) = \pi r^2 v.$$

Analogicky objem komolého rotačního kužele V je funkcí tří proměnných – poloměřů r a R jeho spodní a horní podstavy a výšky tělesa v , což zapíšeme jako

$$V = V(r, R, v) = \frac{\pi v}{3} (r^2 + rR + R^2).$$

¹Toto téma bude podrobně probíráno později v rámci předmětu BVPM.

Z definice funkce více proměnných vyplývá, že tato funkce je jednoznačně určena svým definičním oborem a předpisem, kterým je každému bodu $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in D(f)$ přiřazena funkční hodnota $f(x)$. Pokud je předpis dán vzorcem a definiční obor funkce není zadán, pak definičním oborem rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}^n$, pro něž má tento vzorec smysl. Např. u výše uvedené funkce pro objem rotačního válce je definičním oborem množina $D(f) = (0, \infty) \times (0, \infty)$ ve shodě s geometrickým významem proměnných r a v .

Příklad 1.2. Zobrazte v rovině definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

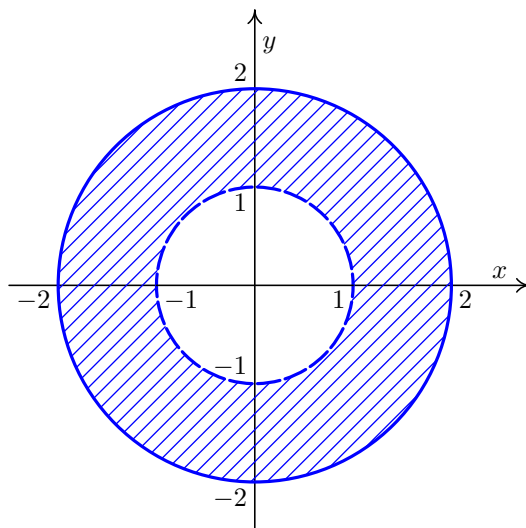
Řešení. Výraz pod odmocninou, resp. v logaritmu musí být nezáporný, resp. kladný. Odtud dostáváme podmínku

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 - 1 > 0,$$

což je ekvivalentní s

$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 > 1.$$

Rovnice $x^2 + y^2 = 4$ a $x^2 + y^2 = 1$ jsou rovnicemi kružnic se středy v počátku o poloměrech $r = 2$ a $r = 1$. Definičním oborem funkce f je množina $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ vyšrafovaná na Obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Množina $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.

□

Definice 1.3. Necht f je funkce n proměnných definovaná na množině $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. **Grafem funkce** f nazýváme množinu všech bodů

$$G(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in D(f), y = f(x)\}.$$

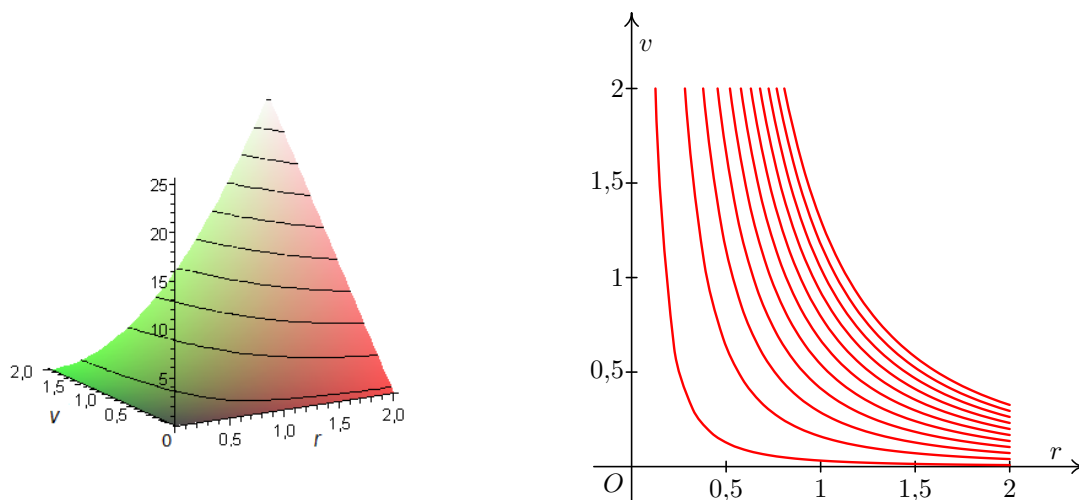
Grafem funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je tedy množina všech bodů $[x, y, f(x, y)]$ vyhovující předpisu f . Tím je nejčastěji plocha v trojrozměrném prostoru \mathbb{R}^3 . Pro grafické znázornění funkce $z = f(x, y)$ často využíváme i tzv. **metodu rovinných řezů**, jimiž jsou především řezy funkce f s rovinami $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$. Další možností rovinných řezů jsou tzv. **vrstevnice**, což jsou průsečnice grafu funkce f s rovinami $z = c$.

Definice 1.4. Nechť $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných a nechť $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{[x, y] \in D(f) \mid f(x, y) = c\}$$

nazýváme **vrstevnicemi funkce f na úrovni c** .

Interpretujeme-li zemský povrch jako funkci dvou proměnných, kdy dvojici čísel, chápaných jako zeměpisná šířka a délka bodu zemského povrchu, přiřadíme jeho nadmořskou výšku, pak vrstevnicí f_c na mapě rozumíme množinu všech bodů se stejnou nadmořskou výškou c . Vrstevnicí je tedy nejčastěji nějaká křivka v rovině \mathbb{R}^2 . V následující obrázku je pro $r, v \in (0, 2)$ znázorněn graf a vrstevnice výše uvedené funkce $V(r, v) = \pi r^2 v$ pro objem válce V .



Obr. 1.2: Graf a vrstevnice funkce $V(r, v) = \pi r^2 v$.

Pro funkce n proměnných lze analogicky definovat tzv. **hladinu funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ na úrovni $c \in \mathbb{R}$** jako množinu všech bodů $\{[x_1, \dots, x_n] \in D(f) \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$. Ovšem v tomto obecném případě již chybí geometrická analogie s vrstevnicemi na mapě, jako tomu je pro případ $n = 2$.

1.2 Zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m

Dalším důležitým pojmem, který přímo souvisí s funkcemi více proměnných, je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m . Pro názornost uvedeme pouze definici zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 a další rozšíření definice pro vyšší dimenze ponecháme na samotném čtenáři. Poznamenejme, že zobrazení

z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 , má mnohá využití v geometrii a dá se jím do jisté míry dobře popsat i funkce komplexní proměnné, jak uvidíme později.

Definice 1.5. Nechť jsou dány funkce f, g dvou reálných proměnných a $D = D(f) \cap D(g)$. Dále nechť zobrazení $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem

$$[x, y] \xrightarrow{F} [f(x, y), g(x, y)].$$

Pak řekneme, že **zobrazení F je určeno funkcemi f, g** a tyto funkce nazýváme **složkami zobrazení F** .

Zobrazení F z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 (resp. z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n) si můžeme představit jako „přemísťování“ bodů v rovině \mathbb{R}^2 (resp. v n -rozměrném prostoru \mathbb{R}^n). V takovémto případě nazýváme zobrazení F **transformací**.

Příklad 1.6. V matematice se často používá transformace do **polárních souřadnic**, která umožní v rovině \mathbb{R}^2 převést kruh nebo výseč mezikruží na obdélník. Transformace je definována vztahy:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Pro bod roviny $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, značí první složka zobrazení $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku soustavy souřadnic. Druhá složka $\varphi(x, y)$ značí úhel, který svírá vektor určený počátečním bodem $[0, 0]$ a koncovým bodem $[x, y]$ s kladnou částí osy x , a jejím oborem hodnot je tedy interval $\langle 0, 2\pi \rangle$. Úhel φ lze určit ze vztahů:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pro funkce n proměnných, které mají neprázdný průnik svých definičních oborů, zavádíme analogicky jako u funkce jedné reálné proměnné algebraické operace jako sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí a násobení funkce konstantou. Nechť $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $c \in \mathbb{R}$, potom:

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x), & (c \cdot f)(x) &= c \cdot f(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } x \text{ taková, že } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Pro zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m jsou výše uvedené operace definované analogicky, tj. pro každou složku zobrazení zvlášť. Při operaci skládání funkcí n proměnných, resp. zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m je situace podstatně složitější. Situaci popíšeme pro zobrazení a odtud vyplyne, jak je to se skládáním funkcí více proměnných.

Definice 1.7. Nechť $n, m, k \in \mathbb{N}$ a $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m, Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ jsou množiny takové, že $Z_2 \subseteq Z_1$. Dále nechť $F : Z_1 \rightarrow Y$ a $G : X \rightarrow Z_2$. Potom zobrazení $F \circ G : X \rightarrow Y$ přiřazující každému bodu $x \in X$ bod $y \in Y$ předpisem

$$y = F \circ G = F(G(x))$$

nazveme **složeným zobrazením**.

Poznámka 1.8. Bod $z \in Z_2$ musí ležet současně v oboru hodnot zobrazení G , které nazýváme **vnitřním**, a v definičním oboru zobrazení F , které nazýváme **vnějším**, což znamená, že počet složek vnitřního zobrazení musí být stejný jako dimenze definičního oboru vnějšího zobrazení. Odtud plyne, že pokud chceme složit dvě funkce více proměnných, lze to učinit pouze mezi funkcí n proměnných a funkcí jedné proměnné. Situaci ilustrujeme na následujícím příkladě.

Příklad 1.9. Složte funkce $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ a $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

Řešení. Oborem hodnot funkce g je zřejmě interval $\langle 1, \infty \rangle$, což je podmnožinou definičního oboru funkce f , jímž je interval $(0, \infty)$. Tedy

$$f \circ g = f(g(x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

□

1.3 Metrické vlastnosti \mathbb{R}^n

Při studiu „lokálních“ vlastností funkcí více proměnných je vhodné zavést některé pojmy popisující vlastnosti podmnožin v prostoru \mathbb{R}^n . Základním pojmem je vzdálenost dvou bodů.

Definice 1.10. Nechť $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ jsou libovolné body prostoru \mathbb{R}^n . Potom nezáporné číslo

$$v(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

nazýváme **vzdáleností bodů** x a y . Vzdálenost dvou množin $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ definujeme jako

$$\min\{v(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Připomeňme, že ε -okolí vlastního bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ je definováno jako otevřený interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. V prostoru \mathbb{R}^n definujeme okolí bodu pomocí vzdálenosti. Jak si lze všimnout, případ $n = 1$ je speciálním případem následující definice.

Definice 1.11. Nechť $\varepsilon > 0$. Množinu

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid v(x, x_0) < \varepsilon\}$$

nazýváme **ε -okolím bodu** $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Množinu

$$P_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < v(x, x_0) < \varepsilon\}$$

nazýváme **ε -ryzím** nebo **ε -prstencovým** nebo též **ε -redukovaným okolím bodu** $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pokud není vzdálenost ε podstatná, budeme symbol ε vynechávat a psát jednoduše $U(x_0)$, resp. $P(x_0)$.

Poznamenejme, že ryzí okolí bodu x_0 , lze chápat jako „normální okolí“ neobsahující bod x_0 . Geometricky si lze okolí v \mathbb{R}^2 představit jako vnitřek kruhu, v \mathbb{R}^3 pak jako vnitřek koule. Dále se zaměříme na množiny bodů prostoru \mathbb{R}^n mající určitou vazbu ke konkrétním podmnožinám tohoto prostoru.

Definice 1.12. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je libovolná množina, $a \in \mathbb{R}^n$ bod v \mathbb{R}^n . Bod a se nazývá:

- (i) **vnitřním bodem** množiny A , existuje-li okolí $U(a)$ takové, že $U(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá **vnitřek** množiny A a značí se A° .
- (ii) **bodem uzávěru** množiny A , jestliže pro každé okolí $U(a)$ platí $U(a) \cap A \neq \emptyset$. Množina všech bodů uzávěru množiny A se nazývá **uzávěr** množiny A a značí se \bar{A} .
- (iii) **hraničním bodem** množiny A , jestliže v každém okolí $U(a)$ existují body x_1, x_2 takové, že současně platí $x_1 \in A, x_2 \notin A$. Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá **hranice** množiny A a značí se ∂A .
- (iv) **hromadným bodem** množiny A , jestliže každé okolí $U(a)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A . Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá **derivace** množiny A a značí se A' .
- (v) **izolovaným bodem** množiny A , jestliže existuje okolí $U(a)$ takové, že $U(a) \cap A = \{a\}$.

Dále definujeme nejznámější typy množin v \mathbb{R}^n .

Definice 1.13. Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou libovolné množiny. Řekneme, že množiny A a B jsou **oddělené** v \mathbb{R}^n pokud $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$. Dále řekneme, že množina A je:

- (i) **otevřená**, pokud obsahuje pouze své vnitřní body, tedy $A^\circ = A$.
- (ii) **uzavřená**, pokud obsahuje body svého uzávěru, tedy $\bar{A} = A$.
- (iii) **komplementem** neboli **doplňkem** množiny B , pokud $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Množinu B pak značíme A^C .

Poznamenejme, že v prostoru \mathbb{R}^n platí, že doplňkem otevřené množiny je uzavřená množina a naopak doplňkem uzavřené množiny je otevřená množina. Navíc pokud je A uzavřená, tak $A = A^\circ \cup \partial A$. Dále prázdná množina \emptyset a celý prostor \mathbb{R}^n jsou jediné tzv. **obojetné** množiny, tj. zároveň otevřené a uzavřené. Na druhou stranu v prostoru \mathbb{R}^n existují i množiny, které nejsou ani otevřené, ani uzavřené. Příkladem může být třeba mezikruží $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$, kde větší hraniční kružnice je součástí množiny M a menší hraniční kružnice není součástí množiny M , viz Obrázek 1.1 z Příkladu 1.2.

Na závěr rozšíříme množinu \mathbb{R}^n o nevlastní body podobně, jak jsme to učinili v případě množiny \mathbb{R} , kde jsme přidali k reálným číslům prvky ∞ a $-\infty$. Pro množinu \mathbb{R}^n se situace mírně komplikuje z důvodu, že takových nevlastních bodů je zde více. Jsou jimi všechny body prostoru \mathbb{R}^n mající alespoň jednu svou souřadnici rovnu ∞ nebo $-\infty$.

Příklad 1.14. Nevlastní body v \mathbb{R}^2 jsou typu: $[x_1, \pm\infty]$, $[\pm\infty, x_2]$, $[\pm\infty, \pm\infty]$ (dohromady 8 možných typů bodů), kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla.

Poznámka 1.15. Množinu \mathbb{R}^n spolu se všemi jejími nevlastními body budeme označovat symbolem $(\mathbb{R}^*)^n$.

Okolí nevlastních bodů budeme definovat analogicky, jako tomu bylo u funkcí jedné reálné proměnné. Pro jednoduchost postup popíšeme pouze u některých nevlastních bodů prostoru \mathbb{R}^2 .

Příklad 1.16. Určete okolí nevlastních bodů $[\infty, \infty]$ a $[x_1, \infty]$ v \mathbb{R}^2 .

Řešení. V případě bodu $[\infty, \infty]$ je jeho okolím libovolná nekonečná část roviny, tj. $U([\infty, \infty]) = (a, \infty) \times (b, \infty)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolná (nejčastěji velká) reálná čísla.

V případě bodu $[x_1, \infty]$ je jeho ε -okolím libovolná nekonečná část ε -pásu, tj. $U_\varepsilon([x_1, \infty]) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (a, \infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$ je libovolné (nejčastěji velké) reálné číslo. Zde je možné zavést ε -okolí, protože alespoň jedna souřadnice bodu $[x_1, \infty]$ je vlastní. \square

1.4 Limita a spojitost funkce

Při zavádění pojmů limity funkce více proměnných se budeme snažit postupovat analogicky jako u funkce jedné reálné proměnné. Na druhou stranu „rozmanitost“ prostoru \mathbb{R}^n nás nutí opustit určité tendence používané v případě funkce jedné proměnné. Zásadním rozdílem při výpočtu limit funkcí jedné a více proměnných hraje fakt, že okolí bodu a funkce jedné proměnné je otevřený interval, zatímco v případě funkcí více proměnných je jím otevřená n -rozměrná koule. U funkce jedné proměnné jsme předpokládali, že pokud limita v bodě $a \in \mathbb{R}$ existovala, byla funkce definovaná v nějakém pravém i levém ryzím okolí bodu a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

tj. do bodu a jsme se mohli blížit pouze ve dvou směrech, zprava nebo zleva.

V případě funkcí více proměnných se můžeme do bodu a blížit nekonečně mnoha způsoby, tj. po libovolné křivce. Pokud limita existuje, musí nám (ať se do bodu a blížíme jakkoliv) vycházet vždy stejná hodnota. Již z tohoto pohledu je výpočet limity obtížnější.

Z výše uvedených důvodů nebudeme při výpočtu limity funkce více proměnných v bodě a požadovat, aby funkce byla definována ve všech bodech nějakého ryzího okolí bodu a . Aby ovšem následující definice limity dávala smysl, budeme v dalším textu, aniž bychom tento fakt stále zdůrazňovali, předpokládat, že **bod a je hromadným (klidně i hraničním) bodem svého definičního oboru.**

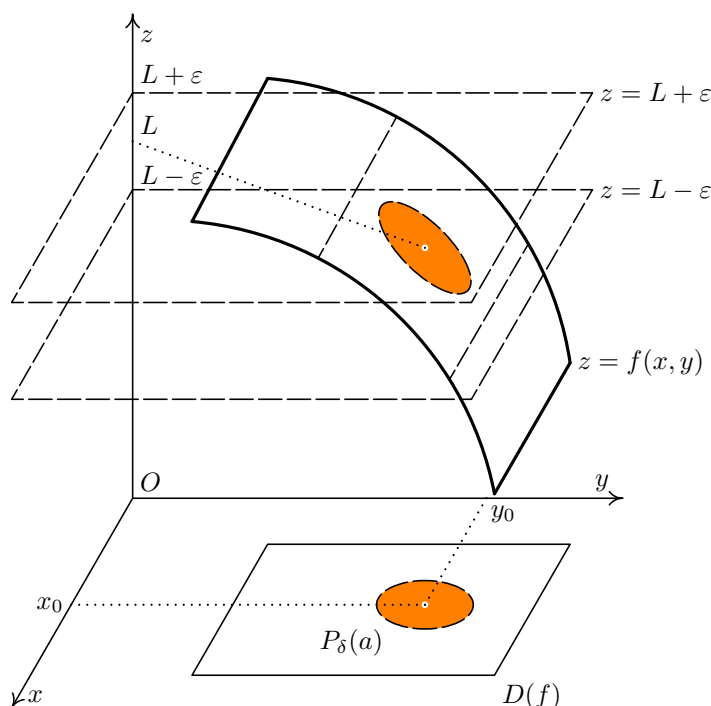
Definice 1.17. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ **limitu** L , $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $U(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $P(a)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in U(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Limita se nazývá **vlastní**, jestliže $L \in \mathbb{R}$, v opačném případě ($L = \pm\infty$) se limita nazývá **nevlastní**. Bod $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ se nazývá **limitní bod**.

Poznámka 1.18. Definice 1.17 je univerzální definicí limity pro funkci jedné či více proměnných a zahrnuje i případy vlastní či nevlastní limity pro vlastní i nevlastní limitní bod. Pokud bychom „povolili“ izolovanost bodu $a \in D(f)$, je obvyklé definovat limitu v tomto bodě jako $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Na následujícím obrázku je znázorněná (vlastní) limita funkce dvou proměnných.



Obr. 1.3: Limita funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$.

Poznamenejme, že v případě zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m je definice limity analogická, jen je vhodné si uvědomit, že limitou v tomto případě není číslo, ale m -tice čísel. Z definice limity (podobně jako u funkce jedné proměnné) lze přímo ukázat platnost mnohých tvrzení. Uvedme si ty nejdůležitější, jež budou obdobou těch, která dobře známe z teorie funkce jedné proměnné.

Věta 1.19. Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ nejvýše jednu limitu.

Věta 1.20. Necht' $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce, $a \in (\mathbb{R}^*)^n$. Dále necht' f je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu a . Pokud platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \infty$, pak

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0,$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0.$$

Věta 1.21. *Nechť $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ a necht existují vlastní limity funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě a . Potom pro algebraické operace s funkcemi platí*

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, pokud $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

Spojitosť funkce více proměnných je definována analogicky jako u funkce jedné proměnné.

Definice 1.22. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, resp. zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **spojité v bodě $a \in \mathbb{R}^n$** , jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Poznamenejme, že vzhledem k existenci limity funkce, která je výsledkem algebraických operací s funkcemi majících limitu, platí také, že výsledkem algebraických operací se spojitými funkcemi je spojitá funkce. Pro zobrazení platí následující tvrzení.

Věta 1.23. *Nechť F a G jsou zobrazení. Existuje-li kompozice $F(G(x))$ a $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = b$ a navíc je-li zobrazení F spojitě v bodě b , potom*

$$\lim_{x \rightarrow a} F(G(x)) = F(b).$$

Tato věta spolu s předcházející poznámkou umožňuje tvrdit:

- (i) Elementární funkce (jedné i více proměnných) jsou spojitě tam, kde jsou definované, přičemž za elementární funkce považujeme mocninné funkce, exponenciální funkce, goniometrické funkce a všechny funkce k nim inverzní. Dále mezi elementární funkce řadíme všechny funkce, které vznikly z těchto funkcí konečným počtem algebraických operací nebo operací skládání.
- (ii) Zobrazení obsahující pouze elementární složky je spojitě na množině M , pokud jsou na množině M spojitě všechny jeho elementární složky.

Tyto skutečnosti jsou podstatné při stanovení postupu při výpočtu limity u elementárních funkcí, kdy nejdříve zkusíme vypočítat hodnotu funkce (resp. zobrazení) dosazením limitního bodu do předpisu funkce. Pokud tato hodnota existuje, tj. po dosazení obdržíme určitý výraz, je limita rovna této funkční hodnotě.

Příklad 1.24. Vypočtěte limitu

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [2,-3,1]} \left[\frac{\sqrt{x^3 + y^2 - z}}{x + y \ln z}, x + y + z \right]$$

zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^2 .

Řešení. Přímým dosazením dostáváme

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [2,-3,1]} \left[\frac{\sqrt{x^3 + y^2 - z}}{x + y \ln z}, x + y + z \right] = \left[\frac{\sqrt{2^3 + (-3)^2 - 1}}{2 - 3 \ln 1}, 2 - 3 + 1 \right] = [2, 0].$$

□

Zobrazení má limitu (je spojitě) právě tehdy, když mají limitu (jsou spojitě) všechny složky tohoto zobrazení. Proto se v dalším zaměříme pouze na výpočet limit funkcí více proměnných.

Příklad 1.25. Určete limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty]} \frac{\cos(x + e^{-y})}{\sqrt{x + y}}.$$

Řešení. Zřejmě $|\cos(x + e^{-y})| \leq 1$ pro všechna $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ a tudíž výraz v čitateli je ohraničený v okolí bodu $[\infty, \infty]$. Navíc $\lim_{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty]} \sqrt{x + y} = \infty$. Přímým použitím Věty 1.20 dostáváme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty]} \frac{\cos(x + e^{-y})}{\sqrt{x + y}} = 0.$$

□

Příklad 1.26. Určete limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{3}{y - 2x}.$$

Řešení. Po dosazení limitního bodu dostaneme výraz $\frac{3}{0}$. Aby limita existovala, musela by se hodnota funkce v okolí bodu $[0, 0]$ blížit k ∞ nebo k $-\infty$. Snadno nahlédneme, že funkce je ve II. kvadrantu (tj. pro $x < 0$ a $y > 0$) kladná a blízko bodu $[0, 0]$ roste nade všechny meze. Naopak, ve IV. kvadrantu (tj. pro $x > 0$ a $y < 0$) je funkce záporná a blízko bodu $[0, 0]$ klesá pod všechny meze. Odtud (dle Věty 1.19) zkoumaná limita neexistuje. □

Nyní se budeme zabývat případy, kdy po dosazení limitního bodu do předpisu funkce vyjde neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 1.27. Určete limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{3x^2 - 2y^2}{\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} - 1}.$$

Řešení. Dosazením limitního bodu do funkce dostáváme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Hodnotu limity najdeme typickým obratem používaným i v případě hledání limity funkce jedné proměnné. Čitatele i jmenovatele zlomku vynásobíme výrazem $\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} + 1$. Po této úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{3x^2 - 2y^2}{\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} - 1} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{(3x^2 - 2y^2)(\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} + 1)}{3x^2 - 2y^2 + 1 - 1} = \\ &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} + 1) = 2. \end{aligned}$$

□

V dalších úvahách o existenci limit funkcí více proměnných je vhodné zavést následující pojem.

Definice 1.28. Nechť $a \in M$ je hromadný bod množiny M . Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a **limitu L vzhledem k množině M** , $M \subseteq D(f)$, jestliže

$$\forall U(L) \exists P(a) \mid f(P(a) \cap M) \subset U(L),$$

tj. ke každému $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý bod $x \in P_\delta(a) \cap M$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(L)$. Píšeme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$$

Věta 1.29. Nechť existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Potom pro každou množinu $M \subseteq D(f)$, jejímž hromadným bodem je bod a platí

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Speciální volbou množiny $M = \{[x_1(t), \dots, x_n(t)] \mid t \in I\}$, kde $x_i(t)$ jsou spojité funkce jedné reálné proměnné definované na intervalu I , je možné při výpočtu limity funkce více proměnných vzhledem k množině M využít postupů známých pro funkci jedné proměnné. Množina M je v tomto případě jednoparametrickou křivkou v prostoru \mathbb{R}^n . Pokud navíc $a \in \mathbb{R}^n$ a $t_0 \in I$ jsou takové, že $a = [x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)]$, potom platí

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

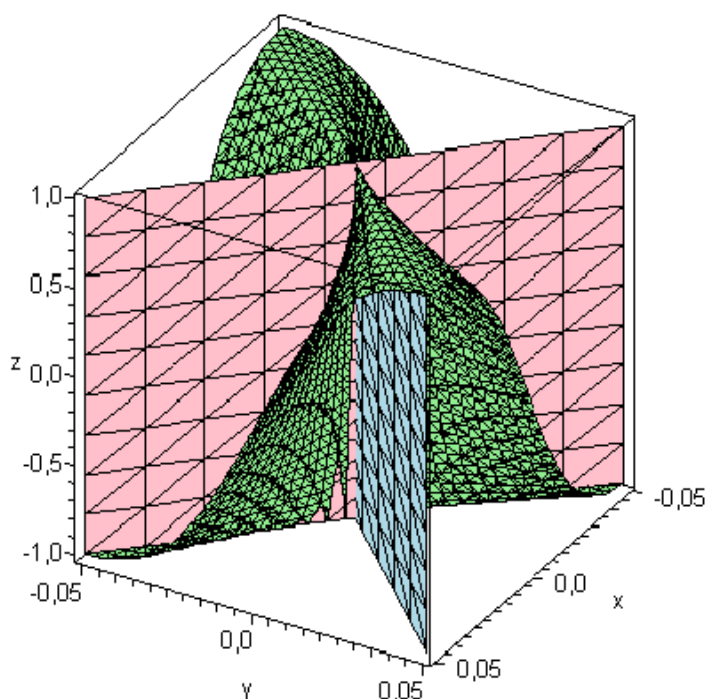
Tato skutečnost se s výhodou použije při dokazování neexistence limity funkce f , kdy stačí najít dvě různé množiny M_1 a M_2 , pro něž limity funkce f vzhledem k M_1 a M_2 vycházejí různě, viz následující příklad.

Příklad 1.30. Vypočtěte limitu $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Řešení. Vyšetříme všechny limity vzhledem k přímkám procházejícím počátkem mající tvar $y = kx$. Potom platí

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ [x,y] \in [x,kx]}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

To znamená, že hodnota limity v bodě $[0, 0]$ vzhledem k přímkám tvaru $y = kx$ závisí na volbě k . Tudíž výsledek limity je pro různá k různý a vyšetřovaná limita neexistuje, viz následující obrázek. \square



Obr. 1.4: Graf funkce $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ vzhledem k rovinám $y = x$ a $y = -x$.

Příklad 1.31. Vypočítejte limitu $\lim_{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty]} \frac{y}{e^x + x}$.

Řešení. Na první pohled by se mohlo zdát, že díky tomu, že funkce e^x ve jmenovateli roste „rychleji“ než lineární funkce y v čitateli, výsledek limity bude 0. Opak je pravdou. Vyšetříme všechny limity vzhledem k exponenciálám směřujícím do bodu $[\infty, \infty]$ majícím tvar $y = ke^x$, $k > 0$. Potom platí

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty] \\ [x,y] \in [x, ke^x]}} \frac{y}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ke^x}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + \frac{x}{e^x}} = k.$$

To znamená, že hodnota limity závisí na volbě k a tudíž vyšetřovaná limita neexistuje. \square

Ve výše uvedených příkladech je poměrně snadno ukázáno, že limita neexistuje. Pro opačný výsledek, že limita existuje, je třeba ukázat, že po všech křivkách má limita vzhledem k této křivce stejnou hodnotu. Ověřit tuto skutečnost pouze pro určitou třídu křivek (např. přímek) nestačí.

Obecně při výpočtu limity je nutné vycházet z definice limity a pracovat s okolími. V případě funkce dvou proměnných je možné okolí bodu $[x_0, y_0]$ vhodně popsat pomocí polárních souřadnic ve tvaru

$$x = x_0 + r \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \sin \varphi,$$

kde $r \geq 0$ udává vzdálenost bodů $[x_0, y_0]$ a $[x, y]$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je úhel, který svírá spojnice těchto bodů s kladným směrem osy x . Výhodou tohoto popisu je, že potom limitní přechod $[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]$ lze nahradit limitním přechodem $r \rightarrow 0$. Uvedený postup ilustrujeme na následujícím příkladě.

Příklad 1.32. Rozhodněte, zda funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

je spojitá v bodě $[0, 0]$.

Řešení. Abychom zjistili spojitost v bodě $[0, 0]$, je nutné (dle Definice 1.22) porovnat funkční hodnotu a limitu funkce f v bodě $[0, 0]$.

Jelikož v tomto případě vychází po dosazení limitního bodu $[0, 0]$ do předpisu funkce neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, použijeme při výpočtu limity transformaci do polárních souřadnic. Po nahrazení proměnných x, y novými proměnnými má funkce f tvar

$$\frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - \cos^2[r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]}{[r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]^2} = \frac{1 - \cos^2(r^2)}{r^4}$$

a tudíž lze výpočet uvedené limity nahradit výpočtem limity funkce jedné proměnné. Při výpočtu použijeme L'Hospitalovo pravidlo, jakožto aparát známý z teorie funkcí jedné proměnné:

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2(r^2)}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{4r \sin(r^2) \cos(r^2)}{4r^3} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r^2) \cos(r^2)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r^2)}{r^2} \cdot \lim_{r \rightarrow 0^+} \cos(r^2) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Jelikož platí

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = 1 = f(0, 0),$$

funkce je v bodě $[0, 0]$ spojitá. □

Poznamenejme, že v případě použití polárních souřadnic, kdy výsledek limity závisí na φ (tj. na úhlu, pod kterým se do limitního bodu blížíme), limita neexistuje, viz Příklad 1.30, který doporučujeme čtenáři spočítat i pomocí transformace do polárních souřadnic.

Příklad 1.33. Určete limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Řešení. Po dosazení bodu $[0,0]$ do předpisu funkce dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Po transformaci limity do polárních souřadnic dostáváme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2 (r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi}.$$

Blížíme-li se do bodu $[0,0]$ po libovolných křivkách s výjimkou těch, které svírají s kladným směrem osy x úhel $\varphi = 0$ či $\varphi = \pi$, vyjde limita nulová. Pro křivky, kde φ se blíží k 0 či k π , tj. pro ty, jejichž tečna v bodě $[0,0]$ se blíží k ose x , dostáváme po dosazení neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ a hodnotu limity neumíme určit. Vybereme-li však z množiny „podezřelých“ křivek paraboly tvaru $y = kx^2$ a dosadíme-li je do zadané limity, zjistíme, že

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ [x,y] \in [x, kx^2]}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Odtud vidíme, že výsledek limity závisí na tom, po jaké parabole se k limitnímu bodu blížíme, a tudíž limita neexistuje. \square

Při výpočtu limity funkcí tří a více proměnných lze postupovat analogicky jako v předcházejících příkladech, ovšem celá situace je zde komplikovanější kvůli vyšší dimenzi okolí limitního bodu.

1.5 Parciální derivace, derivace ve směru

Pro funkce více proměnných se zavádí pojem parciální derivace, který využívá pojem derivace funkce jedné proměnné.

Definice 1.34. **Parciální derivací (prvního řádu)** funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ **v bodě** $a = [a_1, \dots, a_n]$ podle proměnné x_i rozumíme derivaci funkce jedné proměnné

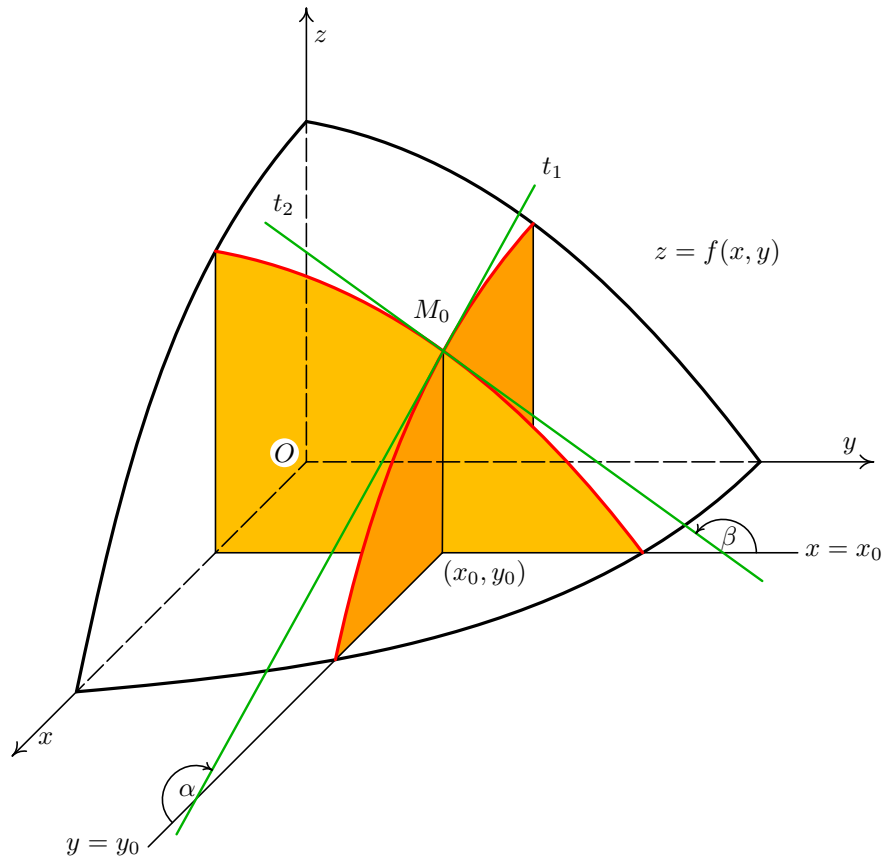
$$y(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

v bodě a_i . Tuto derivaci zapisujeme dvěma způsoby:

$$f'_{x_i}(a) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Funkce n proměnných má tedy n různých parciálních derivací prvního řádu. Při výpočtu parciální derivace podle proměnné x_i všechny proměnné kromě proměnné x_i „zafixujeme“, tj. nazíráme na ně při derivování jako na konstanty a derivujeme pouze podle proměnné x_i . Pro grafické vyjádření pojmu parciální derivace v bodě se omezíme pouze na funkci dvou proměnných a bod $[x_0, y_0]$. V tomto případě „zafixování“ proměnné y , resp. x znamená omezit se při výpočtu $f'_x(x_0, y_0)$, resp. $f'_y(x_0, y_0)$ na rovinu $y = y_0$,

resp. $x = x_0$. Ve shodě s geometrickým významem derivace funkce jedné proměnné je pak derivace $f'_x(x_0, y_0)$ rovna směrnici tečny v bodě $[x_0, y_0]$ k průsečnici funkce $f(x, y)$ s rovinou $y = y_0$. Analogické úvahy platí i pro $f'_y(x_0, y_0)$. Situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Obr. 1.5: Geometrický význam parciálních derivací f'_x a f'_y v bodě $[x_0, y_0]$.

Definice 1.35. Nechť funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ má definovanou parciální derivaci podle proměnné x_i v každém bodě množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom je funkce, přiřazující každému bodu této množiny hodnotu této parciální derivace, nazývána **parciální derivací (prvního řádu)** funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ podle proměnné x_i , což zapisujeme

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Parciální derivace na nějaké množině M je tedy funkce n proměnných. Při praktickém výpočtu parciální derivace (prvního řádu) funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ postupujeme tak, že nejprve spočítáme parciální derivaci obecně a poté do ní bod a dosadíme, viz následující příklad.

Příklad 1.36. Vypočtete všechny parciální derivace prvního řádu funkce

- a) $z = \arctg \frac{x}{y}$ v bodě $[0, 1]$, b) $z = x^y$ v bodě $[1, 2]$.

Řešení. a) Derivujeme jako složenou funkci, tj.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Odtud $z'_x(0, 1) = 1$ a $z'_y(0, 1) = 0$.

b) Na výpočet parciální derivace podle x použijeme vzorec pro derivaci mocninné funkce a při parciální derivaci podle y využijeme vzorce pro derivaci exponenciální funkce se základem x , tj.

$$z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x.$$

Odtud $z'_x(1, 2) = 2$ a $z'_y(1, 2) = 0$.

□

Poznámka 1.37. Z existence parciálních derivací funkce f v bodě $[x_1, \dots, x_n]$ neplyne nutně spojitost funkce f v tomto bodě. Tedy neplatí jistá analogie s funkcí jedné proměnné, kde existence derivace funkce f v bodě x_0 implikovala spojitost funkce f v tomto bodě, viz následující příklad.

Příklad 1.38. Funkce z definovaná jako

$$z(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0]$ obě parciální derivace rovny 0, ale není v tomto bodě spojitá, protože zde neexistuje limita. Blížíme-li se totiž do bodu $[0, 0]$ po ose x či y vychází hodnota 1 a v jiném směru vychází hodnota 0. Grafem funkce je rovina $z = 0$, z níž je „vzdvížen“ osový kříž.

Zobecněním pojmu parciální derivace je derivace ve směru vektoru \vec{s} .

Definice 1.39. Derivací funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ ve směru $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$ rozumíme derivaci funkce jedné proměnné

$$y(t) = f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n)$$

v bodě $t = 0$ a zapisujeme ji $f'_{\vec{s}}(a)$. To znamená, že

$$f'_{\vec{s}}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}.$$

Volíme-li vektor $\vec{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ tvořený nulami s výjimkou i -té pozice (kde je 1), derivace funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ ve směru $\vec{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ je rovna parciální derivaci $f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n)$.

Abychom uvedli i souvislost parciálních derivací s derivací ve směru, je vhodné zavést pojem gradientu funkce $f(x_1, \dots, x_n)$.

Definice 1.40. Jestliže má funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ parciální derivace v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ podle všech proměnných x_i , řekneme, že funkce y má v bodě a **gradient** $\text{grad } f(a)$, který je roven vektoru parciálních derivací v tomto bodě podle jednotlivých proměnných, tj.

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Věta 1.41. *Existuje-li okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$, v němž má funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ spojitě parciální derivace podle všech proměnných x_i , potom pro libovolný vektor $\vec{s} = [s_1, \dots, s_n]$ existuje derivace funkce y ve směru \vec{s} a platí:*

$$f'_s(a) = \langle \text{grad } f(a) \cdot \vec{s} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) s_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) s_n,$$

kde výraz $\langle \text{grad } f(a) \cdot \vec{s} \rangle$ označuje **skalární součin** těchto vektorů.

Poznamenejme, že pro k -násobný vektor \vec{s} vychází směrová derivace k -násobná, tj. pro $k \in \mathbb{R}$ platí

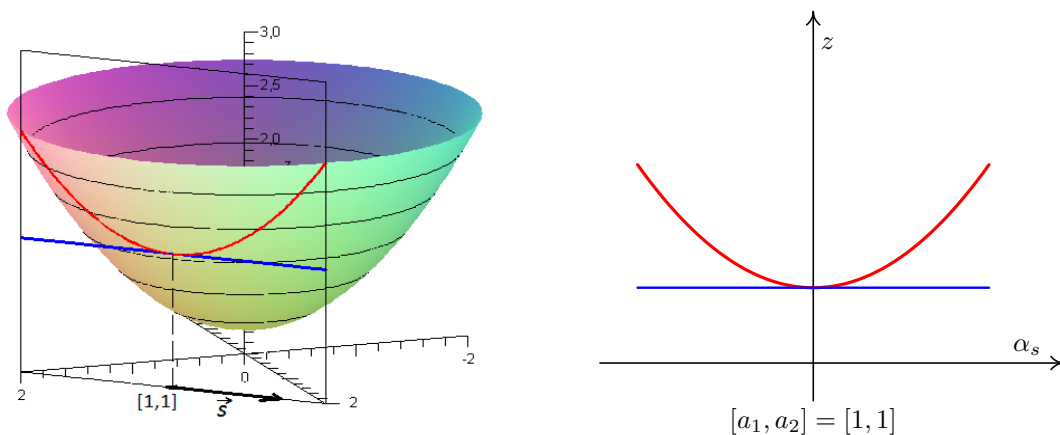
$$f'_{k\vec{s}}(a) = k f'_s(a).$$

Omezíme-li se na vektory konkrétní velikosti $v > 0$, tak z vlastností skalárního součinu plyne fakt, že největší hodnoty nabývá $f'_s(a)$ pro vektor \vec{s} ($|\vec{s}| = v$), který je roven vhodnému k -násobku vektoru $\text{grad } f(a)$. Gradient funkce f v bodě a je tedy směrem největšího růstu funkce f v bodě a a hodnota $f'_s(a)$ udává, jak moc funkce f v tomto směru roste.

Pro geometrickou interpretaci derivace ve směru \vec{s} , kde $|\vec{s}| = 1$, se podobně jako u parciálních derivací omezíme na funkce dvou proměnných. Množinu bodů

$$[a_1 + ts_1, a_2 + ts_2, f(a_1 + ts_1, a_2 + ts_2)], \quad t \in \mathbb{R},$$

si lze představit jako průsečnici grafu funkce f s rovinou α . Rovina α je rovnoběžná s osou z a má stopu v rovině xy určenou bodem $[a_1, a_2]$ a vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2)$, viz Obrázek 1.6.



Obr. 1.6: Směrová derivace v bodě $[1, 1]$ ve směru \vec{s} .

Derivace ve směru vektoru \vec{s} v bodě $[a_1, a_2]$ je potom tangentou úhlu, který svírají vektor \vec{s} spolu s tečným vektorem průsečnice v bodě $[a_1, a_2, f(a_1, a_2)]$. Na obrázku jsou příslušné vektory rovnoběžné, což znamená, že jejich úhel a tudíž i směrová derivace (zde konkrétně pro bod $[1, 1]$) jsou nulové.

Jinou možnou interpretací je představa, že funkce f lokálně popisuje nadmořskou výšku zemského povrchu. Postavíme-li se s lyžemi na svah v bodě $[a_1, a_2, f(a_1, a_2)]$ tak, že lyže se nám při rovnoběžném promítání ve směru osy z promítnou do vektoru (s_1, s_2) , potom podíl rozdílu nadmořských výšek špiček a pat lyží ku délce lyží je roven derivaci funkce f v bodě $[a_1, a_2]$ ve směru \vec{s} .

Příklad 1.42. Určete směr ve kterém funkce

$$f(x, y) = xy + \sin \frac{x}{y}$$

v bodě $[\pi, 1]$ nejrychleji roste. Dále určete $f'_{\vec{s}}$ v tomto bodě pro $\vec{s} = (1, 3)$.

Řešení. Nejdříve spočítáme parciální derivace funkce f , tj.

$$f'_x = y + \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}, \quad f'_y = x - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}.$$

Odtud $f'_x(\pi, 1) = 0$, $f'_y(\pi, 1) = 2\pi$ a $\text{grad } f(\pi, 1) = (0, 2\pi)$, tedy funkce nejrychleji roste ve směru $(0, 2\pi)$ neboli v kladném směru osy y . Jelikož jsou obě parciální derivace spojité v okolí bodu $[\pi, 1]$, využijeme k určení směrové derivace Větu 1.41:

$$f'_{(1,3)}(\pi, 1) = \langle \text{grad } f(\pi, 1) \cdot (1, 3) \rangle = 0 \cdot 1 + 2\pi \cdot 3 = 6\pi.$$

□

Poznámka 1.43. Podobně jako u parciálních derivací, i z existence směrových derivací funkce f v bodě $[x_1, \dots, x_n]$ neplyne nutně spojitost funkce f v tomto bodě, viz následující příklad.

Příklad 1.44. Funkce f definovaná jako

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0]$ směrové derivace dokonce v libovolném směru, ale není zde spojitá. Ověření existence všech směrových derivací v bodě $[0, 0]$ ponecháme na samotném čtenáři. Je však nutné při jejich určování použít přímo definici směrové derivace. Nespojité v bodě $[0, 0]$ plyne z neexistence limity v tomto bodě, viz Příklad 1.33.

Jak jsme již uvedli dříve, lze parciální derivaci prvního řádu chápat jako funkci více proměnných na množině M . Jestliže má funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ na této množině parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$, která má v bodě $a = [a_1, \dots, a_n] \in M$ parciální derivaci podle

proměnné x_j , nazveme tuto parciální derivaci parciální derivací druhého řádu funkce f podle $x_i x_j$, tj.

$$f''_{x_i x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a).$$

Opakováním uvedeného postupu definujeme rekurentně i parciální derivace vyšších řádů. Pro parciální derivace vyšších řádů platí tzv. Schwarzova věta o záměně pořadí derivování. Uvedeme ji v nejjednodušší podobě, tj. pro funkci dvou proměnných a (smíšené) parciální derivace druhého řádu.

Věta 1.45 (Schwarzova). *Nechť v nějakém okolí $U(a)$ bodu $a = [a_1, a_2]$ existují obě parciální derivace f'_x a f'_y funkce $f(x, y)$. Dále, nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě $a = [a_1, a_2]$ spojitou parciální derivaci f''_{xy} nebo f''_{yx} . Potom jsou spojité obě tyto parciální derivace a navíc jsou záměnné, tj. platí*

$$f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a).$$

Příklad 1.46. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z = x^y$. Dále ověřte platnost Schwarzovy věty a najděte množinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$, pro kterou je tato věta splněna.

Řešení. Z Příkladu 1.36 b) víme, že

$$z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x.$$

Dalším derivováním určíme

$$z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad z'_{yy} = x^y \ln^2 x.$$

Pro smíšené parciální derivace dostáváme

$$z''_{xy} = 1x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x), \quad z''_{yx} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1}(y \ln x + 1).$$

Odtud je vidět, že Schwarzova věta je splněna pro všechna $[x, y]$, kde jsou smíšené derivace definované, tj. na množině $M = \{[x, y] \mid x > 0\}$. \square

Závěrem uvedeme důležité diferenciální operátory používané zejména ve fyzice a aplikacích. Již jsme se zmínili o gradientu. Pro jednoduchý zápis gradientu se používá symbolického vektoru nabla

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

který je nejčastěji používán pro funkce tří proměnných, tj.

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Gradient $\text{grad } f(a)$ v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ zapisujeme potom jako součin symbolického vektoru

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

a skaláru $f(a)$, tj.

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(a).$$

Dalším důležitým operátorem je tzv. **Laplaceův operátor**, který můžeme symbolicky vyjádřit jako

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

a který je nejčastěji používán pro funkce dvou nebo tří proměnných, tj.

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

nebo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Poznamenejme, že s tzv. Laplaceovou rovnicí pro funkci $u(x, y)$, tj. s rovnicí

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se setkáme později u funkcí komplexní proměnné, podrobněji viz Odstavec 3.6.2.

1.6 Diferenciál funkce

Diferenciál funkce jedné proměnné v bodě x_0 vnímáme jako nahrazení funkce tečnou v bodě x_0 a jeho existence je rovnocenná existenci derivace v tomto bodě. Situace v případě funkcí více proměnných je komplikovanější, i když z formálního hlediska je význam diferenciálu totožný.

Definice 1.47. Řekneme, že funkce $f(x_1, \dots, x_n)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definovaná v nějakém okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$ je v tomto bodě **diferencovatelná**, jestliže existují konstanty $D_1, \dots, D_n \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{[h_1, \dots, h_n] \rightarrow [0, \dots, 0]} \frac{f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - (D_1 h_1 + \dots + D_n h_n)}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0.$$

Lineární výraz $D_1 h_1 + \dots + D_n h_n$ proměnných h_1, \dots, h_n se nazývá **diferenciál** nebo též **totální diferenciál** funkce f v bodě $[a_1, \dots, a_n]$ a značí se $df(a_1, \dots, a_n)$.

Věta 1.48. *Je-li funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ diferencovatelná v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$, resp. v jeho okolí, pak je v tomto bodě, resp. v jeho okolí spojitá. Navíc v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu a splňují rovnosti*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = (D_1, \dots, D_n).$$

Poznámka 1.49. (i) Výrazy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i \quad \text{pro } i = 1, \dots, n$$

se někdy v odborné literatuře nazývají **parciální diferenciály**. Přírůstky h_i lze značit i jako dx_i .

(ii) Opak předešlé věty (podobně jako u funkce jedné proměnné) neplatí. Je-li funkce spojitá v bodě, nemusí být zde diferencovatelná, viz např. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[0, 0]$.

Při geometrické interpretaci se opět omezíme pouze na funkci dvou proměnných. V tomto případě diferenciál funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ obvykle zapisujeme ve zkrácené podobě

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy .$$

Vyjádříme-li přírůstky $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $dz = z - z_0$ a dosadíme do výše uvedené rovnice, vznikne nám pro proměnné x, y, z lineární rovnice

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (1.1)$$

která je vzorcem **tečné roviny** k funkci $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Příklad 1.50. Napište rovnici tečné roviny a normály (normálové přímky), tj. přímky kolmé k tečné rovině k funkci $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ v bodě $[1, 1, ?]$.

Řešení. Nejdříve vypočteme třetí souřadnici z_0 tečného bodu $z_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$. Tedy tečný bod má souřadnice $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$. Dále vypočteme parciální derivace prvního řádu, tj.

$$f'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{a} \quad f'_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Odtud dostáváme $f'_x(1, 1) = -\frac{1}{2}$ a $f'_y(1, 1) = \frac{1}{2}$. Dosazením do vztahu (1.1) dostáváme hledanou rovinu, tj.

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{-1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Normálový vektor tečné roviny $\vec{n} = (1, -1, 2)$ je směrovým vektorem normálové přímky, což spolu se znalostí jednoho bodu normály, tj. bodu $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$, umožňuje napsat např. kanonickou rovnici normálové přímky:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{2}.$$

□

Kromě určení tečné roviny je dalším možným využitím diferenciálu přibližný výpočet funkční hodnoty $f(b)$ funkce více proměnných $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $b = [b_1, \dots, b_n]$, který je „blízko“ bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$, jehož funkční hodnotu známe přesně. Platí totiž

$$f(b) \doteq f(a) + df(a). \quad (1.2)$$

Rozepsáním tohoto vztahu a dosazením $dx_i = b_i - a_i$ dostáváme podrobný vzorec na přibližný výpočet funkční hodnoty $f(b)$, tj.

$$f(b) \doteq f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n) dx_i = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n) (b_i - a_i).$$

Příklad 1.51. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{(1,05)^2 + (3,97)^2 + (8,02)^2}$.

Řešení. K výpočtu využijeme diferenciál funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodě $[1, 4, 8]$ s přírůstky $dx = 0,05$, $dy = -0,03$ a $dz = 0,02$. Platí

$$df(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz$$

a odtud

$$df(1, 4, 8) = \frac{1}{9} dx + \frac{4}{9} dy + \frac{8}{9} dz = \frac{1 \cdot 0,05 - 4 \cdot 0,03 + 8 \cdot 0,02}{9} = 0,01.$$

Podle (1.2) dostáváme

$$\sqrt{(1,05)^2 + (3,97)^2 + (8,02)^2} = f(1,05; 3,97; 8,02) \doteq f(1, 4, 8) + df(1, 4, 8) = 9,01,$$

což se od přesné hodnoty 9,0102053... liší až v řádech 10^{-4} . □

1.7 Funkce zadané implicitně

1.7.1 Funkce jedné proměnné zadaná implicitně

Uvažujme funkci dvou proměnných $F(x, y)$. Množinou M , definovanou jako

$$M = \{[x, y] \in D(F) \mid F(x, y) = 0\},$$

rozumíme křivku v rovině \mathbb{R}^2 . Například pro $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ je křivka M jednotková kružnice se středem v počátku.

Důležitou vlastností křivky M je, že v okolí nějakého bodu $[x_0, y_0] \in M$ (ne nutně každého) může definovat funkci jedné proměnné. S touto situací se budeme setkávat při řešení některých typů diferenciálních rovnic (viz Kapitola 2), kdy řešením dané diferenciální rovnice bude nejčastěji právě tzv. integrální křivka neboli funkce zadaná implicitně. Naším úkolem bude zjistit vlastnosti této funkce v okolí bodu $[x_0, y_0]$, zejména pak derivaci této funkce v bodě $[x_0, y_0]$.

Pozorného čtenáře jistě napadne, že v případě, kdy lze proměnnou y vyjádřit z rovnice $F(x, y) = 0$, můžeme tento problém řešit klasickou derivací funkce jedné proměnné. To může například nastat, když je křivka M přímo grafem funkce jedné proměnné $y = f(x)$, tj. pokud ji můžeme zapsat ve tvaru $F(x, y) = y - f(x) = 0$. Derivaci v libovolném bodě křivky M pak určíme pomocí derivace $f'(x)$. I v případě jednotkové kružnice můžeme derivaci v libovolném jejím bodě $[x, y] \neq [\pm 1, 0]$ spočítat jako derivaci funkce

$$f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

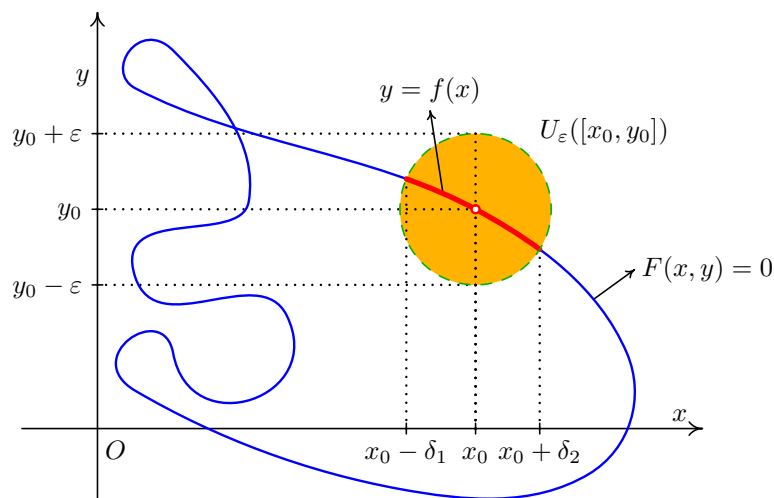
Stačí si při derivování funkce f vybrat „správnou“, tj. kladnou či zápornou, větev funkce f podle toho, zda bod $[x, y]$ leží nad či pod osou x . Poznamenejme, že pro body $[\pm 1, 0]$, jak se lze snadno přesvědčit, není (vlastní) derivace f' (a tudíž ani derivace křivky) definovaná.

Výše uvedený postup ovšem selhává, pokud je křivka M komplikovanější a nelze z ní rozumně proměnnou y vyjádřit. Například pro $x^y + y^x + x^3 + y^3 = 0$ toto vyjádření nelze provést. Naším cílem bude vytvořit aparát, který nám umožní tuto nesnáz řešit. Přitom důležitým požadavkem pro nás bude, aby rovnice $F(x, y) = 0$ a bod $[x_0, y_0]$, který ji vyhovuje, určily v jeho okolí (implicitně) maximálně jednu funkci.

Definice 1.52. Nechť $F(x, y)$ je funkce dvou proměnných. Označme

$$M = \{[x, y] \in D(F) \mid F(x, y) = 0\}$$

a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Jestliže existují čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ a okolí $U_\varepsilon([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$ tak, že množina $M \cap U_\varepsilon([x_0, y_0])$ je totožná s grafem funkce $y = f(x)$ definované na intervalu $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$, řekneme, že $y = f(x)$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ **funkce zadaná implicitně** rovnicí $F(x, y) = 0$.



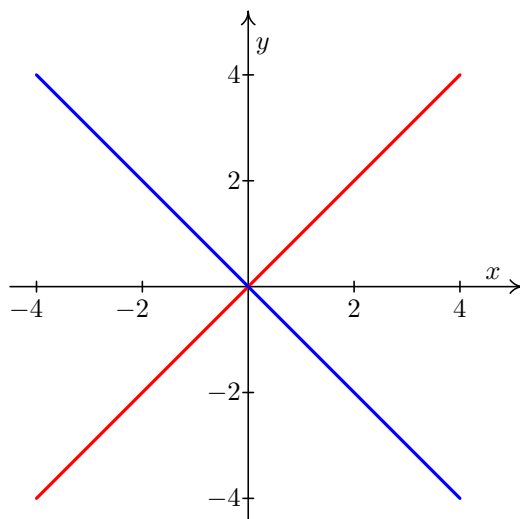
Obr. 1.7: Funkce zadaná implicitně.

Příklad 1.53. Uvažujme křivku

$$F(x, y) = x^2 - y^2 = 0,$$

tj. dvojice přímek, viz Obrázek 1.8.

Z obrázku je patrné, že v libovolném okolí bodu $[x_0, y_0]$ křivky F s výjimkou počátku



Obr. 1.8: Křivka $x^2 - y^2 = 0$.

$[0, 0]$ je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně určena funkce $y = x$ nebo funkce $y = -x$. Naopak v okolí bodu $[0, 0]$ není rovnicí $F(x, y) = 0$ určena žádná funkce.

V následující větě je uvedena postačující podmínka pro existenci funkce zadané implicitně v okolí daného bodu křivky a podmínka pro existenci derivace v tomto bodě.

Věta 1.54. *Nechť $F(x_0, y_0) = 0$ a nechť je funkce $F(x, y)$ spojitá v nějakém okolí $U([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$. Předpokládejme, že funkce F má v tomto okolí spojitou parciální derivaci $F'_y(x, y)$ a platí $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Potom existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně zadaná právě jedna funkce $y = f(x)$, která je navíc v tomto okolí spojitá.*

Má-li navíc funkce F v bodě $[x_0, y_0]$ spojitou parciální derivaci F'_x , má implicitně určená funkce f v bodě x_0 derivaci a platí

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \quad (1.3)$$

Vzorec (1.3) lze odvodit pomocí derivace složené funkce. Rovnici $F(x, y) = 0$ derivujeme podle proměnné x , kde výraz s y bereme jako složenou funkci s vnitřní složkou $y(x)$. Poté vyjádříme y' , kde $y' = f'$. Na následujícím příkladě si ukážeme výpočet derivace $f'(x_0)$ tímto postupem a zároveň porovnáme s přímým dosazením do vzorce (1.3).

Příklad 1.55. Určete derivaci funkce $y = f(x)$ v bodě $[1, 1]$ zadanou implicitně rovnicí $xy + y^3 - 2x^2 = 0$.

Řešení. (i) *Pomocí derivace složené funkce*

Derivací výše uvedené rovnice, kde proměnnou y , bereme jako funkci $y(x)$ proměnné x dostáváme

$$1y + xy' + 3y^2y' - 4x = 0$$

a odtud

$$y' = \frac{4x - y}{x + 3y^2}.$$

Po dosazení bodu $[1, 1]$ dostaneme $y'(1) = f'(1) = \frac{3}{4}$.

(ii) *Přímé použití vzorce (1.3)*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{y - 4x}{x + 3y^2},$$

což je ekvivalentní s předcházejícím způsobem a dostaneme opět $f'(1) = \frac{3}{4}$. □

Příklad 1.56. Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení. Označme $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Potom platí $F'_y(x, y) = 3y^2 - 2x$, $F'_y(1, 1) = 1 \neq 0$. Jsou tedy splněny předpoklady Věty 1.54 a rovnice $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ zadává v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně funkci $y = f(x)$. Pro její derivaci v bodě $x = 1$ dostáváme

$$f'(1) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x} \Big|_{[x, y] = [1, 1]} = -1.$$

Rovnice tečny t je $y - 1 = -(x - 1) \implies x + y - 2 = 0$. Normála n , jakožto přímka kolmá k tečně, má směrnici $k = 1$ a její rovnice je $y - 1 = x - 1 \implies x - y = 0$. □

1.7.2 Funkce dvou proměnných zadaná implicitně

V následujícím odstavci rozšíříme naše úvahy o implicitně zadaných funkcích na funkce více proměnných. Pro jednoduchost se omezíme pouze na funkce dvou proměnných (ty se vyskytují v našich aplikacích nejčastěji). Analogické rozšíření lze však udělat i pro funkce tří a více proměnných - to však ponecháme čtenáři k samostatné úvaze.

Podobně jako jsme u funkce jedné proměnné uvažovali rovnici $F(x, y) = 0$, která nám v okolí bodu $[x_0, y_0]$ roviny \mathbb{R}^2 definovala implicitně funkci $y = f(x)$, můžeme uvažovat rovnici $F(x, y, z) = 0$, která nám v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ prostoru \mathbb{R}^3 definuje implicitně funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$.

Definice 1.57. Nechť $F(x, y, z)$ je funkce tří proměnných. Označme

$$M = \{[x, y, z] \in D(F) \mid F(x, y, z) = 0\}$$

a nechť $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Jestliže existuje množina $A \subset \mathbb{R}^2$ s vnitřním bodem $[x_0, y_0]$ a okolí $U_\varepsilon([x_0, y_0, z_0])$ bodu $[x_0, y_0, z_0]$ tak, že množina $M \cap U_\varepsilon([x_0, y_0, z_0])$ je totožná s grafem

funkce $z = f(x, y)$ definované na množině A , řekneme, že $z = f(x, y)$ je v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ **funkce dvou proměnných zadaná implicitně** rovnicí $F(x, y, z) = 0$.

Následující věta je analogií Věty 1.54 a uvádí postačující podmínku pro existenci funkce zadané implicitně a podmínku pro existenci jejích parciálních derivací v daném bodě.

Věta 1.58. *Nechť $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a necht' je funkce $F(x, y, z)$ spojitá v nějakém okolí $U([x_0, y_0, z_0])$ bodu $[x_0, y_0, z_0]$. Předpokládejme, že funkce F má v tomto okolí spojitou parciální derivaci F'_z a platí $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Potom existuje okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$, v němž je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ implicitně zadaná právě jedna spojitá funkce $z = f(x, y)$.*

Má-li navíc funkce F v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ spojitě parciální derivace F'_x a F'_y , má implicitně určená funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivace a platí

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \quad a \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (1.4)$$

Příklad 1.59. Určete parciální derivaci f'_x funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[1, 1, 1]$ zadanou implicitně rovnicí $x^2 - y^3 - z^4 + xyz = 0$. Použijte jak vzorec (1.4), tak postup derivování celé rovnice podle proměnné x .

Řešení. (i) *Přímé užití vzorce (1.4)*

Přímým užitím vzorce (1.4) dostaneme

$$f'_x(1, 1) = -\frac{F'_x(1, 1, 1)}{F'_z(1, 1, 1)} = -\frac{2x + yz}{-4z^3 + xy} \Big|_{[x, y, z] = [1, 1, 1]} = 1.$$

(ii) *Pomocí derivace rovnice podle proměnné x*

Při postupu derivování zadané rovnice podle x chápeme výrazy s proměnnou z jako funkce proměnné x, y a celou rovnici můžeme zapsat jako

$$x^2 - y^3 - [z(x, y)]^4 + xyz(x, y) = 0.$$

Derivací rovnice podle x dostaneme $2x - 4z^3 z'_x + y(1z + xz'_x) = 0$ a odtud

$$z'_x = \frac{-2x - yz}{xy - 4z^3},$$

což je ekvivalentní s předcházejícím způsobem a dostaneme opět $f'_x(1, 1) = 1$. □

Při určování tečné roviny k funkci $f(x, y)$ dané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$ lze postupovat dvojím způsobem. Buď „klasicky“ výpočtem derivací funkce f v bodě T a užitím vzorce (1.1), nebo lépe pomocí vzorce uvedeném v následující větě.

Věta 1.60. *Nechť $F(x, y, z) = 0$ zadává v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ funkci $z = f(x, y)$ implicitně a necht' existuje tečná rovina v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$. Potom pro její rovnici platí*

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (1.5)$$

Důkaz. Připomeňme, že normálový vektor \vec{n} roviny $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, tj. vektor kolmý na rovinu α , je tvaru $\vec{n} = (a, b, c)$. Normálový vektor plochy $F(x, y, z) = 0$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ je kolmý na tečnou rovinu plochy F v tomto bodě a udává směr ve kterém funkce F v tomto bodě nejrychleji roste, tj. její gradient. Odtud tečná rovina k ploše $F(x, y, z) = 0$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ je určena rovnicí

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)x + F'_y(x_0, y_0, z_0)y + F'_z(x_0, y_0, z_0)z + d = 0. \quad (1.6)$$

Dosazením bodu $[x_0, y_0, z_0]$ do (1.6), který této rovnici vyhovuje, dopočítáme koeficient

$$d = -F'_x(x_0, y_0, z_0)x_0 - F'_y(x_0, y_0, z_0)y_0 - F'_z(x_0, y_0, z_0)z_0.$$

Zpětným dosazením koeficientu d do (1.6) a úpravou dostáváme vzorec (1.5). \square

Příklad 1.61. Určete tečnou rovinu k funkci $f(x, y)$ v bodě $T = [1, 0, 1]$ zadanou implicitně rovnicí $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$.

Řešení. Určíme $F'_x = 3x^2 - 3yz - 1$ a odtud $F'_x(1, 0, 1) = 2$, dále $F'_y = 3y^2 - 3xz - 1$ a odtud $F'_y(1, 0, 1) = -4$ a nakonec $F'_z = 3z^2 - 3xy - 1$ a odtud $F'_z(1, 0, 1) = 2$. Použijeme vzorec (1.5) a dostaneme $2(x - 1) - 4y + 2(z - 1) = 0$ a po úpravě $x - 2y + z - 2 = 0$. \square

1.8 Příklady na procvičení

Cvičení

1. Určete a v \mathbb{R}^2 zobrazte definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - \ln(|x| + |y|)}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.
2. Určete vrstevnici funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}$ procházející bodem $a = [2, 5]$ a tuto vrstevnici načrtněte. Dále vypočítejte gradient této funkce v bodě a a rozhodněte o vzájemné poloze tohoto gradientu a vrstevnice.
3. U množiny $A = \langle -1, 0 \rangle \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{(2, 3) \cap \mathbb{Q}\}$ určete její vnitřek, uzávěr, hranici a všechny její hromadné a izolované body.
4. Rozhodněte o spojitosti funkce f v bodě $[0, 0]$, pokud

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

5. Určete limitu

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [\infty, \infty]} \frac{x - y}{x^2 - xy + y^2}.$$

6. Najděte všechny parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} - x) - \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$.
7. Určete diferenciál funkce $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ v bodě $[x_0, y_0] = [\sqrt{3}, 1]$.
8. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$ v bodě $[1, 1, ?]$.

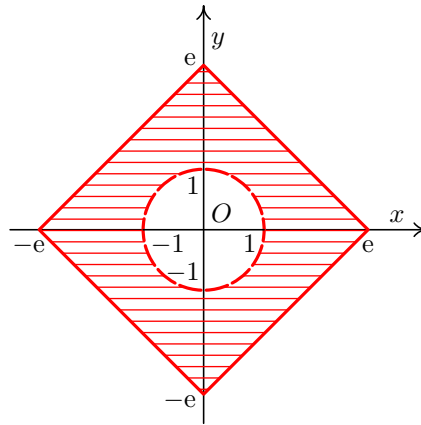
9. Ukažte, že funkce zadaná implicitně rovnicí $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$ a bodem $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ má v tomto bodě lokální maximum.

10. Najděte všechny parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $z = f(x, y)$ dané implicitně rovnicí

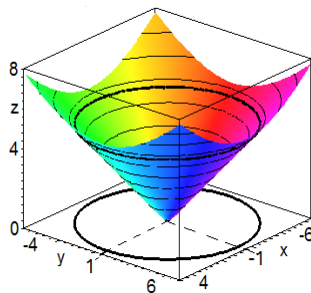
$$x + y + z = e^{-(x+y+z)}.$$

Výsledky

1. Definičním oborem je množina $D(f) = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 > 1, -e \leq x \leq e, |x| - e \leq y \leq e - |x|\}$.



2. Vrstevnice je dána rovnicí $f(2, 5) = 5 = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}$, tj. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$, což je rovnice kružnice se středem $S = [-1, 1]$ o poloměru $r = 5$. Gradient $\text{grad } f(2, 5) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ je kolmý na vrstevnici v bodě a .



3. $A^\circ = (-1, 0)$, $\bar{A} = \langle -1, 0 \rangle \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty \cup \langle 2, 3 \rangle$, $\partial A = \{-1\} \cup \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty \cup \langle 2, 3 \rangle$, $A' = \langle -1, 0 \rangle \cup \{(2, 3) \cap \mathbb{Q}\}$, množina všech izolovaných bodů množiny A je $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty$.

4. Funkce není spojitá v bodě $[0, 0]$, protože $f(0, 0) = 1$ a $\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} f(x, y) = 0$, což lze ověřit např. transformací funkce f do polárních souřadnic.

5. Limita je nulová, což lze ověřit např. transformací výrazu do polárních souřadnic a provedením limitního přechodu pro $r \rightarrow \infty$, kde $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

6. Parciální derivace 1. řádu jsou

$$z'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Parciální derivace 2. řádu jsou

$$z''_{xx} = \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{2y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad z''_{yy} = -\frac{2x(x^2 + 2y^2)}{y^2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

7. Dosazením do výrazu $dz(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0)dx + z'_y(x_0, y_0)dy$ dostaneme

$$dz(\sqrt{3}, 1) = \frac{1}{4}dx + \frac{1}{2}dy.$$

8. Dopočítáním souřadnice $z_0 = f(1, 1) = 4$ a dosazením do vzorce pro tečnou rovinu dostáváme

$$3x + 5y - z - 4 = 0.$$

9. Pro funkci $F(x, y) = 4x^4 - 4x^2 + y^2$ platí vztahy $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 0$, $F'_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 2 \neq 0$, které zaručí existenci funkce dané implicitně. Dále

$$y' = \frac{8x - 16x^3}{2y} \quad \text{a} \quad y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Opakovaným derivováním, kde y bereme jako funkci $y(x)$, dostáváme

$$y'' = \frac{(8 - 48x^2)2y - (8x - 16x^3)2y'}{4y^2} \quad \text{a} \quad y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -8 < 0,$$

z čehož plyne, že v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ je lokální maximum.

10. Použitím vzorce pro derivaci funkce dané implicitně dostáváme $z'_x = z'_y = -1$ a odtud pro druhé parciální derivace platí $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yx} = z''_{yy} = 0$.

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Výpočet parciálních derivací funkce více proměnných.](#)
2. [Určení tečné roviny k funkci dvou proměnných.](#)

2 Obyčejné diferenciální rovnice

2.1 Základní pojmy

Ze střední školy je všem dobře znám pojem *rovnice*. Rovnicí se zde rozumí tzv. *algebraická rovnice*, tj. rovnice, jejíž koeficienty i řešení jsou *čísla*. Na komplexní popis fyzikálních jevů však algebraické rovnice nestačí.

Definice 2.1. Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu nazýváme rovnicí, v níž se vyskytuje neznámá funkce jedné proměnné a její derivace až do řádu n . Zapisujeme ji obecně ve tvaru

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

kde F je funkce $n + 2$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Tento tvar rovnice nazýváme **nerozřešený vzhladem k nejvyšší derivaci** neboli **implicitní**.

Speciálním případem rovnice (2.1) je rovnice, která se dá zapsat ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.2)$$

kde f je funkce $n + 1$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Tento tvar rovnice nazýváme **rozřešený vzhladem k nejvyšší derivaci** neboli **explicitní**.

Příklad 2.2. Příklady obyčejných diferenciálních rovnic různých řádů, které se dají zapsat ve tvaru (2.2):

- (i) $y' + 2y = \cos x$ je obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu,
- (ii) $y'' + y^4 y' + 3y = x$ je obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu,
- (iii) $3y^{(8)} + \sin xy''' + 5 \ln xy'' - y^{10} y' = 0$ je obyčejnou diferenciální rovnicí osmého řádu.

Pojem *řešení* diferenciální rovnice má na rozdíl od algebraických rovnic několik významů.

Příklad 2.3. Mějme danu rovnici $y' = y$. Je zřejmé, že funkcí, která se rovná své první derivaci, je funkce $y = e^x$. Není však jediná, tutéž vlastnost má funkce $y = 2e^x$, $y = 3e^x$, resp. libovolná funkce $y = ce^x$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Definice 2.4. **Řešením** obyčejné diferenciální rovnice řádu n na intervalu I nazýváme každou n -krát diferencovatelnou funkci na intervalu I , která vyhovuje dané rovnici. **Obecným řešením** obyčejné diferenciální rovnice rozumíme obecný předpis závisící na n různých parametrech c_1, c_2, \dots, c_n , $[c_1, c_2, \dots, c_n] \in M \subseteq \mathbb{R}^n$, kde libovolnou volbou těchto parametrů dostaneme konkrétní řešení, které nazýváme **partikulárním (částečným) řešením**.

Poznámka 2.5. Některá řešení diferenciálních rovnic řádu n nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant c_1, c_2, \dots, c_n . Taková řešení, která se vyskytují pouze u některých rovnic, popř. v některých bodech definičního oboru dané rovnice, označujeme jako **singulární (výjimečná)**. Se všemi typy řešení se setkáme později u konkrétních příkladech.

Ne vždy se řešení diferenciální rovnice podaří vyjádřit ve tvaru $y = f(x)$, tj. v **explicitním tvaru**. Často řešení $y(x)$ dostaneme ve tvaru $F(x, y) = 0$, tj. v tzv. **implicitním tvaru**.

Příklad 2.6. Rozhodněte, zda funkce $y(x)$ vyjádřená implicitně rovnicí

$$x^2 - xy + y^2 + x - y = 1$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y - 2x - 1}{2y - x - 1}.$$

Řešení. Při ověřování musíme derivovat funkci $y(x)$ jako funkci zadanou implicitně, viz Odstavec 1.7.1. Dostaneme

$$2x - y - xy' + 2yy' + 1 - y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - 2x - 1}{2y - x - 1},$$

což vyhovuje dané rovnici. □

V případě, že na obecné řešení nějaké obyčejné diferenciální rovnice klademe další konkrétní podmínky, pak dostáváme následující pojem.

Definice 2.7. Úlohu najít řešení $y(x)$ diferenciální rovnice (2.1) definované na intervalu I a splňující podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad x_0 \in I \quad (2.3)$$

nazýváme **počáteční (Cauchyho) úlohou** nebo **počátečním (Cauchyho) problémem**. Podmínky (2.3) se nazývají **počáteční podmínky**.

Příklad 2.8. Ověřte, že funkce $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + \frac{1}{3} x e^x$ je obecné řešení rovnice $y'' + y' - 2y = e^x$. Určete konstanty c_1 a c_2 tak, aby byly splněny počáteční podmínky $y(0) = 4$, $y'(0) = \frac{4}{3}$.

Řešení. Dvojím zderivováním funkce y a dosazením do diferenciální rovnice snadno ověříme, že y je jejím řešením. Má-li platit $y(0) = 4$, musí být

$$y(0) = c_1 e^{-2 \cdot 0} + c_2 e^0 + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 4.$$

Má-li platit $y'(0) = \frac{4}{3}$, je třeba dosadit do derivace y a opět porovnat. Dostáváme

$$y'(0) = -2c_1 e^{-2 \cdot 0} + c_2 e^0 + \frac{1}{3} e^0 + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = \frac{4}{3}.$$

Po úpravě výše uvedených rovnic dostáváme, že hledané konstanty c_1, c_2 jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 4, \\ -2c_1 + c_2 + \frac{1}{3} &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Odtud $c_1 = 1, c_2 = 3$ a řešení zadané počáteční úlohy je tedy $y = e^{-2x} + 3e^x + \frac{1}{3}xe^x$. \square

Na následujícím praktickém příkladě ukážeme, jak lze pro konkrétní problém sestavit obecnou diferenciální rovnici a specifikovat její konkrétní řešení.

Příklad 2.9. Je dán elektrický RL obvod s cívkou o indukci L , ohmickým odporem R a konstantním napětím U . Popište průběh proudu i v závislosti na čase t .

Řešení. Podle prvního Kirchhoffova zákona je součet všech elektromotorických sil v uzavřeném obvodu roven nule a hledaná funkce $i(t)$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$Li'(t) + Ri(t) = U.$$

Řešení výše uvedené rovnice (získané postupem, který uvedeme v dalším odstavci této kapitoly) je

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R},$$

kde proud i je funkcí času t a $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Tato závislost i na t představuje obecné řešení (tj. popis obecné situace) dané diferenciální rovnice.

Počáteční velikost proudu bývá obvykle známa. V čase $t = 0$ je proud obvykle nulový. Tato podmínka říká, že máme najít funkci $i(t)$ v situaci, kdy $i(0) = 0$. Dosazením zjistíme, že v tomto případě $c = -\frac{U}{R}$, tj. hledaná závislost i na t je potom

$$i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

a představuje *partikulární řešení* zadané diferenciální rovnice. \square

Úloha „Najděte řešení diferenciální rovnice (resp. počáteční úlohy)“ není obecně řešitelná. V teorii obyčejných diferenciálních rovnic se proto zavádí poměrně podrobná klasifikace typů diferenciálních rovnic. Postup hledání řešení dané rovnice pak závisí na

tom, jakého konkrétního typu daná rovnice je. Řešit přitom umíme jen rovnice některých typů. S těmi nejzákladnějšími se seznámíme v dalších odstavcích této kapitoly.

V případě, že je nalezení řešení nějaké počáteční úlohy obtížné nebo nemožné, můžeme přibližné řešení nalézt pomocí numerických metod¹. Tímto postupem však nalezneme pouze funkci, která splňuje danou rovnici jen v určitých předem zadaných bodech a v ostatních bodech definičního oboru funkce se funkční hodnoty přesnému řešení pouze blíží.

2.2 Diferenciální rovnice prvního řádu

V tomto odstavci se budeme zabývat nejznámějšími typy diferenciálních rovnic prvního řádu rozřešenými vzhledem k první derivaci².

Definice 2.10. Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ je funkce dvou proměnných. Potom **diferenciální rovnici prvního řádu** (rozřešenou vzhledem k první derivaci) nazýváme rovnici

$$y' = f(x, y). \quad (2.4)$$

Poznamenejme, že z Definice 2.4 vyplývá, že obecné řešení rovnice (2.4) závisí na jedné konstantě c .

Než se vůbec začneme zabývat metodami řešení konkrétních rovnic, tak by nás z praktického hlediska měly zajímat tyto otázky. Má konkrétní zadaná rovnice řešení? Na jaké množině je definováno? Je řešení jejího počátečního problému jednoznačné (tj. existuje právě jedno řešení procházející předem daným bodem)?

Věta 2.11 (O existenci řešení). Necht' $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak pro každé $[x_0, y_0] \in M$ má úloha

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.5)$$

alespoň jedno řešení definované na nějakém otevřeném intervalu (a, b) , $x_0 \in (a, b)$.

Spojitosť tedy zaručuje, že každým bodem oblasti M prochází alespoň jedno řešení. Toto řešení nemusí být jediné, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2.12. Uvažujme počáteční úlohu

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Pak $y = x^2$, $x \geq 0$, je partikulární řešení (vzniklé z obecného řešení $y = (x - c)^2$, $x \geq c$, volbou $c = 0$) a $y = 0$ je singulární řešení, jak se lze snadno přesvědčit dosazením do rovnice.

Existuje řada podmínek, které vedle existence řešení zaručí i jeho jednoznačnost. Nejznámější z nich je tzv. **Lipschitzova podmínka**, kterou uvedeme jako součást následující věty.

¹Budou náplní předmětu *Matematika 3*

²S dalšími typy rovnic prvního řádu se mohou případní zájemci setkat v rámci předmětu MDRE.

Věta 2.13 (O existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a v každém bodě $[x_0, y_0]$ množiny M je splněna Lipschitzova podmínka, tj. existuje $L > 0$ tak, že platí*

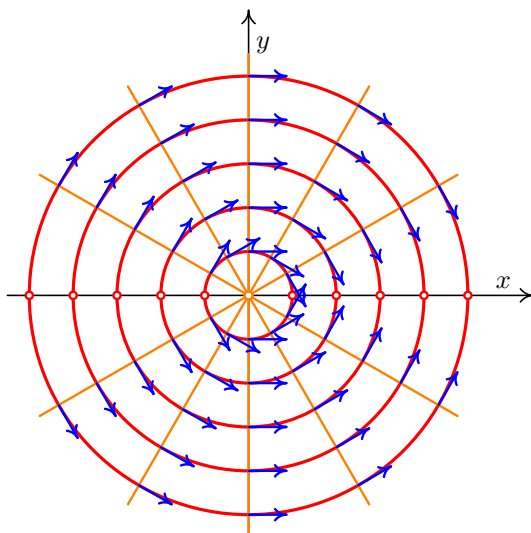
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (2.6)$$

pro každé dva body $[x, y_1], [x, y_2]$ z nějakého okolí bodu $[x_0, y_0]$. Pak pro libovolný bod $[x_0, y_0] \in M$ má úloha (2.5) právě jedno řešení.

Poznamenejme, že Lipschitzova podmínka bude splněna, pokud parciální derivace $f'_y(x, y)$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ bude ohraničená, což platí, pokud je tato derivace v nějakém okolí $[x_0, y_0]$ spojitá.

2.2.1 Geometrická interpretace rovnic prvního řádu

Diferenciální rovnice (2.4) přiřazuje každému bodu $[x, y] \in M$ právě jednu hodnotu $y'(x)$, kterou můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem $[x, y]$. Tuto přímku znázorňujeme krátkou šipkou vedenou z bodu $[x, y]$ doprava ve směru přímky a nazýváme ji **lineárním elementem**. Množinu všech lineárních elementů rovnice (2.4) nazýváme **směrovým polem** rovnice (2.4). Dále **integrální křivkou** rovnice (2.4) budeme rozumět graf nějakého jejího řešení $y(x)$. Ten bude mít tu vlastnost, že jeho tečna v každém jeho bodě $[x, y(x)]$ obsahuje odpovídající lineární element, takže směrové pole dává velmi dobrou představu o integrálních křivkách. Konstrukci směrového pole často usnadní nalezení křivek, v jejichž bodech mají lineární elementy stejný směr. Takovéto křivky nazýváme **izokliny**.



Obr. 2.1: Směrové pole, izokliny a řešení rovnice $y' = -x/y$.

Položíme-li v rovnici (2.4) $f(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$, dostáváme množinu všech izoklin rovnice (2.4) zadanou implicitně. Ve většině jednoduchých příkladů lze z předpisu $f(x, y) = k$ neznámou y či x vyjádřit a izokliny tak určit explicitně. Na Obrázku 2.1 je znázorněno

směrové pole (modře), izokliny (hnědě) a integrální křivky (červeně) rovnice $y' = -x/y$. Snadno lze nahlédnout, že v tomto případě mají izokliny rovnici $x = -ky$, kde $y \neq 0$. Integrální křivky (řešení rovnice) jsou pak půlkružnice $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ a $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$.

2.2.2 Rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými

Definice 2.14. Diferenciální rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými nazýváme rovnicí tvaru

$$y' = f(x)g(y) \quad (2.7)$$

nebo rovnici, která se dá elementárními úpravami na tento tvar upravit.

Postup při řešení rovnice se separovanými proměnnými.

Pokud je rovnice tvaru (2.7) nebo ji lze na tento tvar převést, postupujeme při řešení následovně:

- 1) Výraz y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$.
- 2) Celou rovnicí vynásobíme dx .
- 3) Odseparujeme proměnné, tj. členy, které obsahují y , převedeme na levou stranu rovnice spolu s dy a členy, které obsahují x , převedeme na pravou stranu rovnice spolu s dx .
- 4) Nakonec integrujeme obě strany poslední rovnice zvlášť.

Příklad 2.15. Řešte diferenciální rovnici se separovanými proměnnými $y' = \frac{3x^2 - 2}{y^4}$.

Řešení. Postupujeme podle návodu: 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2}{y^4}$.

$$2) dy = \frac{3x^2 - 2}{y^4} dx.$$

$$3) y^4 dy = (3x^2 - 2) dx.$$

$$4) \int y^4 dy = \int (3x^2 - 2) dx.$$

Integrací poslední rovnice dostaneme $\frac{y^5}{5} + C = x^3 - 2x + K$, kde C a K jsou integrační konstanty. Převedením konstanty C na pravou stranu rovnice dostaneme řešení ve tvaru $\frac{y^5}{5} = x^3 - 2x + K - C$. Označíme-li konstantu $K - C = c$, dostaneme obecné řešení

$$\frac{y^5}{5} = x^3 - 2x + c.$$

Poslední úpravu s konstantami můžeme udělat pokaždé, a proto stačí psát integrační konstantu pouze jednou (obyčejně ji píšeme na pravou stranu rovnice). \square

Řešení, která se dostanou při řešení rovnice se separovanými proměnnými, jsou obvykle v implicitním tvaru, tj. $F(x, y) = 0$. Úpravou se někdy podaří získat explicitní tvar řešení, tj. $y = \varphi(x)$.

Příklad 2.16. Řešte diferenciální rovnici se separovanými proměnnými $y' \cotg x + y = 0$.

Řešení. 1) $\cotg x \frac{dy}{dx} = -y$. 2) $\cotg x dy = -y dx$. 3) $\frac{1}{y} dy = \frac{-\sin x}{\cos x} dx$.

$$4) \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \quad \text{a odtud} \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx.$$

Integrovaním dostaneme

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + C.$$

Získané řešení postupně upravíme na

$$|y| = e^{\ln |\cos x| + C} = e^{\ln |\cos x|} \cdot e^C = e^C |\cos x| \quad \text{a odtud} \quad y = \pm e^C \cos x.$$

Označíme $c = \pm e^C$, tj. $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jelikož jsme při úpravě z kroku 1) na krok 2) dělili celou rovnici výrazem y , je nutné diskutovat případ, že $y = 0$. Jak lze snadno ověřit, $y = 0$ je řešením zadané rovnice a právě připustíme-li $c = 0$ v našem obecném řešení, tak toto partikulární řešení dostaneme. Celkové (obecné) řešení zadané rovnice je tedy ve tvaru

$$y = c \cos x, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

□

Poznámka 2.17. Někdy při hledání řešení rovnice se separovanými proměnnými děláme úpravu, že dělíme celou rovnici výrazem v proměnné y (podobně tomu bylo i v minulém příkladě). Vždy je pak nutné tento výraz položit rovno nule a dořešit vzniklou rovnici. Pokud je jejím řešením konstantní funkce $y = h$, musíme se přesvědčit, zda tato funkce není řešením zadané diferenciální rovnice. Pokud ano, mohou nastat tyto dva případy:

- (i) Řešení $y = h$ je partikulární a tudíž se dá zahrnout do obecného řešení vhodnou volbou konstanty $c \in \mathbb{R}$.
- (ii) Řešení $y = h$ je singulární a tudíž se nedá zahrnout do obecného řešení vhodnou volbou konstanty $c \in \mathbb{R}$.

V případě, že diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je přímo tvaru (2.7), potom kořeny funkce $g(y)$ (tj. konstantní funkce, které řeší rovnici $g(y) = 0$) jsou vždy řešením (partikulárním či singulárním) této diferenciální rovnice, jak se lze snadno přesvědčit dosazením.

Příklad 2.18. Řešte diferenciální rovnici se separovanými proměnnými $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení. Po odseparování a úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrací této rovnice dostaneme obecné řešení

$$\arcsin y = \arcsin x + c,$$

kde c je v tomto případě vhodná (nikoliv libovolná) reálná konstanta. Dále nesmíme zapomenout, že jsme při „odseparovávání“ rovnice provedli úpravu dělení výrazem $\sqrt{1-y^2}$, který je nulový pro $y = \pm 1$. Jelikož funkce $y = 1$ a $y = -1$ jsou řešením zadané rovnice a nedají se zahrnout do obecného řešení, jsou tyto funkce singulárním řešením zadané rovnice. \square

Příklad 2.19. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými s počáteční podmínkou

$$2(x - e^{-x})yy' = 1 + e^{-x}, \quad y(0) = 2.$$

Řešení. 1) $2(x - e^{-x})y \frac{dy}{dx} = 1 + e^{-x}$. 2) $2(x - e^{-x})y dy = (1 + e^{-x}) dx$.

$$3) 2y dy = \frac{1 + e^{-x}}{x - e^{-x}} dx. \quad 4) \int 2y dy = \int \frac{1 + e^{-x}}{x - e^{-x}} dx.$$

Integrovaním dostaneme obecné řešení ve tvaru $y^2 = \ln|x - e^{-x}| + c$. Hledáme partikulární řešení. Dosadíme počáteční podmínku, čímž dostaneme $2^2 = \ln|0 - 1| + c$. Odtud $c = 4$. Partikulární řešení je tedy $y^2 = \ln|x - e^{-x}| + 4$. Po úpravě (s přihlédnutím k podmínce $y(0) = 2$) dostaneme řešení v explicitním tvaru

$$y = \sqrt{\ln|x - e^{-x}| + 4}.$$

\square

2.2.3 Homogenní separovatelné rovnice prvního řádu

Definice 2.20. Homogenní separovatelnou diferenciální rovnicí prvního řádu nazýváme rovnici, která se dá upravit na tvar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.8)$$

Obecně separovatelnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici, která se dá (pomocí konečného počtu substitucí) převést na rovnici se separovanými proměnnými (2.7). To znamená, že rovnice (2.7) i rovnice (2.8) (jak uvidíme za chvíli) jsou speciálními případy separovatelných rovnic.

Postup při řešení homogenní separovatelné rovnice.

Nejprve zavedeme substituci

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Odtud máme

$$y(x) = xu(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = u(x) + xu'(x).$$

Po dosazení do rovnice (2.8) dostaneme (píšeme bez argumentu x)

$$u + xu' = f(u),$$

což je ekvivalentní s rovnicí se separovanými proměnnými

$$u' = \frac{f(u) - u}{x},$$

kteřou již umíme vyřešit. Po vyřešení se vrátíme zpět k původní neznámé $y(x)$.

Příklad 2.21. Řešte homogenní separovatelnou diferenciální rovnici $y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$.

Řešení. Provedeme výše uvedenou substituci a dostaneme rovnici

$$u + xu' = u(1 + \ln u),$$

což je ekvivalentní po úpravě s rovnicí

$$u' = \frac{u \ln u}{x}.$$

Po odseparování rovnice dostaneme

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}.$$

Poznamenejme, že $u = 0$, resp. $y = 0$ nevyhovuje zadané rovnici. Naopak $u = 1$, resp. $y = x$ rovnici vyhovuje. Po integraci (na levé straně rovnice lze volit např. substituci $t = \ln u$) dostaneme

$$\ln |\ln u| = \ln |x| + C,$$

kde dalšími úpravami a zpětnou substitucí za $u = \frac{y}{x}$ můžeme vyjádřit explicitně řešení y jako

$$y = xe^{cx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si, že řešení $y = x$ je partikulární a je zahrnuto v obecném volbou $c = 0$. \square

Poznámka 2.22. Poznamenejme, že podobným způsobem, tj. převodem na rovnice se separovanými proměnnými, se dají řešit i další typy separovatelných rovnic tvaru $y' = f(x, y)$, kde v předpisu pro funkci f jsou její proměnné x a $y(x)$ určitým způsobem „svázány“. Jako příklad uveďme rovnici $y' = f(ax + by + c)$, která se dá řešit substitucí $u = ax + by + c$.

2.2.4 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 2.23. Lineární diferenciální rovnici prvního řádu nazýváme rovnicí tvaru

$$y' + f(x)y = g(x). \quad (2.9)$$

Pokud je $g(x) \not\equiv 0$, nazýváme tuto rovnici **nehomogenní**. Pokud položíme $g(x) \equiv 0$, dostaneme rovnici $y' + f(x)y = 0$, kterou nazýváme **homogenní** neboli **přidruženou homogenní rovnicí** k rovnici (2.9).

Nejprve poznamenejme, že homogenní lineární rovnice je zároveň rovnicí se separovanými proměnnými a její řešení umíme nalézt. V tomto odstavci budeme toto obecné homogenní řešení značit y_h . Nejčastěji používanou metodou pro nalezení nehomogenního řešení rovnice (2.9), je tzv. **metoda variace konstanty**.

Postup při řešení lineární rovnice metodou variace konstanty.

Nejprve metodou separace proměnných najdeme obecné řešení y_h odpovídající homogenní rovnice

$$y' + f(x)y = 0.$$

Toto řešení se upraví na tvar $y_h = cF(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Obecné řešení lineární rovnice (2.9) je pak ve tvaru

$$y = c(x)F(x), \quad (2.10)$$

kde $c(x)$ je neznámá funkce. Nakonec je ještě nutné předpokládaný tvar řešení (2.10) dosadit do diferenciální rovnice (2.9) a určit $c(x)$. Pokud jsme postupovali správně, vyjde nám po dosazení a upravení rovnice typu $c'(x) = h(x)$ a odtud již snadno integrací funkce $h(x)$ dopočítáme neznámou funkci $c(x)$.

Příklad 2.24. Řešte lineární diferenciální rovnici $y' - 5x^4y = e^{x^5}$.

Řešení. Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici $y' - 5x^4y = 0$:

$$y' = 5x^4y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 5x^4y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = 5x^4dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int 5x^4dx.$$

Integrací poslední rovnice dostaneme $\ln|y| = x^5 + C$. Potřebujeme vyjádřit y , a proto musíme dále upravovat:

$$|y| = e^{x^5+C} \Leftrightarrow |y| = e^{x^5}e^C \Leftrightarrow y = ce^{x^5},$$

kde $c = \pm e^C \cup \{0\}$, tedy $c \in \mathbb{R}$. Nulu můžeme do konstanty c zahrnout, neboť $y = 0$ je řešením homogenní rovnice. Našli jsme tedy obecné řešení

$$y_h = ce^{x^5}, \quad c \in \mathbb{R},$$

lineární homogenní rovnice $y' - 5x^4y = 0$. Obecné řešení lineární nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru

$$y = c(x)e^{x^5}.$$

Abychom mohli určit $c(x)$, musíme dosadit y do zadané diferenciální rovnice, a k tomu musíme nejdřív y derivovat.

$$y = c(x)e^{x^5} \quad \Rightarrow \quad y' = c'(x)e^{x^5} + c(x)e^{x^5} 5x^4.$$

Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme podmínku pro $c'(x)$:

$$c'(x)e^{x^5} + c(x)e^{x^5} 5x^4 - 5x^4 c(x)e^{x^5} = e^{x^5},$$

což je ekvivalentní s $c'(x) = 1$. Z toho integrováním dostaneme, že $c(x) = \int 1 dx = x + c$. Zbývá už jenom dosadit za $c(x)$. Hledané obecné řešení bude

$$y = c(x)e^{x^5} = (x + c)e^{x^5}.$$

□

Příklad 2.25. Řešte lineární diferenciální rovnici $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 3x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 4$.

Řešení. a) *Hledání homogenního řešení:*

$$y' = -\frac{xy}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Odtud integrováním dostaneme $\ln |y| = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \ln \left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \right] + C$, tedy

$$y_h = c(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) *Variace konstanty:*

$$y = c(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = c'(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - c(x)x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Po dosazení do zadané diferenciální rovnice a úpravě:

$$c'(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 3x \quad \Leftrightarrow \quad c'(x) = 3x\sqrt{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad c(x) = \int 3x\sqrt{1+x^2} dx.$$

Substituce $1+x^2 = t^2$ vede na

$$c(x) = \sqrt{(1+x^2)^3} + c.$$

c) *Obecné řešení dané rovnice:*

$$y = 1+x^2 + \frac{c}{\sqrt{1+x^2}}.$$

d) *Partikulární řešení dané rovnice:*

Dosadíme počáteční podmínku: $4 = y(0) = 1 + c$. Z toho $c = 3$ a hledané partikulární řešení bude

$$y = 1+x^2 + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}.$$

□

Řešení lineární rovnice pomocí vzorce obsahující integrační faktor.

Jiný způsob, jak lze určit řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu, je přímé použití vzorce využívající tzv. **integrační faktor**, tj. výraz

$$e^{\int f(x)dx}. \quad (2.11)$$

Ten je chápán jako funkce proměnné x bez aditivní konstanty, resp. tato konstanta je zde nulová.

Věta 2.26. *Nechť funkce f a g jsou spojité na otevřeném intervalu I . Pak obecné řešení lineární diferenciální rovnice (2.9) na I závisící na jedné konstantě c je tvaru*

$$y(x, c) = e^{-\int f(x)dx} \left[\int \left(g(x) e^{\int f(x)dx} \right) dx + c \right], \quad (2.12)$$

kde každý integrál chápeme jako funkci proměnné x bez aditivní konstanty.

Důkaz. Vynásobíme-li rovnici (2.9) integračním faktorem (2.11). Dostaneme

$$y' e^{\int f(x)dx} + f(x) e^{\int f(x)dx} y = g(x) e^{\int f(x)dx},$$

což je ekvivalentní s

$$\left(y e^{\int f(x)dx} \right)' = g(x) e^{\int f(x)dx}$$

a odtud

$$y e^{\int f(x)dx} = \int \left(g(x) e^{\int f(x)dx} \right) dx + c.$$

Vyjádříme-li y , dostaneme

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left[\int \left(g(x) e^{\int f(x)dx} \right) dx + c \right],$$

což odpovídá vzorci (2.12). □

Důsledek 2.27. *Nechť $\phi(x, t)$ je tzv. **váhová funkce** definovaná vztahem*

$$\phi(x, t) = e^{\int_x^t f(s)ds}.$$

Dále nechť funkce f a g jsou spojité na otevřeném intervalu I . Potom má rovnice (2.9) s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, na I partikulární řešení

$$y(x) = y_0 \phi(x, x_0) + \int_{x_0}^x g(t) \phi(x, t) dt.$$

Poznámka 2.28. Na závěr poznamenejme, že lineární diferenciální rovnice (ať už prvního nebo n -tého řádu, jež budeme studovat v dalším odstavci) neobsahují (na rozdíl od separovatelných rovnic) singulární řešení, tedy každé jejich řešení se dá zahrnout do obecného. Navíc se dá vyjádřit explicitně.

2.3 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Velmi důležitým typem obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů jsou *lineární diferenciální rovnice*.

Definice 2.29. *Lineární diferenciální rovnici n -tého řádu nazýváme rovnicí*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (2.13)$$

kde $a_0(x), \dots, a_n(x)$ a $f(x)$ jsou funkce, $a_n(x) \neq 0$. Pokud je $f(x) \not\equiv 0$, nazýváme tuto rovnici **nehomogenní**. Pokud položíme $f(x) \equiv 0$, dostaneme rovnici

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (2.14)$$

kteřou nazýváme **homogenní** neboli **přidruženou homogenní rovnicí** k rovnici (2.13).

Příklad 2.30. Příklady lineárních diferenciálních rovnic různých řádů:

(i) $y''' + \sqrt{x}y'' - e^x y' + 5x^2 y = \ln x$ (nehomogenní 4. řádu),

(ii) $5y^{(8)} + \sin x y''' + 2x y'' - 3y = 0$ (homogenní 8. řádu).

Příklad 2.31. Příklad zadání lineární diferenciální rovnice a Cauchyho počáteční úlohy: Najděte řešení rovnice $y''' + 2y'' + y' = -2xe^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Řešením Cauchyho počáteční úlohy (Definice 2.7), může být v případě lineárních rovnic pouze partikulární řešení zadané diferenciální rovnice. Jiná řešení, např. singulární, tato rovnice neobsahuje, viz Poznámka 2.28. Je ovšem otázkou, zda toto partikulární řešení vůbec existuje, resp. pokud ano, zda je určeno jednoznačně. Tento problém částečně řeší následující věta.

Věta 2.32. *Nechť funkce $a_0(x), \dots, a_n(x)$ a $f(x)$ jsou spojité na intervalu I . Pak má počáteční úloha daná rovnicí (2.13) a podmínkami (2.3) pro libovolné $x_0 \in I$ právě jedno řešení $y(x)$. Toto řešení existuje na celém intervalu I .*

Následující věta, v literatuře často nazývána jako **princip superpozice**, popisuje základní vlastnosti a vztahy mezi řešeními homogenní a nehomogenní rovnice (2.14) a (2.13).

Věta 2.33 (Princip superpozice). *Pro řešení rovnic (2.14) a (2.13) platí následující tvrzení.*

(i) *Nechť y_1 a y_2 jsou řešeními homogenní rovnice (2.14) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ je řešením (2.14).*

(ii) *Nechť y_1 a y_2 jsou řešeními nehomogenní rovnice (2.13). Potom funkce $y = y_1 - y_2$ je řešením homogenní rovnice (2.14).*

Důkaz. Uvedené vlastnosti jsou přímým důsledkem linearity operace derivace, tj. platnosti vztahu $(c_1y_1 + c_2y_2)' = c_1y_1' + c_2y_2'$ pro libovolné diferencovatelné funkce y_1 a y_2 a konstanty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Označme levou stranu rovnice (2.13) pomocí operátoru $L[y]$. Ten každé n -krát diferencovatelné funkci y přiřadí, dosazením y do levé strany této rovnice, konkrétní funkci. Snadno se můžeme přímým výpočtem přesvědčit, že uvedená linearita operace derivace se přenese i na tento (lineární) operátor L , tedy bude platit:

$$\begin{aligned} L[y_1] = 0 = L[y_2] &\Rightarrow L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \\ L[y_1] = f(x) = L[y_2] &\Rightarrow L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = f(x) - f(x) = 0, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. \square

Než zformulujeme větu pro obecné řešení nehomogenní lineární rovnice (2.13), budeme se chvíli zabývat vlastnostmi a strukturou obecného řešení homogenní lineární rovnice (2.14). Najít obecné řešení homogenní rovnice (2.14), pokud se nejedná o speciální případ rovnice, je téměř neřešitelný problém. Proto se v teorii obyčejných diferenciálních rovnic toto obecné řešení nehledá, ale studují se pouze jeho základní vlastnosti, jako je jeho struktura, ohraničenost, oscilatoričnost apod.

Věta 2.34. *Nechť $f(x) = 0$ a jsou splněny předpoklady Věty 2.32. Potom obecné řešení homogenní rovnice (2.14) je tvaru*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x), \quad (2.15)$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty a $y_1(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (2.14), která nazýváme **fundamentální systém řešení** rovnice (2.14). Tento systém tvoří bázi vektorového prostoru dimenze n .

Tato věta přímo plyne z principu superpozice, tvrzení (i), a faktu, že množina všech řešení zkoumané rovnice tvoří vektorový prostor dimenze n .

Poznámka 2.35. Definice lineární nezávislosti funkcí je analogií definice lineární nezávislosti vektorů. To znamená, že funkce y_1, y_2, \dots, y_n jsou **lineárně nezávislé** na intervalu I , pokud pro všechna $x \in I$ platí

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Jak poznat, zda daná n -tice funkcí je lineárně nezávislá a zároveň generuje obecné řešení rovnice (2.14), uvádí následující věta.

Věta 2.36. *Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou řešeními homogenní diferenciální rovnice (2.14) na intervalu I . Dále nechť $\det(W(x))$ je determinant, tzv. **wronskián**, z následující matice*

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Potom je-li $\det(W(x)) = 0$ pro libovolné $x \in I$, pak $\det(W(x)) = 0$ pro všechna $x \in I$ a funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně závislé a netvoří (negenerují) obecné řešení rovnice (2.14). V opačném případě, tj. je-li $\det(W(x)) \neq 0$ pro libovolné $x \in I$, pak $\det(W(x)) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislé a tvoří (generují) obecné řešení rovnice (2.14).

Poznámka 2.37. Podmínka, že y_1, y_2, \dots, y_n jsou řešeními jedné homogenní diferenciální rovnice, je podstatná. Bez ní zkoumat lineární nezávislost funkcí y_1, y_2, \dots, y_n nemá smysl, viz následující příklad.

Příklad 2.38. Funkce $y_1(x) = x^3$ a $y_2(x) = |x^3|$ jsou na \mathbb{R} lineárně nezávislé, přesto je

$$\begin{vmatrix} x^3 & |x^3| \\ 3x^2 & 3x|x| \end{vmatrix} = 3x^4|x| - 3x^2|x^3| = 0.$$

Nyní se zabýváme nehomogenní diferenciální rovnicí (2.13). O obecném řešení této rovnice platí následující tvrzení.

Věta 2.39. Necht' Y je jedno libovolné partikulární řešení nehomogenní lineární rovnice (2.13). Dále necht' y_h je obecné řešení k ní přidružené homogenní rovnice (2.14). Potom obecné řešení y rovnice (2.13) má tvar

$$y = y_h + Y. \quad (2.16)$$

Důkaz. Tato věta je přímým důsledkem principu superpozice a Věty 2.34. Totiž, pokud je y libovolné řešení rovnice (2.13) a Y nějaké konkrétní řešení rovnice (2.13), pak jejich rozdíl je vždy (podle (ii) Věty 2.33) nějaké homogenní řešení rovnice (2.14). Vezmeme-li za toto řešení množinu všech řešení, tj. řešení y_h , pak každé řešení y rovnice (2.13) se dá vyjádřit ve tvaru (2.16). \square

K určení obecného řešení nehomogenní rovnice (pokud známe obecné řešení homogenní rovnice) zbývá tedy nalézt alespoň jedno její partikulární řešení Y . Univerzální možností, kterou lze aplikovat na libovolnou lineární rovnici (2.13), je tzv. **metoda variace konstant**, která zobecňuje postup uvedený v Odstavci 2.2.4 pro rovnici prvního řádu. Uvedme si tuto metodu formou věty, přičemž konkrétní použití ukážeme poté na příkladech.

Věta 2.40 (Variace konstant). Necht' (2.13) je nehomogenní rovnice pro niž platí, že obecné řešení příslušné homogenní rovnice (2.14) je tvaru $y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$. Pak partikulární řešení Y rovnice (2.13) je tvaru $Y = c_1(x) y_1 + \dots + c_n(x) y_n$, kde $c_1(x), \dots, c_n(x)$ jsou libovolné primitivní funkce k funkcím $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} c'_1(x) y_1 + \dots + c'_n(x) y_n &= 0, \\ c'_1(x) y'_1 + \dots + c'_n(x) y'_n &= 0, \\ \vdots & \\ c'_1(x) y_1^{(n-2)} + \dots + c'_n(x) y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c'_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + c'_n(x) y_n^{(n-1)} &= \frac{f(x)}{a_n(x)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Poznámka 2.41. Poznamenejme, že soustava (2.17) se dá zapsat i maticově ve tvaru

$$W(x)c'(x) = b(x),$$

kde $W(x)$ je matice z Věty 2.36, $c'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$ a $b(x) = \left(0, \dots, 0, \frac{f(x)}{a_n(x)}\right)^T$. Z tohoto zápisu je zřejmé, že při výpočtu funkcí $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$ ze soustavy (2.17) lze použít Cramerovo pravidlo a hodnoty wronskiánu $\det(W(x))$.

Příklad 2.42. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x$, známe-li obecné řešení příslušné homogenní rovnice $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$, které je rovno $y_h = c_1x + c_2x^2$.

Řešení. Nejprve určíme partikulární řešení Y zadané rovnice. Podle předchozí věty ho budeme hledat ve tvaru $Y = c_1(x)x + c_2(x)x^2$. Po dosazení do (2.17) dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}c'_1(x)x + c'_2(x)x^2 &= 0, \\c'_1(x) + c'_2(x)2x &= x,\end{aligned}$$

jejíž řešením jsou funkce $c'_1(x) = -x$ a $c'_2(x) = 1$. Integrací dostáváme např. primitivní funkce $c_1(x) = -\frac{x^2}{2}$ a $c_2(x) = x$. Odtud $Y = -\frac{x^2}{2} + x^3$ a po úpravě $Y = \frac{x^3}{2}$. Podle Věty 2.39 je hledané obecné řešení

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{x^3}{2}.$$

□

Poznámka 2.43. Podobně jako u lineární rovnice prvního řádu (2.9) lze i u rovnice (2.13) hledat její partikulární řešení Y alternativně pomocí vzorce využívajícího tzv. váhovou funkci $\Phi(x, t)$. Pro jednoduchost se omezíme na speciální případ a budeme hledat partikulární řešení $Y(x)$ rovnice (2.13) splňující počáteční podmínky

$$Y(x_0) = Y'(x_0) = \dots = Y^{(n-1)}(x_0) = 0. \quad (2.18)$$

V tomto případě je vhodné definovat váhovou funkci $y(x) = \Phi(x, t)$ jako řešení homogenní rovnice (2.14) splňující počáteční podmínky

$$y(t) = y'(t) = \dots = y^{(n-2)}(t) = 0, \quad y^{(n-1)}(t) = \frac{1}{a_n(t)}.$$

Potom lze ukázat, že partikulární řešení $Y(x)$ počáteční úlohy (2.13), (2.18) je následujícího tvaru

$$Y(x) = \int_{x_0}^x f(t) \Phi(x, t) dt. \quad (2.19)$$

Na druhou stranu, najít obecné řešení homogenní rovnice (2.14) s libovolnými koeficienty $a_0(x), \dots, a_n(x)$ je stále problematické. Proto se v následujícím odstavci omezíme na rovnici (2.14), kde tyto koeficienty budou konstantní.

2.3.1 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Definice 2.44. Lineární diferenciální rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (2.20)$$

kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, nazýváme **homogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty**.

Nalezení obecného řešení rovnice (2.20) je na první pohled relativně jednoduché. Nejdříve zavedeme následující pojem.

Definice 2.45. Nechť je dána rovnice (2.20). Algebraickou rovnici

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2.21)$$

nazýváme **charakteristickou rovnicí diferenciální rovnice (2.20)**.

Příklad 2.46. Příklady charakteristických rovnic diferenciálních rovnic:

Diferenciální rovnice	Charakteristická rovnice
$y^{(5)} + 3y''' - 6y' + 7y = 0$	$\lambda^5 + 3\lambda^3 - 6\lambda + 7 = 0$
$y'' + 5y' = 0$	$\lambda^2 + 5\lambda = 0$
$y''' - 10y'' + 12y' = 0$	$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 12\lambda = 0$

Věta 2.47. Mějme homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty tvaru (2.20) a její charakteristickou rovnicí (2.21). Pak platí:

1. Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ k -násobný kořen charakteristické rovnice, $k \geq 1$, pak funkce

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x e^{\lambda x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda x}$$

jsou řešením a součástí fundamentálního systému rovnice (2.20).

2. Je-li $\lambda_{1,2} = a \pm bj$ dvojice komplexně sdružených k -násobných komplexních kořenů charakteristické rovnice, $k \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, pak funkce

$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx, y_3 = x e^{ax} \cos bx, \dots, y_{2k-1} = x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ y_2(x) = e^{ax} \sin bx, y_4 = x e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx$$

jsou řešením a součástí fundamentálního systému rovnice (2.20).

Naznačíme, jak by se uvedená věta dokazovala. Nechť $\lambda_k \in \mathbb{R}$ je jednoduchý kořen charakteristické rovnice (2.21). Ověříme dosazením, že $y_k = e^{\lambda_k x}$ je řešením rovnice (2.20). Po dosazení a vytknutí $e^{\lambda_k x}$ obdržíme rovnici

$$e^{\lambda_k x} (a_n \lambda_k^n + a_{n-1} \lambda_k^{n-1} + \dots + a_1 \lambda_k + a_0) = 0.$$

Jelikož λ_k je řešením charakteristické rovnice (2.21), vyjde výše uvedená kulatá závorka nulová a zkoumaná identita je splněna, což odpovídá tomu, že $y_k = e^{\lambda_k x}$ je řešením rovnice (2.20). Podobně by se dokazovaly i ostatní případy.

Poznámka 2.48. Jelikož charakteristická rovnice (2.21) je n -tého řádu, existuje právě n (ne nutně různých) komplexních kořenů. Tomu odpovídá n funkcí fundamentálního systému a množina všech řešení rovnice (2.20) tvoří vektorový prostor dimenze n , což je ve shodě s Větou 2.34. Bází tohoto prostoru jsou například všechna řešení získaná podle návodu Věty 2.47.

Příklad 2.49. Pomocí Věty 2.47 najděte obecné řešení rovnice $y^{(7)} + 8y^{(5)} + 16y''' = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice diferenciální rovnice je $\lambda^7 + 8\lambda^5 + 16\lambda^3 = 0$. Je zřejmé, že jejím trojnásobným kořenem je $\lambda_{1,2,3} = 0$. Zbývající kořeny určíme z rovnice $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$. Jedná se o rovnici 4. stupně. Snadno lze nahlédnout, že se jedná o kvadratický dvoječlen $\lambda^2 + 4$ umocněný na druhou. Pokud dořešíme tuto kvadratickou rovnici (v komplexním oboru), dostaneme celkem zbývající kořeny $\lambda_{4,5,6,7} = \pm 2j$. Proto podle Věty 2.47 získáváme následující řešení, která tvoří fundamentální systém zadané diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{0x}, & y_2(x) &= xe^{0x}, & y_3(x) &= x^2e^{0x}, \\ y_4(x) &= e^{0x} \cos 2x, & y_5(x) &= xe^{0x} \cos 2x, & y_6(x) &= e^{0x} \sin 2x, & y_7(x) &= xe^{0x} \sin 2x. \end{aligned}$$

Obecné řešení je pak tvaru

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4 \cos 2x + c_5x \cos 2x + c_6 \sin 2x + c_7x \sin 2x.$$

□

Při hledání řešení charakteristické rovnice (podobné té, co je uvedena v Příkladu 2.49) je možné použít metody postupného rozkládání polynomu. V žádném případě se však nejedná o postup jednoduchý. Právě v tom tkví problém při hledání obecného řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Zatímco řešení diferenciální rovnice druhého řádu je jednoduché – řešíme kvadratickou rovnici, je řešení rovnic vyšších řádů komplikovanější¹.

2.3.2 Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty

Definice 2.50. Lineární diferenciální rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (2.22)$$

kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, a $f(x) \neq 0$ je funkce nazýváme **nehomogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty**.

K nalezení obecného řešení rovnice (2.22) je možné použít Větu 2.39. Je však otázka, jakým způsobem najít nějaké partikulární řešení Y zadané nehomogenní lineární diferenciální rovnice. Univerzální metoda variace konstant přirozeně funguje i pro rovnici s konstantními koeficienty (2.22). Lze samozřejmě použít i vzorec (2.19) z Poznámky 2.43,

¹Obecně neexistuje explicitní vzorec pro určení kořenů polynomů stupně $n \geq 5$ a tyto kořeny a tudíž i řešení lze často vyjádřit pouze přibližně s použitím numerických metod.

který se v případě lineárních rovnic s konstantními koeficienty dokonce zjednoduší, jelikož váhová funkce $\Phi(x, t)$ bude tvaru $\Phi(x, t) = \Phi(x - t)$.

Příklad 2.51. Řešte nehomogenní diferenciální rovnici

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

a) variací konstant, b) pomocí váhové funkce.

Řešení. a) Nejprve určíme homogenní řešení y_h . Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice je $\lambda^2 + 1 = 0$. Odtud $\lambda_{1,2} = \pm j$ a fundamentální systém této rovnice má tvar $y_1 = \cos x$ a $y_2 = \sin x$. To jest $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Nyní určíme partikulární řešení Y zadané rovnice. Podle Věty 2.40 ho budeme hledat ve tvaru $Y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$. Po dosazení do vzorce (2.17) dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x &= 0, \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x &= \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy (vhodné je například použít Cramerovo pravidlo) určíme, že $c_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$ a $c_2'(x) = 1$. Integrováním dostáváme například primitivní funkce $c_1(x) = \ln |\cos x|$ a $c_2(x) = x$, tedy $Y = \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$. Podle Věty 2.39 je pak hledané obecné řešení

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

b) Nejprve určíme váhovou funkci $\Phi(x, t)$. Tou bude podle Poznámky 2.43 homogenní řešení $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ splňující počáteční podmínky $y_h(t) = 0$, $y_h'(t) = 1$. Určíme konstanty c_1, c_2 tak, aby tyto počáteční podmínky byly splněny. To jest

$$\begin{aligned} c_1 \cos t + c_2 \sin t &= 0, \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t &= 1. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy (opět například Cramerovým pravidlem) určíme, že $c_1 = -\sin t$ a $c_2 = \cos t$. Dostáváme váhovou funkci

$$\Phi(x, t) = \Phi(x - t) = -\sin t \cos x + \cos t \sin x = \sin(x - t).$$

Volbou například $x_0 = 0$ a dosazením do vzorce (2.19) získáme partikulární řešení (splňující $Y(0) = Y'(0) = 0$)

$$\begin{aligned} Y(x) &= \int_0^x \frac{-\sin t \cos x + \cos t \sin x}{\cos t} dt = [\ln |\cos t| \cos x + t \sin x]_0^x \\ &= \cos x \ln |\cos x| + x \sin x. \end{aligned}$$

Hledané obecné řešení je potom opět

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

□

Metoda variace konstant nebo výpočet partikulárního řešení pomocí váhové funkce nejsou jediné způsoby, jak nalézt obecné řešení nehomogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty.

V praxi se často používá tzv. **metoda neurčitých koeficientů**. Tato metoda je sice „uživatelsky přívětivější“, avšak je použitelná pouze pro rovnice (2.22) se speciální pravou stranou. Při řešení využíváme opět Větu 2.39 a obecné řešení hledáme ve tvaru

$$y = y_h + Y.$$

Rozdíl je však ve způsobu hledání partikulárního řešení Y . Nyní popíšeme, jak lze toto řešení metodou neurčitých koeficientů najít. U této metody se předpokládá, že pravá strana rovnice (2.22), tj. funkce $f(x)$, je ve **speciálním tvaru** - viz následující tabulka. Tvar partikulárního řešení Y pak určíme z tvaru funkce $f(x)$ podle tabulky. Tento tvar obsahující neurčité (reálné) koeficienty dosadíme do dané rovnice (2.22). Porovnáním obou stran rovnice (podobně jako např. při hledání koeficientů u rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky) tyto koeficienty dopočítáme.

Pravá strana $f(x)$	Tvar partikulárního řešení Y
$f(x) = e^{ax} P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom n -tého stupně, $a \in \mathbb{R}$	$Y = e^{ax} x^k Q_n(x)$, a je k -násobný kořen char. rovnice, $Q_n(x)$ je obecný polynom n -tého stupně
$f(x) = e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx)$, kde M, N, a, b jsou reálná čísla	$Y = e^{ax} x^k (A \cos bx + B \sin bx)$, $a + bj$ je k -násobný kořen char. rovnice, A, B jsou reálná čísla

Upozornění. V případě, že a (resp. $a + bj$) není kořen charakteristické rovnice, $k = 0$.

Poznámka 2.52 (Obecnější případ pravé strany). Metodou neurčitých koeficientů lze řešit i obecnější případ (zahrnující předchozí dva případy), kdy pravá strana rovnice (2.22), tj. funkce f je ve tvaru

$$f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx),$$

kde a, b jsou reálná čísla a P_n a Q_m jsou polynomy stupně n a m . Potom partikulární řešení Y rovnice (2.22) hledáme ve tvaru

$$Y = e^{ax} x^k (R_{\max\{m,n\}}(x) \cos bx + S_{\max\{m,n\}}(x) \sin bx),$$

kde číslo $a + bj$ je k -násobný kořen charakteristické rovnice a $R_{\max\{m,n\}}$ a $S_{\max\{m,n\}}$ jsou obecné polynomy stupně $\max\{m, n\}$.

Pokusme se nyní naznačit, proč tato metoda funguje. Důvodem je, že předpokládané partikulární řešení Y se derivováním v jistém slova smyslu „nemění“. To jest, po zderivování a dosazení do rovnice (2.22), vychází opět funkce složená z polynomů, exponenciály sinů či kosinů. Tato funkce se pak dá dobře porovnat s pravou stranou rovnice (2.22), které se podobá až na koeficienty před jednotlivými elementárními funkcemi.

Příklad 2.53. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou:

$$\text{a) } y'' - 9y = 15e^{2x} \qquad \text{b) } y'' + 9y = 9x^2 - 27x + 11$$

$$\text{c) } y'' - 4y' + 3y = 4xe^{3x} \qquad \text{d) } y'' - y' = 10 \cos 2x$$

Řešení. a) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' - 9y = 0$. Máme $\lambda^2 - 9 = 0$. Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm 3$ a $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 15e^{2x} = e^{2x} P_0(x).$$

Zde $a = 2$ není kořen charakteristické rovnice ($2 \neq \pm 3$), a proto $k = 0$. Obecný polynom nultého stupně je konstanta, odtud $P_0(x) = A$. Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{2x} x^0 A = Ae^{2x}$$

a musí splňovat zadanou rovnici $Y'' - 9Y = 15e^{2x}$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat a dosadit do této rovnice:

$$Y' = 2Ae^{2x}, \quad Y'' = 4Ae^{2x}.$$

Po dosazení dostáváme

$$4Ae^{2x} - 9Ae^{2x} = 15e^{2x}.$$

Rovnici nejdříve vydělíme e^{2x} a dostaneme $4A - 9A = 15$ a odtud $A = -3$. Máme jedno partikulární řešení $Y = -3e^{2x}$ a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = y_h + Y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - 3e^{2x}.$$

b) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 9y = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 9 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 3j$ a $y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 9x^2 - 27x + 11 = e^{0x}(9x^2 - 27x + 11) = e^{0x} P_2(x).$$

Zde $a = 0$ není kořen charakteristické rovnice ($0 \neq \pm 3j$), a proto $k = 0$. Obecný polynom druhého stupně je $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$. Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x} x^0 (Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$$

a musí splňovat rovnici $Y'' + 9Y = 9x^2 - 27x + 11$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat:

$$Y' = 2Ax + B, \quad Y'' = 2A.$$

Po dosazení do zadání dostáváme

$$2A + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 9x^2 - 27x + 11.$$

Na obou stranách rovnice jsou polynomy druhého stupně. Aby platila rovnost musí se rovnat koeficienty u jednotlivých mocnin (odtud název metoda neurčitých koeficientů):

$$\begin{aligned} x^2 : \quad & 9A = 9, \\ x^1 : \quad & 9B = -27, \\ x^0 : \quad & 2A + 9C = 11. \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu rovnic. Po vyřešení máme $A = 1$, $B = -3$, $C = 1$. Získali jsme jedno partikulární řešení $Y = x^2 - 3x + 1$. Potom obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + x^2 - 3x + 1.$$

c) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' - 4y' + 3y = 0$. Její charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ a $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 4xe^{3x} = e^{3x} P_1(x).$$

Zde $a = 3$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$. Obecný polynom prvního stupně je $P_1(x) = Ax + B$ a partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{3x} x^1 (Ax + B) = e^{3x} (Ax^2 + Bx)$$

a musí splňovat rovnici $Y'' - 4Y' + 3Y = 4xe^{3x}$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat:

$$\begin{aligned} Y &= e^{3x} (Ax^2 + Bx), \\ Y' &= 3e^{3x} (Ax^2 + Bx) + e^{3x} (2Ax + B) = e^{3x} (3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B), \\ Y'' &= 3e^{3x} (3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B) + e^{3x} (6Ax + 3B + 2A) = \\ &= e^{3x} (9Ax^2 + 9Bx + 6Ax + 3B + 6Ax + 3B + 2A) = \\ &= e^{3x} (9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A). \end{aligned}$$

Po dosazení do zadání dostáváme

$$e^{3x} (9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A) - 4e^{3x} (3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B) + 3e^{3x} (Ax^2 + Bx) = 4xe^{3x}.$$

Rovnici nejdřív vydělíme výrazem e^{3x} a dostaneme

$$9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A - 12Ax^2 - 12Bx - 8Ax - 4B + 3Ax^2 + 3Bx = 4x.$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin.

$$\begin{aligned} x^2 : \quad & 9A - 12A + 3A = 0, \\ x^1 : \quad & 9B + 12A - 12B - 8A + 3B = 4, \\ x^0 : \quad & 6B + 2A - 4B = 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu $4A = 4$, $2A + 2B = 0$. Odtud $A = 1$, $B = -1$. Partikulární řešení je

$$Y = e^{3x}(x^2 - x).$$

Potom obecné řešení bude

$$y = y_h + Y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + e^{3x}(x^2 - x).$$

d) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' - y' = 0$. Její charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 - \lambda = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ a $y_h = c_1 + c_2 e^x$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10 \cos 2x = e^{0x}(10 \cos 2x + 0 \sin 2x).$$

Zde $a + bj = 0 + 2j$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x} x^0 (A \cos 2x + B \sin 2x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

a musí splňovat rovnici $Y'' - Y' = 10 \cos 2x$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat:

$$Y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad Y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Dosadíme do zadání a dostáváme

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 2A \sin 2x - 2B \cos 2x = 10 \cos 2x.$$

Aby toto platilo, musí se koeficienty při $\cos 2x$ a $\sin 2x$ rovnat na obou stranách rovnice, to jest:

$$\begin{aligned} \cos 2x : \quad & -4A - 2B = 10, \\ \sin 2x : \quad & -4B + 2A = 0. \end{aligned}$$

Odtud $A = -2$, $B = -1$. Partikulární řešení je

$$Y = -2 \cos 2x - \sin 2x.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = c_1 + c_2 e^x - 2 \cos 2x - \sin 2x.$$

□

Na závěr uvedeme větu, podle které můžeme metodu neurčitých koeficientů použít i na další speciální pravé strany rovnice (2.22).

Věta 2.54 (Princip superpozice pro pravou stranu). *Jestliže funkce f na pravé straně rovnice (2.22) je součtem speciálních pravých stran*

$$f(x) = f_1(x) + \cdots + f_m(x),$$

potom i partikulární řešení nehomogenní rovnice bude součtem partikulárních řešení pro jednotlivé speciální pravé strany, tj.

$$Y = Y_1 + \cdots + Y_m.$$

Důkaz. Uvedená věta je opět přímým důsledkem linearity operace derivace, podobně jako tomu bylo u Věty 2.33. Použijeme-li stejného operátoru $L[y]$ jako v důkazu této věty, můžeme (pro $m = 2$) psát:

$$L[Y_1] = f_1, \quad L[Y_2] = f_2 \quad \Rightarrow \quad L[Y_1 + Y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1 + f_2.$$

Analogicky by se dal dokázat případ $m > 2$. □

Příklad 2.55. Principem superpozice vyřešte diferenciální rovnici $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$.

Řešení. Kořeny charakteristické rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ jsou $\lambda_{1,2} = \pm j$ a odtud plyne, že

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Partikulární řešení Y dostaneme jako součet partikulárních řešení Y_1 a Y_2 dvou rovnic se speciálními pravými stranami

$$y'' + y = \sin x \quad \text{a} \quad y'' + y = -2e^{-x}.$$

1) U první rovnice je pravá strana tvaru

$$f_1(x) = \sin x = e^{0x}(0 \cos 1x + 1 \sin 1x).$$

Zde $a + bj = 0 + 1j = j$ je jednoduchý kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$. Potom partikulární řešení Y_1 bude mít tvar

$$Y_1 = e^{0x} x^1 (A \cos x + B \sin x) = Ax \cos x + Bx \sin x$$

a bude splňovat rovnici $Y_1'' + Y_1 = \sin x$. Nyní budeme Y_1 dvakrát derivovat:

$$Y_1 = Ax \cos x + Bx \sin x,$$

$$Y_1' = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x,$$

$$Y_1'' = -A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x.$$

Po dosazení do odpovídající rovnice dostáváme

$$-A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x.$$

Porovnáme koeficienty při $\cos x$, $\sin x$, $x \cos x$ a $x \sin x$ na obou stranách rovnice, to jest:

$$\cos x : \quad B + B = 0,$$

$$\sin x : \quad -A - A = 1,$$

$$x \cos x : \quad -A + A = 0,$$

$$x \sin x : \quad -B + B = 0.$$

Odtud $A = -\frac{1}{2}$ a $B = 0$. Dostali jsme

$$Y_1 = -\frac{1}{2}x \cos x.$$

2) U druhé rovnice je pravá strana tvaru

$$f_2(x) = -2e^{-x} = e^{-1x}2 = e^{-1x}P_0(x).$$

Zde $a = -1$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Potom partikulární řešení Y_2 bude mít tvar

$$Y_2 = e^{-1x}x^0A = Ae^{-x}$$

a bude splňovat rovnici $Y_2'' + Y_2 = -2e^{-x}$. Nyní budeme Y_2 dvakrát derivovat:

$$Y_2' = -Ae^{-x}, \quad Y_2'' = Ae^{-x}.$$

Po dosazení do odpovídající rovnice dostáváme

$$Ae^{-x} + Ae^{-x} = -2e^{-x}.$$

Rovnici nejdřív vydělíme e^x a dostaneme $A + A = -2$ a odtud $A = -1$. Dostali jsme

$$Y_2 = -e^{-x}.$$

Celkem

$$Y = Y_1 + Y_2 = -\frac{1}{2}x \cos x - e^{-x}.$$

Hledané obecné řešení je

$$y = y_h + Y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x - e^{-x}.$$

□

2.4 Příklady na procvičení

Cvičení

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic prvního řádu se separovanými proměnnými:

- $xyy' = 1 - x^2$,
- $y' = y \operatorname{tg} x$,
- $y' + \frac{y-1}{x^2y^2} = 0$,
- $y' = (y-1)(y-2)$,
- $y' = e^{x+y}$,
- $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

2. Najděte řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu:

- $y' + \frac{y}{x} = 6x$,
- $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$,

- c) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$,
 d) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$,
 e) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$,
 f) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$.

3. Najděte řešení $y(x)$ počáteční úlohy:

- a) $y' \cos x - y \sin x = 2x$, $y(0) = 0$,
 b) $y' = 6y - 4e^{6x} \cos 5x + 24$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$,
 c) $y' - \frac{y}{x+1} = x - 1$, $y(0) = 0$,
 d) $y' = \frac{y}{x-5} + 5x - 25$, $y(6) = 14$.

4. Najděte obecné řešení rovnic druhého řádu metodou neurčitých koeficientů:

- a) $2y'' - 5y' - 7y = 18e^{2x}$,
 b) $y'' - 2y' - 3y = 1 - x$,
 c) $y'' + 3y = 9x^2$,
 d) $y'' + 6y' + 9y = 36xe^{3x}$,
 e) $y'' + 2y' + 5y = 17 \sin 2x$,
 f) $3y'' - 4y' = 25 \sin x$.

5. Pomocí principu superpozice najděte obecné řešení rovnic druhého řádu metodou neurčitých koeficientů:

- a) $y'' + y' = 5x + 2e^x$,
 b) $y'' + 4y = \sin x + \cos 2x$.

6. Najděte partikulární řešení rovnic metodou neurčitých koeficientů:

- a) $y'' - 2y' = 2x^2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$,
 b) $y'' - 2y = (2x - 1)^2$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = 2$,
 c) $y'' - 7y' + 10y = 116 \sin 2x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

7. Variací konstant řešte nehomogenní diferenciální rovnice:

- a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$,
 b) $y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

Výsledky

1. a) $x^2 + y^2 = \ln cx^2$, $c > 0$,
 b) $y = \frac{C}{\cos x}$,
 c) $\frac{1}{2}y^2 + y + \ln|y - 1| + \frac{1}{x} = c$, $y = 1$,

- d) $\ln \left| \frac{y-2}{y-1} \right| = x + c, y = 1,$
 e) $e^x + e^{-y} = c,$
 f) $\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + c.$
2. a) $y = \frac{c}{x} + 2x^2,$
 b) $y = c \cos x + \sin x,$
 c) $y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right),$
 d) $y = \frac{x}{x+1} (c + x + \ln|x|),$
 e) $y = (1 + x^2)(c + x),$
 f) $y = ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$
3. a) $y = \frac{x^2}{\cos x},$
 b) $y = \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5} \sin 5x - 4e^{-6x} \right) e^{6x},$
 c) $y = (x + 1)(x - 2 \ln|x + 1|),$
 d) $y = (5x - 16)(x - 5) = 5x^2 - 41x + 80.$
4. a) $y = c_1 e^{\frac{7}{2}x} + c_2 e^{-x} - 2e^{2x},$
 b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{9}(3x - 5),$
 c) $y = c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x + 3x^2 - 2,$
 d) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right),$
 e) $y = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x - 4 \cos 2x + \sin 2x,$
 f) $y = c_1 + c_2 e^{\frac{4}{3}x} + 4 \cos x - 3 \sin x.$
5. a) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x,$
 b) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{4}x \sin 2x.$
6. a) $y = \frac{1}{2} + \frac{9}{2}e^{2x} + e^x(-2x^2 - 4),$
 b) $y = e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x} - 2x^2 + 2x - \frac{5}{2},$
 c) $y = -4e^{2x} + 7 \cos 2x + 3 \sin 2x.$
7. a) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2}e^x \ln(x^2 + 1) + x e^x \operatorname{arctg} x,$
 b) $y = c_1 + c_2 e^x + x e^x - (e^x + 1) \ln(e^x + 1).$

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Určení typu diferenciální rovnice.](#)
2. [Ověření, zda je funkce řešením zadané diferenciální rovnice.](#)
3. [Řešení diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými.](#)
4. [Řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu.](#)
5. [Řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty metodou variace konstant.](#)

6. Řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty metodou neurčitých koeficientů.
7. Nalezení obecného řešení diferenciální rovnice.

3 Funkce komplexní proměnné

3.1 Komplexní čísla

3.1.1 Základní pojmy

Problematika řešení rovnic, např. $z^2 + 1 = 0$, která nemá řešení v oboru reálných čísel, vedla k rozšíření číselného oboru na **čísla komplexní** $z = x + jy$, kde $x = \Re z$, $y = \Im z$ jsou reálná čísla a j nazýváme **imaginární jednotkou**¹, pro kterou platí $j^2 = -1$. Pro komplexní číslo z nazýváme číslo $x = \Re z$ **reálnou částí** a $y = \Im z$ **imaginární částí** komplexního čísla z . Sčítání a násobení komplexních čísel je ve shodě s obvyklými pravidly, proto je budeme ilustrovat pouze na příkladě:

$$(3 + j) + 4(1 - 2j) = 7 - 7j, \quad (3 + j)(1 - 2j) = 3 + j - 6j - 2j^2 = 3 - 5j + 2 = 5 - 5j.$$

Množinu všech komplexních čísel značíme \mathbb{C} . Číslo $\bar{z} = x - jy$ nazýváme **číslem komplexně sdruženým** ke komplexnímu číslu $z = x + jy$ a s výhodou je užíváme při dělení komplexních čísel, kdy zlomek rozšíříme jedničkou ve tvaru podílu komplexně sdruženého jmenovatele se sebou samým:

$$\frac{20 - 5j}{2 + j} = \frac{20 - 5j}{2 + j} \cdot \frac{2 - j}{2 - j} = \frac{40 - 10j - 20j + 5j^2}{2^2 - j^2} = \frac{35 - 30j}{5} = 7 - 6j.$$

Lze snadno ověřit, že pro všechna komplexní čísla $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí rovnosti

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Poznamenejme, že $z\bar{z}$ je nezáporné reálné číslo a ke každému $z = x + jy \in \mathbb{C}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** (nebo také **modul**) $|z|$ vztahem

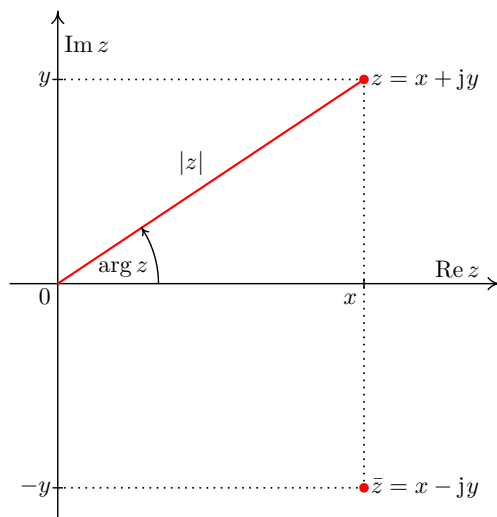
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Interpretujeme-li komplexní čísla jako body v rovině, pak $|z|$ je vzdálenost bodu $z = [x, y]$ od počátku a φ úhel, který svírá průvodič bodu $z = [x, y]$ s kladným směrem reálné osy x . Odtud plyne, že další možností, jak vyjádřit komplexní číslo $z = x + jy \neq 0$, je tzv. **goniometrický tvar**

$$z = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|(\cos \arg z + j \sin \arg z),$$

¹V matematice bývá zvykem označovat komplexní jednotku písmenem i ; v technické praxi se často používá označování písmenem j .

kde úhel $\varphi = \arg z$ nazýváme **argumentem** komplexního čísla z .



Tento tvar je vhodný pro geometrickou interpretaci násobení nebo dělení dvou komplexních čísel z_1, z_2 , platí totiž:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| |z_2| & \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} & \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2. \end{aligned}$$

Této vlastnosti lze s výhodou použít při výpočtu n -té mocniny komplexního čísla:

$$(|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi))^n = |z|^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi). \quad (3.1)$$

Nevýhodou je nejednoznačnost funkce argument, proto tu hodnotu φ argumentu $\arg z$, pro kterou platí $-\pi < \varphi \leq \pi$ nazveme **hlavní hodnotou argumentu** komplexního čísla z a zapisujeme ji $\text{Arg } z$. Uvedená nejednoznačnost funkce $\arg z$ se projeví při určení n -té odmocniny čísla z . Ze vztahu (3.1) a z rovnosti $(\sqrt[n]{z})^n = z$ plyne $n \arg \sqrt[n]{z} = \arg z$, což má za důsledek existenci n různých $\text{Arg}_i \sqrt[n]{z}$, které výše uvedený vztah splňují.

Dále zavádíme také **exponenciální tvar** komplexního čísla

$$z = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|(\cos \arg z + j \sin \arg z) = |z|e^{j \arg z}.$$

Tento zápis „přirozeně“ reflektuje výše uvedenou skutečnost a vlastnosti exponenciální funkce

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{j \arg z_1} |z_2| e^{j \arg z_2} = |z_1| |z_2| e^{j(\arg z_1 + \arg z_2)}.$$

Využití uvedených pojmů ukážeme v následujícím příkladě.

Příklad 3.1. Nalezněte řešení kvadratické rovnice

$$(1 + j)z^2 - (3 + j)z + 6 - 2j = 0.$$

Postup řešení kvadratické rovnice je stejný i v oboru komplexních čísel jako pro reálná čísla, proto nejdříve vypočteme diskriminant rovnice:

$$D = (-(3+j))^2 - 4(1+j)(6-j) = 9 + 6j + j^2 - 4(6 + 4j - 2j^2) = -24 - 10j$$

Platí $|D| = \sqrt{(-24)^2 + (-10)^2} = \sqrt{676} = 26$ a diskriminant můžeme zapsat ve tvaru:

$$D = 26 \left(\frac{-24}{26} + j \frac{-10}{26} \right) \text{ odtud } \cos \arg D = \frac{-24}{26} \wedge \sin \arg D = \frac{-10}{26}.$$

Pro „přesný“ výpočet algebraického tvaru $\cos((\arg D)/2)$ a $\sin((\arg D)/2)$ využijeme známých vzorců

$$\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \quad \text{a} \quad \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}.$$

Ze znamének $\cos \arg D$, $\sin \arg D$ určíme, že pro hodnotu argumentu $\arg D$ platí

$$-\pi < \arg D < -\pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad \pi < \arg D + \pi < 3\pi/2$$

a pro hlavní hodnotu úhlu $\arg D/2$ dostáváme v intervalu $(-\pi, \pi)$ dvě rovnocenné možnosti

$$\arg \sqrt{D} \in (-\pi/2, 3\pi/4) \quad \text{a} \quad \arg \sqrt{D} \in (\pi/2, 3\pi/4).$$

Druhá odmocnina diskriminantu má tedy dvě hodnoty, pro které ve výše uvedených vzorcích odstraníme absolutní hodnotu (v návaznosti na $\arg D/2$) a určíme $\cos(\arg \sqrt{D})$ a $\sin(\arg \sqrt{D})$:

$$\cos(\arg \sqrt{D}) = \pm \sqrt{\frac{1 - 24/26}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{26}} \quad \sin(\arg \sqrt{D}) = \mp \sqrt{\frac{1 + 24/26}{2}} = \mp \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

Odtud dostáváme $\sqrt{D} = \sqrt{26} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{26}} \mp \frac{5}{\sqrt{26}} j \right) = \pm(1 - 5j)$ a po dosazení do vzorce pro řešení kvadratické rovnice získáme její kořeny:

$$z_{1,2} = \frac{3 + j \pm (1 - 5j)}{2(1 + j)} = \begin{cases} \frac{4-4j}{2(1+j)} = \frac{4(1-j)^2}{2 \cdot 2} = -2j \\ \frac{2+6j}{2(1+j)} = \frac{2(1+3j)(1-j)}{4} = 2 + j \end{cases}.$$

Poznámka 3.2. Hlavní hodnotu argumentu $\arg z$ je možné vyjádřit takto:

$$\arg z = \begin{cases} \pi, & \text{pro } z = x + jy, \text{ kde } x < 0 \text{ a } y = 0, \\ 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{pro } z = x + jy \neq 0, \text{ jinak.} \end{cases} \quad (3.2)$$

K odvození tohoto vztahu je možné využít analogického postupu jako postupu při výpočtu druhé odmocniny v předchozím příkladě. Jestliže pro libovolné $z \neq 0$:

$$z = x + jy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + j \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

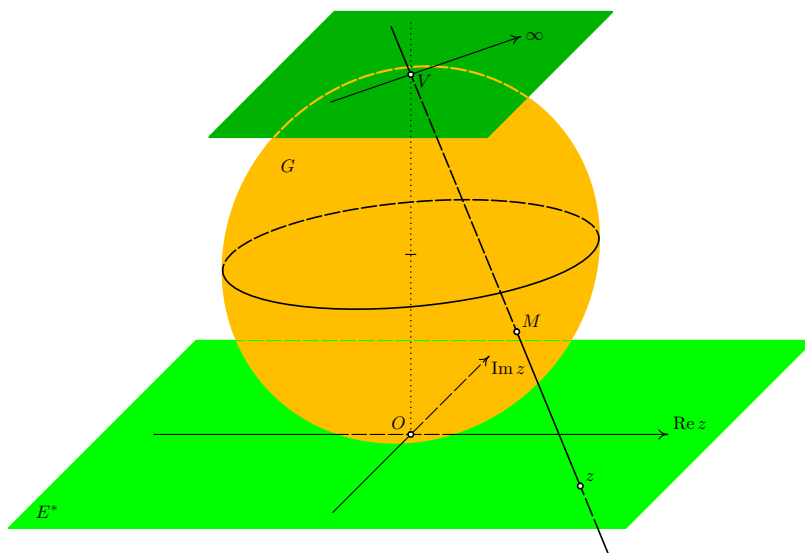
vybereme z druhé odmocniny pouze hodnotu $\widehat{\sqrt{z}}$ takovou, že $\text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} \in (-\pi/2, \pi/2)$ dostáváme

$$\cos \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} > 0 \quad \text{sgn}(\sin \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}}) = \text{sgn } y.$$

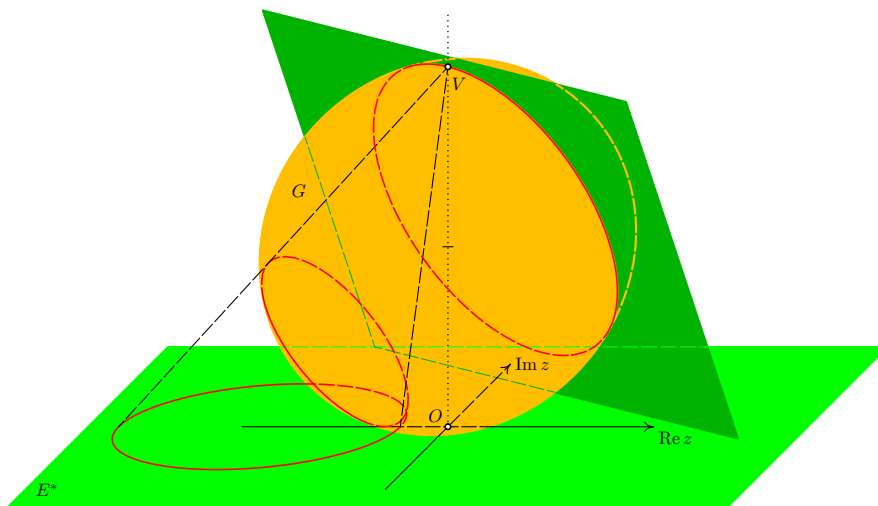
$$\begin{aligned} \text{Arg } z &= 2 \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} = 2 \arctg(\text{tg } \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}}) = 2 \arctg \frac{\sin \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}}}{\cos \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}}} = \\ &= 2 \arctg \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}} = 2 \arctg \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}} = \\ &= 2 \arctg \sqrt{\frac{(\sqrt{x^2+y^2} - x)(\sqrt{x^2+y^2} + x)}{(\sqrt{x^2+y^2} + x)^2}} = 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

3.1.2 Rozšíření komplexních čísel o nevlastní bod

Množinu komplexních čísel rozšíříme na množinu $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \infty$. Zdůvodnění tohoto postupu můžeme opřít o stereografickou projekci, která zobrazuje body komplexní roviny na body kulové plochy jednoznačně pomocí přímek procházejících daným bodem roviny a nejvyšším bodem koule (vrcholem, severním pólem). Při tomto zobrazení zůstane na kulové ploše neobsazený právě tento bod, který ztotožníme s ∞ .



Důležitou vlastností tohoto zobrazení je, že kružnice na kulové ploše neprocházející vrcholem koule se zobrazí na kružnici v rovině. To znamená, že se kruhová okolí na kouli zobrazují na kruhová okolí v rovině. Proto okolí bodu ∞ rozumíme vnějšek kružnice se středem v počátku.



Doplnění množiny \mathbb{C} „pouze“ jedním ∞ přináší na rozdíl od množiny reálných čísel možnost zavést i některé početní operace s ∞ (např. $\frac{z}{0} = \infty$ pro $z \neq 0$). Tyto jsou uvedeny v následující definici.

Definice 3.3. Pro počítání s nekonečnem definujeme operace takto:

$$\text{Pro } z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \quad z \pm \infty = \infty \pm z = \infty \quad (\infty \pm \infty \text{ není definováno});$$

$$\text{Pro } z \in \mathbb{C} \quad z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad (0 \cdot \infty \text{ není definováno});$$

$$\text{Pro } z \in \mathbb{C} \quad z/\infty = 0 \quad (\text{tedy } 0/\infty = 0);$$

$$\text{Pro } z \in \mathbb{C}, \infty/z = \infty \quad (\text{tedy } \infty/0 = \infty);$$

$$\text{Pro přirozené číslo } \infty^n = \infty, \infty^{-n} = 0, 0^{-n} = \infty;$$

3.1.3 Množiny komplexních čísel

Nyní zavedeme označení a analytické vyjádření důležitých množin v komplexní rovině:

Otevřeným kruhem $U_\varepsilon(z_0)$ rozumíme množinu všech komplexních čísel z , které mají od bodu z_0 vzdálenost menší než ε tedy: $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$, To jest množina čísel $z = x + jy$ pro něž platí:

$$|z - z_0| < \varepsilon \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

Hranicí této množiny je kružnice $K_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$, kterou můžeme ztotožnit s množinou řešení rovnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$. Pro dvojici reálných čísel $0 \leq \epsilon < \varepsilon$ definujeme množinu $P_{\epsilon\varepsilon}(z_0) = \{w \in \mathbb{C} \mid \epsilon < |z - z_0| < \varepsilon\}$, kterou nazýváme **prstencem**. V případě volby $\epsilon = 0$ budeme prstencem $P_{0,\varepsilon}(z_0)$ zapisovat pouze symbolem $P_\varepsilon(z_0)$ a budeme hovořit o prstencovém okolí bodu z_0 a pro $\epsilon > 0$ hovoříme o mezikružích.

Obecnou rovnici přímky $ax + by + c = 0$ můžeme zapsat ve tvaru

$$z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 + \varepsilon = 0,$$

kde $z_0 = \frac{k}{2}(a + jb)$, $\varepsilon = kc$, kde $k \neq 0$ je libovolné reálné číslo. Nahradíme-li rovnost nerovností dostáváme nerovnost vymežující polorovinu.

Množiny $U_\varepsilon(z_0)$ a $P_\varepsilon(z_0)$ jsou ε -ovým **okolím** a **ryzím okolím bodu** z_0 . Budeme-li hovořit obecně o okolí budeme používat i označení $U(z_0)$ a $P(z_0)$. Poznamenejme, že zavedeme-li vzdálenost dvou komplexních čísel jako modul jejich rozdílu můžeme používat dříve zavedené pojmy jako otevřená, uzavřená množina, dále uzávěr množiny, hranice množiny a oddělené množiny. Množina se nazývá **souvislá**, jestliže ji nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. Otevřenou souvislou množinu nazýváme **oblastí**. Komponentou množiny je každá její maximální souvislá část. Oblast nazveme **n -násobně souvislou**, jestliže je její komplement tvořen právě n komponentami. Pro $n = 1$ nazýváme oblast **jednoduše souvislou**.

3.2 Posloupnosti, řady, mocninné řady

Jednou z pasáží, kdy je poměrně snadné přenést známé výsledky z reálné analýzy na komplexní čísla $z \in \mathbb{C}$, jsou posloupnosti, řady, mocninné řady. Jedná se o definici posloupnosti, o větu o existenci nejvýše jedné limity posloupnosti dále vět o součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou posloupností, kdy je možné ve formulacích pouze nahradit reálné číslo pouze číslem komplexním. Podobně obdržíme i analogické výsledky pro řady komplexních čísel s výjimkou kritérii konvergence řad s kladnými členy (relace srovnání se pro komplexní čísla nezavádí). Výsledky s absolutní konvergencí modifikujeme nahrazením absolutní hodnoty jeho „rozšířením na \mathbb{C} “ – velikostí komplexního čísla. Situaci budeme ilustrovat v následujícím příkladě.

Příklad 3.4. Rozhodněte o absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ a určete součty reálné a imaginární části této řady.

Řešení. Tato řada je geometrickou řadou s kvocientem $q = z$ a pro $|z| < 1$ konverguje absolutně a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Využijeme-li skutečnosti, že reálná resp. imaginární část součtu je součtem reálných resp. imaginárních částí členů řady spolu s goniometrickým tvarem $z = r(\cos \alpha + j \sin \alpha)$, odvodíme pro $|r| < 1$ součty dvou reálných řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha + j \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Tedy platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\alpha = \Im m \frac{1}{1 - r(\cos \alpha + j \sin \alpha)} \frac{1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha}{1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha} = \frac{r \sin \alpha}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha = \Re e \frac{1}{1 - r(\cos \alpha + j \sin \alpha)}$$

$$= \Re e \frac{(1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha)}{(1 - r \cos \alpha - rj \sin \alpha)(1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha)}$$

$$= \frac{1 - r \cos \alpha}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha}$$

□

3.2.1 Mocninné řady

Situace je analogická i pro mocninné řady. Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ nastane jedna ze tří následujících možností:

1. řada konverguje pouze ve svém středu z_0 ,
2. řada konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$,
3. existuje reálné číslo $0 < r$ (poloměr mocninné řady) takové, že řada konverguje pro všechna z taková, že $|z - z_0| < r$ a diverguje pro všechna z taková, že $|z - z_0| > r$.

Výše uvedené číslo r nazýváme **poloměrem** mocninné řady v prvním případě definujeme $r = 0$ ve druhém případě klademe $r = \infty$ a ve třetím případě r můžeme určit:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (3.3)$$

Poznamenejme, že z existence $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ plyne také existence $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ a jejich rovnost a navíc existuje-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ je tato rovna $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Mocninné řady jsou důležitým pojmem, neboť umožňují definovat některé funkce komplexní proměnné pomocí Taylorovy řady známé z reálného oboru, což zaručuje, že takto definované funkce jsou pro reálná čísla shodné s původní funkcí.

3.3 Funkce reálné proměnné

Definice 3.5. **Funkcí reálné proměnné** rozumíme každé zobrazení $z(t) = x(t) + jy(t)$ podmnožiny reálných čísel do \mathbb{C} . Řekneme, že funkce $z(t)$ je **spojitá**, je-li dvojice reálných funkcí $x(t), y(t)$ spojitá. Řekneme, že funkce $z(t)$ má **derivaci**, jestliže funkce $x(t), y(t)$ mají derivaci a definujeme $z'(t) = x'(t) + jy'(t)$.

Ukážeme si některé interpretace funkce reálné proměnné.

- Impedance sériového RL obvodu je funkcí frekvence ω připojeného střídavého napětí $u(t) = \sin \omega t$ podle vztahu

$$Z(\omega) = R + j\omega L.$$

Podobně pro sériový RC obvod je impedance funkcí frekvence ω připojeného střídavého napětí $u(t) = \sin \omega t$ definovaná vztahem

$$Z(\omega) = R + \frac{1}{j\omega C}.$$

- Další ukázkou využití funkce reálné proměnné je zavedení komplexní charakteristiky harmonických kmitů, které popisují funkce

$$F(t) = F \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{resp.} \quad F(t) = F \sin(\omega t + \varphi).$$

Tyto vztahy je možné popsat jedinou komplexní funkcí reálného argumentu, která se nazývá komplexní tvar harmonického kmitu (komplexním kmitem):

$$F(t) = F(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) = F e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{F} e^{j\omega t},$$

kde $\hat{F} = F e^{j\varphi}$ nazýváme komplexní amplitudou, reálné číslo F je amplitudou kmitů a $\varphi = \arg \hat{F}$ se nazývá fázový posun. S využitím exponenciálního tvaru komplexního čísla snadno pro nenulový součet dvou komplexních kmitů (se stejnou frekvencí ω)

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = \hat{F}_1 e^{j\omega t} + \hat{F}_2 e^{j\omega t} = (\hat{F}_1 + \hat{F}_2) e^{j\omega t},$$

odvodíme, že má komplexní amplitudu ve tvaru součtu komplexních amplitud tj.

$$\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2.$$

- Funkce reálné proměnné bývá často interpretována jako pohyb v Gaussově rovině, neboť proměnnou t interpretujeme jako čas a dvojici $[x(t), y(t)]$ jako souřadnice bodu v čase t . Tato interpretace tvoří základ pro zavedení pojmu křivka.

3.3.1 Křivky v \mathbb{C}

Definice 3.6. Křivkou rozumíme každé spojitě zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$. Bod $\varphi(a)$ nazýváme **počátečním bodem** křivky a bod $\varphi(b)$ nazýváme **koncovým bodem** křivky φ . Množinu všech bodů křivky $[\varphi] = \{\varphi(t) | t \in \langle a, b \rangle\}$ nazýváme **grafem** křivky φ .

Důležitým geometrickým pojmem je tečna resp. polotečna.

Definice 3.7. Nechť $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka. Řekneme, že křivka φ má v bodě $t \in \langle a, b \rangle$ **polotečnu zprava** právě když existuje konečná limita

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{|\varphi(t+h) - \varphi(t)|} = T^+_{\varphi}(t).$$

Analogicky definujeme **polotečnu zleva** pro bod $t \in \langle a, b \rangle$. Řekneme, že křivka φ má v bodě $t \in \langle a, b \rangle$ **tečnu**, jestliže má polotečnu zleva i zprava a $T^-_{\varphi}(t) = T^+_{\varphi}(t)$.

Podíl rozdílu funkčních hodnot křivky dělený jeho modulem má jednotkový modul a tedy i v definici uvedené limity mají jednotkovou velikost. Dostatečnou podmínku existence těchto objektů popisuje následující věta.

Věta 3.8. *Nechť má křivka $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ v bodě $t \in \langle a, b \rangle$ nenulovou derivaci zprava $\varphi'_+(t)$ resp. nenulovou derivaci zleva $\varphi'_-(t)$ resp. nenulovou derivaci $\varphi'(t)$ potom existuje v bodě t ke křivce polotečna zprava resp. polotečna zleva resp. tečna a platí*

$$T^+_{\varphi}(t) = \frac{\varphi'_+(t)}{|\varphi'_+(t)|} \quad \text{resp.} \quad T^-_{\varphi}(t) = \frac{\varphi'_-(t)}{|\varphi'_-(t)|} \quad \text{resp.} \quad T_{\varphi}(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

Příkladem křivky, která nemá v bodě $t = 0$ tečnu může být $\varphi(t) = t^3 + j\sqrt{t^6}$. Poznamenejme, že nulovost derivace $\varphi'(t)$ neznamena neexistenci tečny viz například $\varphi(t) = t^3 + jt^3$ pro $t = 0$.

V geometrii se obvykle pod pojmem křivka rozumí její graf tj. $[\varphi]$. Potom proces nalezení zobrazení $\varphi : D_{\varphi} \rightarrow \mathbb{C}$ se zadanou množinou $[\varphi]$ nazýváme parametrizací křivky. Tento proces nemá jednoznačný výsledek viz následující příklad.

Příklad 3.9. Nalezněte různé parametrizace úsečky AB , pro A, B různá komplexní čísla.

Řešení. Ukážeme 4 různé parametrizace z nich poslední je odlišná.

1. $\varphi(t) = A + (B - A)t, t \in \langle 0, 1 \rangle$
2. $\varphi(t) = A + (B - A) \sin t, t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$
3. $\varphi(t) = B + (B - A) \cos t, t \in \langle \pi, 3\pi/2 \rangle$
4. $\varphi(t) = A + (B - A) \sin^2 t, t \in \langle 0, 3\pi/2 \rangle$

Představíme-li si uvedené funkce jako pohybové rovnice, to jest parametr t interpretujeme jako čas a $\varphi(t)$ jako polohu bodu v čase t ($\varphi'(t)$ je vektor okamžité rychlosti), získáme 4 různé pohyby po dané úsečce. V prvním případě se jedná o pohyb rovnoměrný přímočarý ve směru $B - A$ s konstantní rychlostí $|\varphi'(t)| = |B - A|$. Ve druhém případě se jedná o pohyb zpomalený, neboť $|\varphi'(\pi/2)| = (B - A) \cos \pi/2 = 0$. Ve třetím případě se jedná o pohyb zrychlený, neboť $|\varphi'(\pi)| = (B - A) \sin 0 = 0$. A čtvrtý pohyb se od zbývajících odlišuje, neboť se bod nejdříve pohybuje z bodu A do bodu B ($0 \leq t \leq \pi/2$) potom zpět ($\pi/2 \leq t \leq \pi$) a nakonec znovu z bodu A do bodu B ($\pi \leq t \leq 3\pi/2$). \square

Nechť pro dvě křivky $\varphi_1 : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_2 : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, platí že koncový bod první křivky splývá s počátečním bodem druhé křivky, tj. $\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$. Potom definujeme jako jejich **součet** $\varphi_1 + \varphi_2$ takovou křivku, že pohyb po křivce φ_1 , který skončí v bodě $\varphi_1(b)$ pokračuje po křivce φ_2 v bodě $\varphi_2(c)$.

Jestliže splývá koncový a počáteční bod křivky $\varphi(a) = \varphi(b)$, nazýváme křivku **uzavřenou**. Křivku nazveme **prostou**, jestliže $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ pro všechny body $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$ splňující $0 < |t_1 - t_2| < b - a$. každou uzavřenou prostou křivku nazýváme **Jordanovou** křivkou. Pro Jordanovy křivky platí věta.

Věta 3.10. *Nechť φ je Jordanova křivka v \mathbb{C} . Potom platí*

$$\mathbb{S} - [\varphi] = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

kde Ω_1, Ω_2 jsou neprázdné disjunktní oblasti, jejichž společnou hranicí je graf křivky $[\varphi]$.

Podobně je třeba v návaznosti na „geometrické zvyklosti“ řešit otázku **orientace** křivky, která znamená směr pohybu. Je zřejmé, že různé křivky (pohyby) mohou mít stejný graf a často o křivce hovoříme jako o parametrizaci množiny $[\varphi]$. Z pohledu praktických aplikací často nezáleží na volbě konkrétní křivky (pohybu), ale na jejím grafu $[\varphi]$ např. velikost práce. Orientaci křivky, která není uzavřená popíšeme stanovením počátečního a koncového bodu grafu $[\varphi]$. U Jordanovy křivky (je uzavřená a rovinu rozděluje na vnějšek a vnitřek) je směr pohybu dán tím, že při pohledu ve směru pohybu máme vnitřek křivky po levé straně (křivku procházíme proti směru chodu hodinových ručiček) nebo po pravé straně (křivku procházíme po směru chodu hodinových ručiček). V prvním případě hovoříme o **kladné orientaci** a ve druhém o **záporné orientaci** křivky.

3.4 Funkce komplexní proměnné

Definice funkce komplexní proměnné musí zohlednit fakt, že některé elementární funkce nejsou prosté a k nim inverzní funkce obecně neexistují, což v reálném oboru je „řešeno“ zúžením dané funkce na interval kde je původní funkce prostá. Již v Příkladě 3.1 jsme dostali dvě hodnoty druhé odmocniny

$$\sqrt{-24 - 10j} = \pm(1 - 5j) \Leftrightarrow (\pm(1 - 5j))^2 = -24 - j10.$$

Proto v komplexním oboru připouštíme obecnější definici.

Definice 3.11. Je-li ke každému komplexnímu číslu $z = x + jy \in G \subseteq \mathbb{S}$ přiřazeno nějakým předpisem f alespoň jedno komplexní číslo $w = u + jv \in \mathbb{S}$, řekneme, že na množině G je definována **komplexní funkce komplexní proměnné z** a tuto skutečnost zapisujeme vztahem $w = f(z)$. Množinu $D(f) = G$ nazýváme **definiční obor** funkce $f(z)$. Množinu $H(f) = \{w | w = f(z) | z \in D(f)\} \subseteq \mathbb{S}$ nazýváme **oborem hodnot** funkce $f(z)$. Je-li $H(f) \subseteq \mathbb{C}$ nazýváme funkci $f(z)$ **konečnou**.

Jestliže je funkce zobrazení tj. přiřazuje každému číslu $z \in D(f)$ právě jedno číslo $w = u + jv \in \mathbb{S}$, říkáme, že funkce $f(z)$ je **jednoznačná** a můžeme ji vyjádřit pomocí dvojice reálných funkcí:

$$w = f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Funkci $u(x, y)$ nazýváme **reálná část** funkce $f(z)$ a značíme ji $\Re w$ nebo $\Re f(z)$, funkci $v(x, y)$ nazýváme **imaginární část** funkce $f(z)$ a značíme ji $\Im w$ nebo $\Im f(z)$.

Jestliže funkce $f(z)$ není jednoznačná, říkáme, že je **mnohoznačná**. Je-li $f(z)$ funkce mnohoznačná budeme jednoznačnou funkci $\hat{f}(z)$ nazývat **jednoznačnou větví funkce $f(z)$** , jestliže platí $D(\hat{f}) \subseteq D(f)$ a $\hat{f}(z) \in f(z)$ pro všechna $z \in D(f)$.¹

¹Jestliže je $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, řekneme, že na množině $D(f)$ je definována **komplexní funkce reálné proměnné z** . Podobně můžeme definovat **reálnou funkci komplexní proměnné**.

Příkladem dvouznačné funkce je druhá odmocnina \sqrt{z} , kdy každému $z \neq 0$ jsou přiřazeny 2 hodnoty. Funkci \sqrt{z} můžeme chápat jako sjednocení dvou jednoznačných větví

$$\widehat{\sqrt{z}} = \{[z, w] \mid w^2 = z \wedge \text{Arg } w = \text{Arg } z/2\} \quad \widehat{\sqrt{z}} = \{[z, w] \mid w^2 = z \wedge \text{Arg } w = \text{Arg } z/2 \pm \pi\},$$

kde znaménko před π volíme tak, že je opačné než u $\Im z$. Obecně je pro přirozené n funkce $\sqrt[n]{z}$ n -značnou funkcí.

V dalším textu budou tvrzení o komplexních funkcích $f(z)$ formulována pomocí vlastností dvojice reálných funkcí dvou proměnných $\Re f = u(x, y)$ a $\Im f = v(x, y)$. Z toho vyplývá nutnost umět najít reálnou a imaginární složku dané funkce. Z důvodu stručnosti budeme v dalším místo označování $u(x, y)$ a $v(x, y)$ často používat zkrácené označování u a v .

Příklad 3.12. *Určení reálné a imaginární části funkce $f(z)$*

Je dána komplexní funkce $w = z^2 + jz$. Najděte její reálnou a imaginární část.

Řešení. Komplexní číslo $z = x + jy$ je v algebraickém tvaru viz Definice 3.11. Proto

$$\begin{aligned} w = z^2 + jz &= (x + jy)^2 + j(x + jy) = x^2 + 2jxy + j^2y^2 + jx + j^2y = \\ &= x^2 + 2jxy - y^2 + jx - y = x^2 - y^2 - y + j(2xy + x). \end{aligned}$$

Reálná část zadané funkce je $u = \Re w = x^2 - y^2 - y$ a imaginární část zadané funkce je $v = \Im w = 2xy + x$. Definičním oborem zadané funkce může být celá množina \mathbb{C} , resp. libovolná její podmnožina. \square

3.4.1 Grafické znázornění funkce komplexní proměnné

Vzhledem k tomu, že kartézský součin $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ má čtyřrozměrný geometrický model vzniká problém s grafickým znázorněním komplexních funkcí. Zpravidla volíme model dvou Gaussových rovin přičemž v první, obsahující Df , body označujeme z a body druhé roviny používané na zobrazování funkčních hodnot označujeme w . Charakter funkce pak demonstrujeme tak, že ke zvolené množině A (bod, křivka, oblast...) v rovině z ukážeme odpovídající množinu $f(A)$ v rovině w . V případě více množin je můžeme ztotožnit popisky nebo odpovídající množiny spojit šipkami. Některé funkce realizují známá zobrazení rovin. Například funkce $f(z) = z + a$ realizuje translaci (posunutí) o vektor $(\Re a, \Im a)$, otočení roviny se středem v počátku o úhel α realizuje funkce $f(z) = az$, kde $|a| = 1$ a $\arg a = \alpha$. Funkce $f(z) = \bar{z}$ realizuje osovou symetrii okolo reálné osy, dále funkce $f(z) = 1/z$ realizuje složení dvou zobrazení a sice kruhové inverze v rozšířené rovině \mathbb{S} (vnitřek kruhu se středem v počátku se zobrazí na jeho vnějšek a naopak) s výše zmíněnou osovou symetrií kolem osy $\Re z$. Využití funkce $f(z) = 1/z$ souvisí v elektrotechnice s pojmem admitance [18, str. 58].

Příklad 3.13. Graficky znázorněte přímku $6x - 8y - 1 = 0$ a její obraz funkcí $f(z) = \frac{1}{z}$.

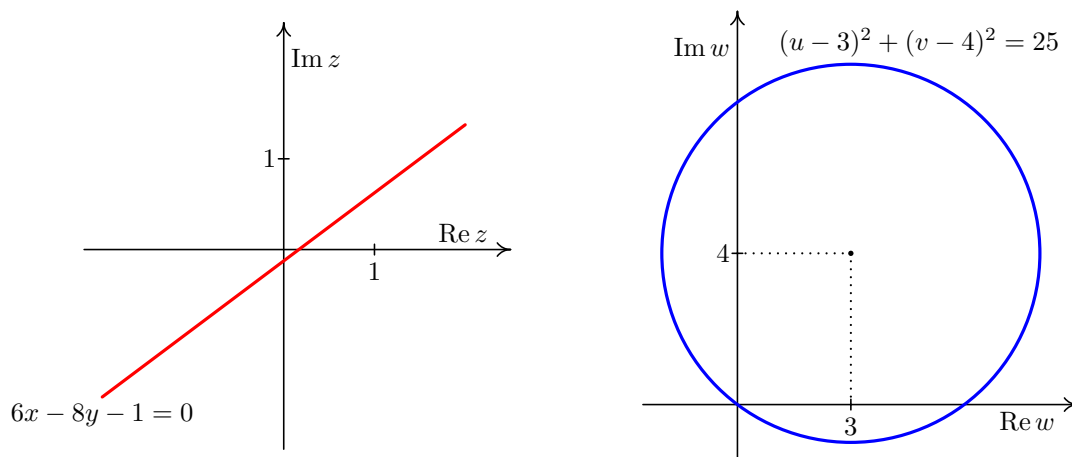
Řešení. Nejdříve vyjádříme proměnné x a y pomocí proměnných u, v :

$$w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow u + jv = \frac{1}{x + jy} \Leftrightarrow x + jy = \frac{1}{u + jv} = \frac{u - jv}{u^2 + v^2} \Leftrightarrow x = \frac{u}{u^2 + v^2} \wedge y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Jejich dosazením do rovnice přímky dostaneme

$$6 \frac{u}{u^2 + v^2} - 8 \frac{-v}{u^2 + v^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 6u + 8v - u^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow (u - 3)^2 + (v - 4)^2 = 25,$$

tj. rovnici kružnice se středem $3 + 4j$ o poloměru 5. Tomu odpovídá obrázek:



□

Složením výše uvedených funkcí můžeme vytvořit lineárně lomenou funkci

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Protože tato funkce má značný význam v elektrotechnice, při popisu globálních charakteristik elektrostatických polí viz [18, str. 58], uvedeme některé důležité vlastnosti této funkce, které platí za předpokladu $ad - bc \neq 0$.

- $f(z)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny \mathbb{S} na sebe ($f(-d/c) = \infty$, $f(\infty) = a/c$).
- Tato funkce zobrazuje množinu všech kružnic a přímek na sebe.
- pro libovolné body z_1, z_2, z_3, z platí

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{f(z) - f(z_2)} : \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Pomocí těchto vlastností lze odvodit koeficienty lineárně lomené funkce na základě předem zvolených geometrických atributů dané funkce.

Příklad 3.14. Graficky znázorněte funkci $w = u + jv = \frac{z - 1 - j}{z + 1 - j}$, tak, že zobrazíte systém přímek procházejících bodem $z_0 = 1 + j$ a systém soustředných kružnic se středem v tomto bodě.

Řešení. Budeme postupovat analogicky s předchozím případem. Proměnné z a w nahradíme proměnnými proměnou x, y a u, v :

$$u + jv = \frac{x + jy - 1 - j}{x + jy + 1 - j} = \frac{x - 1 + j(y - 1)}{x + 1 + j(y - 1)}.$$

Dále vyjádříme proměnné x, y jako funkce proměnných u, v :

$$x = \frac{1 - u^2 - v^2}{(u - 1)^2 + v^2} \quad y = \frac{(u - 1)^2 + v^2 + 2v}{(u - 1)^2 + v^2},$$

Jejich dosazením do rovnic křivek v rovině z získáme rovnice odpovídajících obrazů těchto křivek v rovině w .

Pro přímky $k(x - 1) = y - 1$ dostáváme rovnice kružnic $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k^2}$:

$$\begin{aligned} 0 &= k \left(\frac{1 - v^2 - u^2}{1 - 2u + v^2 + u^2} - 1 \right) - \frac{u^2 + 1 - 2u + 2v + v^2}{1 - 2u + v^2 + u^2} + 1 = \frac{2(kv^2 + ku^2 - ku + v)}{1 - 2u + v^2 + u^2} \\ &\Leftrightarrow k \left(v^2 + \frac{v}{k} + \frac{1}{4k^2} + u^2 - u + \frac{1}{4} - \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow \left(v + \frac{1}{2k} \right)^2 + \left(u - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že pro všechna k kružnice procházejí dvěma body 0 a 1. Pro kružnice $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = k^2$ dostáváme po dosazení 2 možnosti:

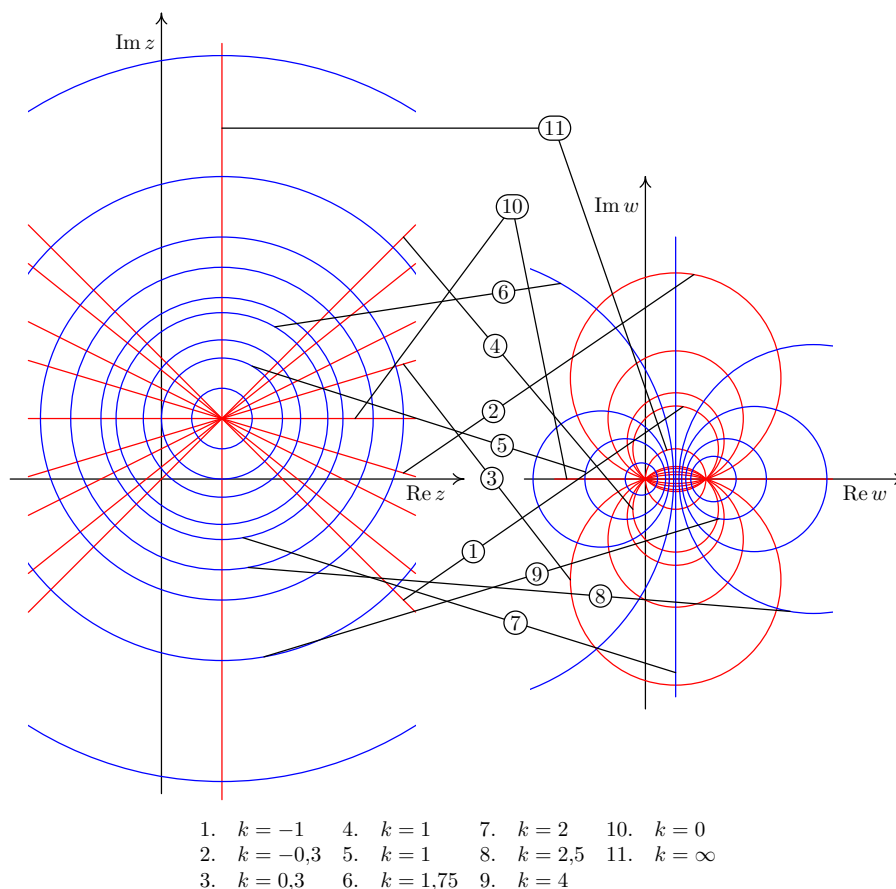
$$\begin{aligned} k^2 &= \left(\frac{1 - v^2 - u^2}{(u - 1)^2 + v^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{(u - 1)^2 + v^2 + 2v}{(u - 1)^2 + v^2} - 1 \right)^2 = \frac{4(-u^2 - v^2 + u)^2 + 4v^2}{((u - 1)^2 + v^2)^2} = \frac{4(u^2 + v^2)}{(u - 1)^2 + v^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{k^2}{4}((u - 1)^2 + v^2) = u^2 + v^2. \end{aligned}$$

1. pro $k = 2$ jde rovnici přímky $u = 1/2$,
2. pro $k \neq 2$ po úpravách získáme

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{4}(u^2 - 2u + 1 + v^2) &= u^2 + v^2 \Leftrightarrow u^2 \frac{k^2 - 4}{4} - 2u \frac{k^2}{4} + v^2 \frac{k^2 - 4}{4} = -\frac{k^2}{4} \Leftrightarrow \\ u^2 - 2u \frac{k^2}{k^2 - 4} + \frac{k^4}{(k^2 - 4)^2} + v^2 &= -\frac{k^2}{k^2 - 4} + \frac{k^4}{(k^2 - 4)^2} = \frac{4k^2}{(k^2 - 4)^2}, \end{aligned}$$

což jsou rovnice kružnic: $\left(u - \frac{k^2}{k^2 - 4}\right)^2 + v^2 = \frac{4k^2}{(k^2 - 4)^2}$.

Následující obrázek ukazuje několik zobrazovaných křivek. Zároveň je obrázek vpravo ve shodě s interpretací elektrického pole dvou opačně nabitých rovnoběžných vláken, v němž modré čáry vyznačují ekvipotenciály a červené silokřivky podobně jako obrázek vlevo lze interpretovat jako pole jednoho nabitého vlákna.



□

V dalším příkladě se budeme zabývat dvojicí funkcí $f(z) = z^2$ a jednoznačnou větví funkce $f(z) = \sqrt{z}$ určenou podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$.

Příklad 3.15. V polorovině $\Im m z \geq 0$ proveďte grafické znázornění funkce $f(z)$, která je jednoznačnou větví funkce \sqrt{z} určené podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$, pro polopřímky $x = k \wedge y > 0$ a přímky $y = l$, kde $k \geq 0$ a l jsou reálné konstanty. Poznamenejme že, podobně jako předchozím příkladě se jedná o ortogonální systémy křivek (tj. libovolné dvě křivky z různých systémů jsou na sebe kolmé)

Řešení. V tomto příkladě můžeme postupovat tak, že určíme reálnou část $u = \Re f(z)$ a imaginární část $v = \Im f(z)$ funkce dále dosazením $x = k$ resp. $y = l$ dostaneme zobrazení daných přímek. Postupovat budeme podobně jako v Poznámce 3.2:

Nejdříve určíme $|z|$ a $\cos \text{Arg } z$ $z = x + jy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + j \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ a pomocí nich $|f(z)|$ a $\cos \text{Arg } f(z)$, $\sin \text{Arg } f(z)$. Platí totiž $|f(z)| = \sqrt{|z|} = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ a $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } f(z)$.

Pro $y \neq 0$ dostáváme

$$\cos \operatorname{Arg} f(z) = \sqrt{\frac{1 + \cos \operatorname{Arg} z}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{x^2 + y^2} + x)}}{2\sqrt[4]{x^2 + y^2}},$$

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{Arg} f(z) &= \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{1 - \cos \operatorname{Arg} z}{2}} = \\ &= \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{2}} = \operatorname{sgn}(y) \frac{\sqrt{2(\sqrt{x^2 + y^2} - x)}}{2\sqrt[4]{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

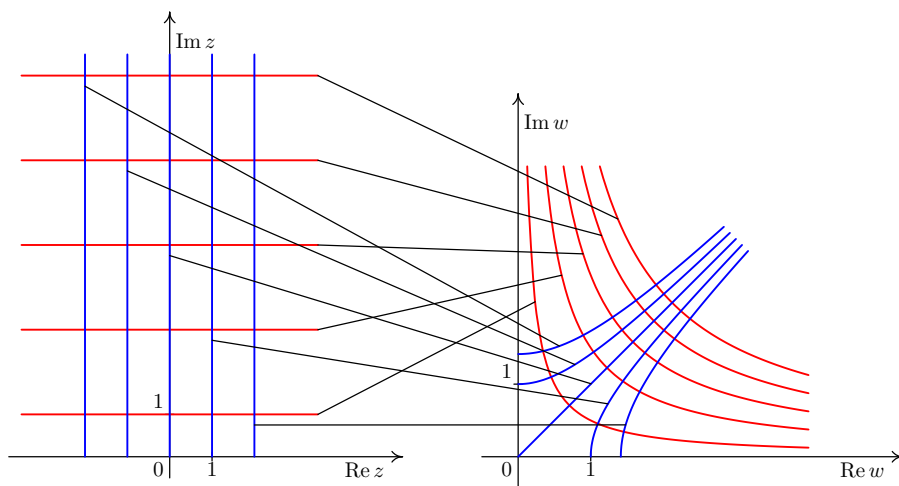
Dosazením do goniometrického tvaru dostaneme $f(z)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left(\frac{\sqrt{2(\sqrt{x^2 + y^2} + x)}}{2\sqrt[4]{x^2 + y^2}} + j \operatorname{sgn}(y) \frac{\sqrt{2(\sqrt{x^2 + y^2} - x)}}{2\sqrt[4]{x^2 + y^2}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} + j \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}. \end{aligned}$$

Pro $y = 0$ dostáváme

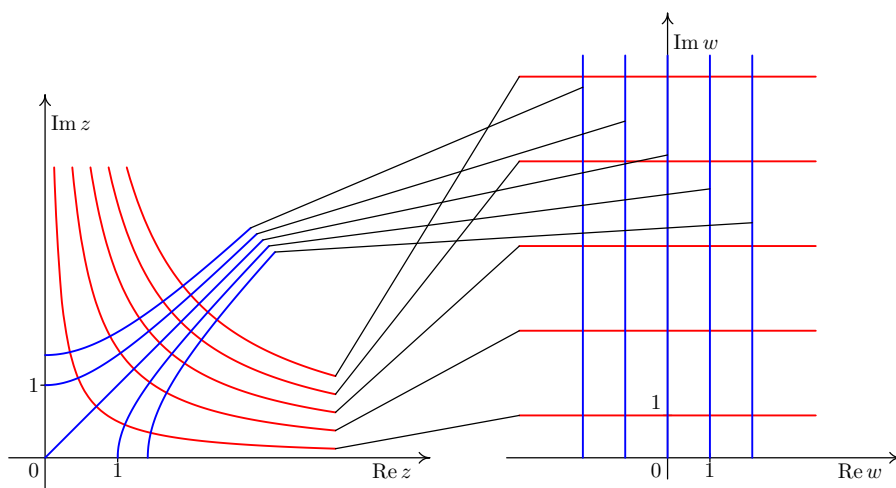
$$f(z) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{pro } x > 0; \\ j\sqrt{-x}, & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Poznamenejme, že ve výše uvedeném případě se již jedná o reálnou funkci $\sqrt{\cdot}$. Pro $y > 0$ obrazy polopřímek $x = \text{konst.}$ a $y > 0$ a přímek $y = \text{konst.}$ a $x > 0$ budou v prvním kvadrantu jako části grafů hyperbol:



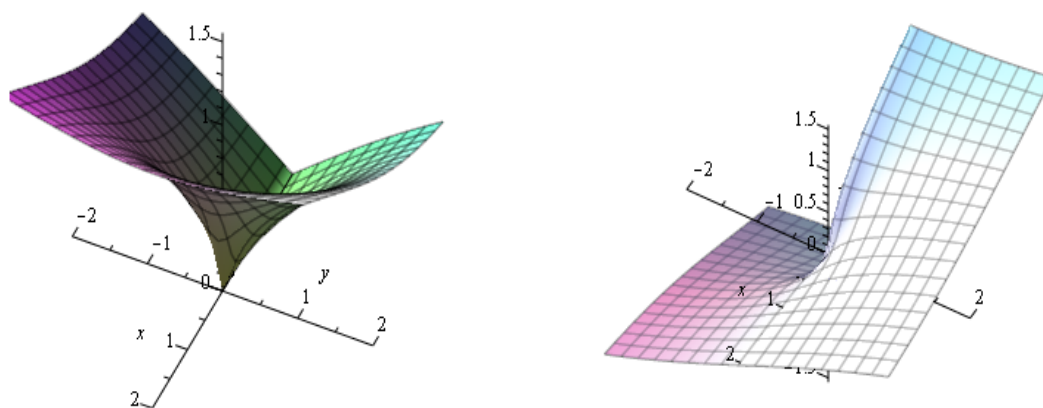
I v tomto příkladě lze obrázek vpravo interpretovat jako ekvipotenciály (modré hyperboly) a siločivky (červené hyperboly) elektrostatického pole dvou na sebe kolmých stěn.

Vzhledem ke skutečnosti, že \sqrt{z} a z^2 jsou inverzní funkce, lze pouhým „otočením“ šipek (záměnou rovin z a w) získat grafické znázornění funkce z^2 , která zobrazuje hyperboly z prvního kvadrantu na přímky a polopřímky:



□

Druhou možností jak zobrazovat funkci komplexní proměnné $f(z) = f(x + jy)$ je dvojice funkcí dvou proměnných $\Re f(x + jy) = u(x, y)$ a $\Im f(x + jy) = v(x, y)$. Výhodou tohoto způsobu zobrazení je možnost snadného určení některých vlastností jako je např. spojitost, diferencovatelnost, atd. Situaci můžeme předvést na jednoznačné větvi funkce \sqrt{z} určené podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$.



Obr. 3.1: Reálná část $u(x, y)$ a imaginární část $v(x, y)$ funkce \sqrt{z} .

Z grafu je patrné, že jednoznačná větev funkce \sqrt{z} určená podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$ má imaginární část nespojitou na záporné části reálné osy a reálná část není tamtéž diferencovatelná.

3.5 Limita, spojitost

V dalším textu bude platit úmluva, že budeme o konečných funkcích obecně předpokládat jejich jednoznačnost, nebude-li zdůrazněn opak, neboť budeme převážně pracovat s konečnými a jednoznačnými funkcemi (zobrazeními) a také proto, abychom dosáhli co největší analogie s učebním textem Matematika 1 pro první semestr.

Definice 3.16. Nechť z_0 je hromadným bodem množiny $Df \subseteq \mathbb{S}$. Dále nechť $U(z_0)$ je okolí bodu z_0 . Řekneme, že funkce $f(z)$ má v bodě z_0 **limitu w_0 vzhledem k množině M** , kde $M \subseteq Df$, jestliže ke každému kruhovému okolí $U(w_0)$ existuje alespoň jedno prstencové okolí $P(z_0)$ takové, že pro všechna $z \in P(z_0) \cap M$ platí:

$$f(z) \in U(w_0).$$

Tuto skutečnost zapíšeme $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0$.

Vynecháme-li v definici množinu M a nahradíme-li předpoklad $z \in P(z_0) \cap M$ pouze $z \in P(z_0)$ (totéž jako volba $M = \mathbb{C}$) získáme tak definici **limity funkce $f(z)$** v bodě z_0 a tuto zapisujeme jako $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

Věta 3.17. *Funkce $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má v bodě $z_0 = x_0 + jy_0$ limitu $u_0 + jv_0$ právě tehdy, když její složky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají v bodě $[x_0, y_0]$ limitu a pro reálnou část je tato rovna u_0 a pro imaginární část je rovna v_0 .*

Tato věta umožňuje přenést známé věty o limitách funkcí dvou reálných proměnných pro funkce komplexní proměnné, jedná se především o věty jako jsou věty o existenci nejvýše jedné limity o limitách součtu, rozdílu, součinu, podílu.

Definice 3.18. Nechť $w = f(z)$ je komplexní funkce a dále buď $z_0 \in Df$. Jestliže existuje limita $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ a platí, že

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

řekneme, že funkce $w = f(z)$ je **spojitá v bodě z_0** .

O spojitosti funkce $f(z)$ v bodě lze ve shodě s Větou 3.17 rozhodnout podle chování její reálné a imaginární části.

Věta 3.19. *Funkce $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ je spojitá v bodě $z_0 = x_0 + jy_0$ právě tehdy, když její složky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ jsou spojité v bodě $[x_0, y_0]$.*

3.6 Derivace funkce komplexní proměnné

Pojem *derivace funkce komplexní proměnné* se opět zavádí podobně jako v reálném oboru pro funkci jedné reálné proměnné.

Definice 3.20. Necht' je funkce $f(z)$ definována na nějakém okolí $U(z_0)$ bodu z_0 . **Derivací funkce $f(z)$ v bodě z_0** definujeme jako limitu

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (3.4)$$

Derivaci funkce $f(z)$ v bodě z_0 značíme $f'(z_0)$. Existuje-li derivace $f'(z)$ v nějakém okolí $U(z_0)$, pak se funkce nazývá **holomorfní¹ v bodě $f(z_0)$** . Existuje-li derivace $f'(z)$ v každém bodě oblasti G , pak řekneme, že funkce $f(z)$ je **holomorfní** na G .

Formální definice derivace je prakticky totožná s definicí v reálném oboru, proto v mnohých příkladech můžeme postupovat analogicky, např. při nalezení derivace funkce $w = z^n$:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h-z) \sum_{i=1}^n (z+h)^{i-1} z^{n-i}}{h} = nz^{n-1}.$$

I když je formální definice derivace prakticky totožná s definicí v reálném oboru, musíme mít na paměti, že celá řada komplexních funkcí – např. funkce $w = \bar{z}$ – nemá derivaci nebo má jiné vlastnosti v návaznosti na jiné vlastnosti funkcí viz např. již zmiňovaná mnohoznačnost funkcí. Pro praktické ověřování, zda funkce má nebo nemá derivaci, slouží následující věta:

Věta 3.21. Necht' je dán bod $z_0 = x_0 + jy_0$. Označme $P = [x_0, y_0]$. Funkce $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má v bodě z_0 derivaci právě tehdy, když

1. funkce $\Re f(z) = u(x, y)$, $\Im f(z) = v(x, y)$ mají v bodě P totální diferenciál,
2. platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky²

$$u'_x(P) = v'_y(P) \quad u'_y(P) = -v'_x(P). \quad (3.5)$$

Funkce $f(z)$ má derivaci v bodě z_0 ve tvaru

$$f'(z_0) = u'_x(P) + jv'_x(P) = v'_y(P) - ju'_y(P). \quad (3.6)$$

Důkaz. V důkazu se omezíme pouze na ověření uvedených vzorců. Z existence limity $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ plyne existence a rovnost limit po přímkách rovnoběžných s reálnou a imaginární osou ($y = y_0, x = x_0$):

¹Často se také používá označení *analytická* nebo *regulární*.

² někdy jsou také nazývány d'Alambert-Eulerovy podmínky

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + jv(x, y_0) - (u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0))}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + j \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = u'_x(x_0, y_0) + jv'_x(x_0, y_0),$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + jv(x_0, y) - (u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0))}{jy - jy_0} =$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{jy - jy_0} + j \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{jy - jy_0} = -ju'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0).$$

Dokázali jsme tak vzorec (3.6), jehož důsledkem jsou rovnosti (3.5). \square

Poznamenejme, že je možné odvodit i další tvary Cauchy-Riemannových podmínek v závislosti na použitém tvaru (goniometrický, exponenciální) závislé a nezávislé proměnné viz [18, str. 53]

Příklad 3.22. Pro níže uvedené funkce nalezněte body, ve kterých existuje derivace a určete ji.

1. Najděte derivaci funkce $w = \bar{z} = x - jy$.

Řešení. Nejprve nalezneme reálnou a imaginární část zadané funkce. Zřejmě je $w = \bar{z} = x - jy$, tj. $u = \Re w = x$ a $v = \Im w = -y$.

Uřídíme příslušné parciální derivace požadované ve Větě 3.21. Dostáváme: $u'_x = 1$, $u'_y = 0$, $v'_x = 0$, $v'_y = -1$. Vidíme, že podmínky (3.5) nejsou splněny pro žádný bod $z_0 = x_0 + jy_0$, resp. $P_0 = [x_0, y_0]$. Derivace funkce $w = \bar{z}$ tedy neexistuje v žádném bodě definičního oboru. \square

2. Najděte derivaci funkce $w = |z|^2$.

Řešení. Protože $w = |z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$ je funkce s reálnými funkčními hodnotami, máme $u = \Re w = x^2 + y^2$ a $v = \Im w = 0$.

Uřídíme parciální derivace požadované ve Větě 3.21: $u'_x = 2x$, $u'_y = 2y$, $v'_x = v'_y = 0$. Vidíme, že podmínky (3.5) jsou splněny pouze pro bod $z_0 = 0$, resp. $P_0 = [0, 0]$. Pro derivaci funkce $w = |z|^2$ platí, že existuje pouze v jediném bodě a $f'(0) = 0$. V reálném oboru má daná funkce $|x|^2 = x^2$ derivaci pro všechna $x \in \mathbb{R}$. \square

Použitelnost dané věty je třeba vždy zvážit, neboť pro srovnání s přímým výpočtem uveďme pouze určení reálné a imaginární části funkce z^n :

$$w = z^n = (x + jy)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} (jy)^i =$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} x^{n-2k} (-1)^k y^{2k} + j \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} (-1)^k y^{2k+1}.$$

Podobně jako ve výše uvedeném odvození derivace funkce z^n z definice můžeme postupovat a odvodit i stejná pravidla jako v reálném oboru pro derivaci **lineární kombinace funkcí**, **součinu** a **podílu** dvou funkcí. Totéž platí také pro **derivování složené funkce** a **funkce inverzní**.

U derivace inverzní funkce poznamenejme, že u víceznačných funkcí je možné ji aplikovat na jednoznačné větve. V návaznosti na jejich výběr je třeba uvážit existenci derivace např. pro jednoznačnou větev funkce \sqrt{z} určené podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$ nemá tato derivaci pro nekladná reálná čísla, neboť imaginární složka dané funkce je nespojitá. Naopak užitím věty o derivaci inverzní funkce získáme $(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ což připouští možnost derivaci pro nekladná čísla spočítat, bude-li volena jednoznačná větev funkce jinak.

Podobně platí, že funkce, která je součtem mocninné řady má v každém vnitřním bodě definičního oboru derivaci, která je rovna součtu řady, vzniklé z původní derivováním člen po členu. V další části využijeme vzorec pro derivaci složené funkce ke geometrické interpretaci derivace a Cauchy-Riemannových podmínek.

3.6.1 Geometrický význam Cauchy-Riemannových podmínek a derivace funkce komplexní proměnné

Uvažujme křivky jejichž grafy, prochází bodem $z_0 = x_0 + jy_0$ a vyhovují rovnicím:

$$u(x, y) = u_0 \quad v(x, y) = v_0.$$

Z diferenciálů těchto rovnic dostáváme rovnice tečných přímk k daným křivkám:

$$u'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad v'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

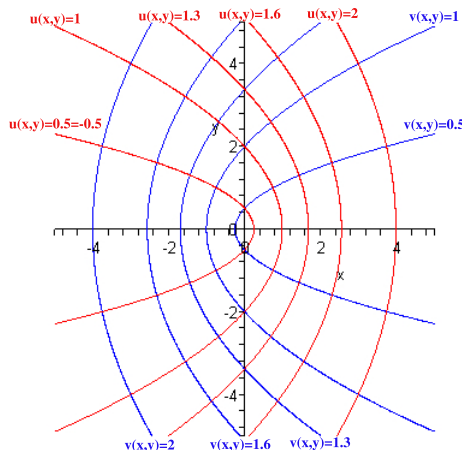
S využitím Cauchy-Riemannových podmínek dostáváme, že normálové vektory těchto přímk $(u'_x(x_0, y_0), u'_y(x_0, y_0))$, $(v'_x(x_0, y_0), v'_y(x_0, y_0))$ jsou na sebe kolmé, neboť mají nulový skalární součin:

$$u'_x(x_0, y_0)v'_x(x_0, y_0) + u'_y(x_0, y_0)v'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Uvedenou skutečnost je možné sledovat na těchto křivkách pro jednoznačnou větev \sqrt{z} určenou podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$, pro kterou jsme v Příkladu 3.15 odvodili

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}, \quad v(x, y) = \text{sgn } y \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}, \quad \text{pro } y \neq 0.$$

V tomto případě jsou křivky $u(x, y) = u_0$, $v(x, y) = v_0$ vzájemně kolmé paraboly.



Porovnáním geometrických charakteristik křivek a jejich obrazů odvodíme geometrickou interpretaci derivace funkce.

Uvažujme funkci $w = f(z)$, která má v bodě $z_0 = x_0 + jy_0$ nenulovou derivaci. Uvažujme křivku $\varphi : z(t) = x(t) + jy(t)$, která má v bodě $[x_0, y_0]$, odpovídající hodnotě $t = t_0$ tečný vektor $T_\varphi(t_0)$. Podobně obraz křivky φ to jest funkce $\Phi : w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + jv(x(t), y(t))$ je křivkou v rovině w . Podle věty o derivaci složené funkce platí:

$$\Phi'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)$$

Protože argument součinu je roven součtu argumentů dostáváme

$$\arg \Phi'(t_0) = \arg f'(\varphi(t_0)) + \arg \varphi'(t_0),$$

což znamená, že tečný vektor obrazu křivky je proti tečnému vektoru křivky otočený o úhel $\arg f'(z_0)$ a tato vlastnost nezávisí na volbě křivky. Analogicky porovnáním modulů

$$|\Phi'(t_0)| = |f'(\varphi(t_0))||\varphi'(t_0)|,$$

dostáváme, že poměr délek je dán tzv. koeficientem dilatace $f'(z_0)$. Otočení o konstantní úhel $\arg f'(z_0)$ má následující důsledek.

Zobrazení realizované holomorfní funkcí $w = f(z)$ zachovává úhly, pod kterými se křivky vzájemně protínají viz Příklady 3.14, 3.15, kdy se ortogonální systémy křivek transformují opět na ortogonální systémy (ekvipotenciály a silokřivky).

3.6.2 Holomorfní a harmonické funkce

Nechť funkce $f(z)$ má derivaci a její reálná část $\Re f(x + jy) = u(x, y)$ resp. imaginární část $\Im f(x + jy) = v(x, y)$ mají parciální derivace druhého řádu, snadno s použitím Cauchy-Riemannových podmínek a Schwarzovy věty o záměně derivování odvodíme, že vyhovují tzv. **Laplaceově rovnici**

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0. \quad (3.7)$$

Definice 3.23. Řekneme, že funkce $u(x, y)$ je **harmonická**, jestliže má spojitě parciální derivace druhého řádu a vyhovuje rovnici (3.7). O dvojici harmonických funkcí

řekneme, že jsou **sdužené harmonické funkce**, jestliže pro ně platí Cauchy-Riemannovy podmínky (3.5).

Jsou-li funkce $u(x, y), v(x, y)$ sdužené harmonické funkce, potom funkce $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ je holomorfní. K dané harmonické funkci u k ní harmonicky sdužená je určena jednoznačně až na aditivní konstantu.

Tuto funkci můžeme nalézt s využitím Cauchy-Riemannových podmínek, neboť tyto určí první parciální derivace sdužené funkce. Při určování této funkce můžeme postupovat tak, že jednu rovnici integrujeme podle té proměnné podle níž je neznámá funkce derivována (při integrování považujeme druhou proměnnou za konstantu). V získané rovnici je neznámá funkce určena až na neznámou funkci druhé proměnné (při zpětném derivování by měla nulovou derivaci). Tuto funkci určíme z rovnice, kterou získáme z obdržené rovnice derivováním podle druhé proměnné než podle které jsme integrovali a porovnáním s parciální derivací, jež je určena z Cauchy-Riemannových podmínek. Uvedený postup budeme ilustrovat na příkladě.

Příklad 3.24. Ověřte, že funkce $v(x, y) = e^{-y} \sin x + 2xy + 3$ je imaginární složkou holomorfní funkce $f(x + jy)$ a tuto funkci najděte, jestliže $f(0) = 2 + 3j$.

Řešení. Ověříme, že funkce $v(x, y)$ je harmonická:

$$\begin{aligned} v'_x &= e^{-y} \cos x + 2y & v'_{xx} &= -e^{-y} \sin x \\ v'_y &= -e^{-y} \sin x + 2x & v'_{yy} &= e^{-y} \sin x. \end{aligned}$$

Tedy $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$, navíc harmonicky sdužená funkce je určena rovnicemi

$$u'_x = v'_y = -e^{-y} \sin x + 2x \quad u'_y = -v'_x = -(e^{-y} \cos x + 2y) = -e^{-y} \cos x - 2y.$$

Integrací první rovnice podle x dostáváme:

$$u = \int (-e^{-y} \sin x + 2x) dx = e^{-y} \cos x + x^2 + h(y).$$

K určení neznámé funkce $h(y)$ porovnáme parciální derivaci podle y funkce získané z předchozí rovnice s druhou podmínkou:

$$-e^{-y} \cos x + h'(y) = u'_y = -e^{-y} \cos x - 2y \Rightarrow h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -y^2 + c.$$

Dosažením funkce $h(y)$ do u a následně do f dostaneme:

$$f(x + jy) = e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + c + j(e^{-y} \sin x + 2xy + 3).$$

K určení integrační konstanty c využijeme podmínku $f(0) = 2 + 3j$:

$$2 + 3j = f(0) = 1 + c + 3j \Rightarrow c = 1.$$

S využitím exponenciálního tvaru komplexního čísla můžeme funkci

$$f(x + jy) = e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + 1 + j(e^{-y} \sin x + 2xy + 3)$$

vyjádřit pomocí proměnné $z = x + jy$:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + 1 + j(e^{-y} \sin x + 2xy + 3) = \\ &= e^{-y}(\cos x + j \sin x) + x^2 - y^2 + j2xy + 1 + 3j = \\ &= e^{-y+jx} + (x + jy)^2 + 1 + 3j = e^{j(x+jy)} + z^2 + 1 + 3j = e^{jz} + z^2 + 1 + 3j. \end{aligned}$$

□

Poznámka 3.25. Při hledání harmonicky sdružené funkce je možné postupovat i jinak. Např. integrací obou rovnic získáme dva tvary hledané funkce, které obsahují neznámé funkce jedné proměnné. Tyto funkce určíme vzájemným porovnáním. Postup ukážeme na předchozím příkladu:

$$e^{-y} \cos x + \underbrace{x^2}_{g(x)} + \underbrace{h(y)}_{h(y)} + c = \int u'_x dx = \int u'_y dy = e^{-y} \cos x \underbrace{-y^2}_{h(y)} + \underbrace{g(x)}_{g(x)} + c$$

Další možností je využití tvrzení, že všechny holomorfní funkce s reálnou částí $u(x, y)$ resp. imaginární částí $v(x, y)$ mají tvar

$$\begin{aligned} f(z) &= 2u \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2j} \right) - u(x_0, y_0) + jC \\ &\text{resp.} \\ f(z) &= 2jv \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2j} \right) - jv(x_0, y_0) + C, \end{aligned}$$

kde $z_0 = x_0 + jy_0$ je vhodně zvolený bod a C je reálná konstanta.

Pro holomorfní funkci $f(x+jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ je možné získat zápis pomocí proměnné z také tak, že do funkcí $u(x, y)$, $v(x, y)$ „dosadíme $x = z$, $y = 0$ resp. $x = 0$, $y = -jz$ “, je-li to možné.

Později ukážeme pro komplexní obor novou důležitou vlastnost holomorfních funkcí na oblasti a sice, že na této oblasti mají derivace všech řádů a jejich hodnota uvnitř oblasti je jednoznačně určena hodnotami na hranici této oblasti.

3.7 Elementární funkce komplexní proměnné

V této pasáži se budeme zabývat rozšířením definic známých reálných funkcí pro komplexní obor. Stejně jako v reálném oboru definujeme polynom a racionální funkci.

Definice 3.26. **Komplexním polynomem** P komplexní proměnné z nazýváme funkci tvaru

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n, \quad (3.8)$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \dots, n$. Je-li $\alpha_n \neq 0$, číslo n nazveme **stupeň komplexního polynomu** $P(z)$; píšeme *st* $P(z)$. **Komplexní racionální funkci** R nazýváme podíl dvou komplexních polynomů $P(z), Q(z)$, takže

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (3.9)$$

Podobně jako reálném oboru je komplexní polynom $P(z)$ spojitou funkcí, která má derivace všech řádů, které se počítají podle stejných pravidel jako v oboru reálném. Aby byly tyto skutečnosti zachovány, je jednou ze základních možností jak definovat tzv. transcendentní funkce jejich definování jako součet mocninné řady, známé z reálné analýzy.

Definice 3.27. Následující vyjádření uvažujeme pro libovolné $z \in \mathbb{C}$.

Komplexní exponenciální funkci e^z nazýváme funkci

$$e^z = \exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (3.10)$$

Komplexní funkci kosinus nazýváme funkci

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (3.11)$$

Komplexní funkci sinus nazýváme funkci

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.12)$$

Tyto funkce je možné vyjádřit pomocí známých reálných funkcí:

$$e^{x+jy} = e^x (\cos y + j \sin y) \quad (3.13)$$

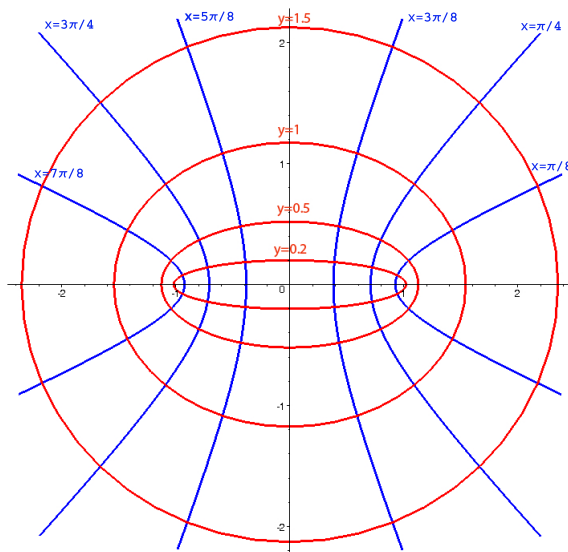
$$\cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y \quad (3.14)$$

$$\sin(x + jy) = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y. \quad (3.15)$$

Poznamenejme, že první vzorec, který souvisí s tzv. Eulerovou identitou je základem pro zavedení exponenciálního tvaru komplexního čísla. Navíc pro výše uvedené funkce platí kromě známých vzorců z reálné analýzy následující důležité vztahy:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}) \quad \sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}). \quad (3.16)$$

Takto definované funkce mají „jiné“ vlastnosti než v reálném oboru. Např. funkce e^z je periodická s periodou $2\pi j$. Pro hodnoty funkcí $\sin z$ a $\cos z$ samozřejmě neplatí, že nabývají hodnot pouze z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ (jako v reálném oboru) – zejména proto, že v oboru komplexních čísel nemá vůbec smysl mluvit o intervalech. Situaci budeme ilustrovat na obrazu obdélníkové sítě, která je zobrazena funkcí $\cos z$:



Poznamenejme, že pro funkci $\sin z$ dostáváme jiné křivky, ale množina grafů těchto křivek je stejná jako u funkce $\cos z$. Pomocí funkcí definovaných v Definicí 3.27 můžeme definovat další funkce, jejichž reálné analogie jsou známé.

Definice 3.28. **Komplexní funkci tangens** nazýváme funkci

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \text{ kde } \cos z \neq 0. \quad (3.17)$$

Komplexní funkci kotangens nazýváme funkci

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \text{ kde } \sin z \neq 0. \quad (3.18)$$

Komplexní funkci hyperbolický sinus nazýváme funkci

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad (3.19)$$

Komplexní funkci hyperbolický kosinus nazýváme funkci

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad (3.20)$$

Poznamenejme, že všechny výše uvedené funkce jsou na svých definičních oborech v \mathbb{C} holomorfní a derivací jsou stejné funkce jako v reálném oboru. Tato skutečnost spolu s platností pravidel pro derivování algebraických operací s funkcemi vede k obdobnému postupu při výpočtu derivace funkce komplexní proměnné, hovoříme o tzv. **zákonu permanence pravidel pro derivování funkcí komplexní proměnné**. Pro mnohoznačné funkce je třeba se omezit pouze na jednoznačné větve.

Z periodičnosti funkce e^z vyplývá další důležitý poznatek. V reálném oboru je inverzní funkcí k funkci $y = e^x$ funkce $y = \ln x$. Inverzní funkce k periodické funkci však nemůže být jednoznačná funkce. Definování logaritmu v komplexním oboru je proto poněkud složitější.

Definice 3.29. Inverzní funkce k exponenciální funkci e^z se nazývá **logaritmická funkce** $\ln z$. To jest

$$\ln z = \{w | w \in \mathbb{C}, e^w = z\}.$$

Tato funkce je nekonečně mnohoznačná a ze vztahu (3.13) je možné odvodit

$$e^w = e^{\Re w}(\cos \Im w + i \sin \Im w) = z \Leftrightarrow e^{\Re w} = |z| \wedge \Im w = \arg z$$

hodnotu $\ln z$:

$$\ln z = \ln |z| + j \arg z. \quad (3.21)$$

Nahradíme-li v tomto vztahu funkci $\arg z$ funkcí $\text{Arg } z$ dostáváme jednoznačnou funkci $\text{Ln } z$, kterou nazýváme **hlavní větev logaritmické funkce**, resp. **hlavní větev logaritmu**.

Poznamenejme, že funkce Ln i \ln jsou v komplexním oboru definovány pro všechna nenulová čísla $0 \neq z \in \mathbb{C}$.

Místo odvození jednotlivých vztahů pro další inverzní funkce ukážeme postup nalezení všech řešení analogické rovnice.

Příklad 3.30. Řešte rovnici $\cosh z = -2$, která nemá řešení v oboru reálných čísel.

Řešení. Funkci $\cosh z$ nahradíme lineární kombinací funkce e^z a nalezneme ekvivalentní rovnici pro tuto funkci e^z , kterou vyřešíme vzhledem k e^z . Potom z získáme pomocí funkce $\ln z$:

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z = -2 \Leftrightarrow (e^z)^2 + 4e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4}}{2} = \begin{cases} -2 - \sqrt{3} \\ -2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Oba kořeny kvadratické rovnice jsou záporná reálná čísla, tedy jejich argument je $(2k+1)\pi$, kde k je celé číslo. Velikosti těchto kořenů jsou $2 \pm \sqrt{3}$. Množina řešení zadané rovnice je sjednocení dvou množin:

$$M_1 = \{\ln(2 + \sqrt{3}) + j(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, M_2 = \{\ln(2 - \sqrt{3}) + j(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$M_1 \cup M_2 = \{\pm \ln(2 + \sqrt{3}) + j(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

což plyne ze skutečností $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$ a $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. □

Podobná situace nastává i u dalších inverzních funkcí k funkcím uvedeným výše, neboť s využitím vzorců (3.16), (3.20), (3.19) je možné jejich vyjádření pomocí funkce $\text{Ln } z$:

$$\arcsin z = -j \text{Ln} \left(jz + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad \arccos z = -j \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (3.22)$$

$$\text{arctg } z = -\frac{j}{2} \text{Ln} \frac{1 + jz}{1 - jz} \quad \text{arccotg } z = \frac{j}{2} \text{Ln} \frac{z - j}{z + j} \quad (3.23)$$

$$\text{arcsinh } z = \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right) \quad \text{arccosh } z = \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right). \quad (3.24)$$

Pro definování tzv. obecné mocniny z^α kde $\alpha \in \mathbb{C}$ využijeme identitu pro logaritmy známou z reálné analýzy využívající funkci \ln .

Definice 3.31. Obecnou mocninou z^α , kde $\alpha \in \mathbb{C}$, nazýváme funkci definovanou vztahem

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}. \quad (3.25)$$

Funkce z^α je podobně jako funkce $\ln z$ nekonečně mnohoznačná. Její hlavní větev získáme, pokud nahradíme $\ln z$ hlavní hodnotou $\text{Ln } z$.

Příklad 3.32. Určete funkční hodnoty (uvažujte pouze hlavní větve logaritmu).

1. Vypočtěte j^j .

Řešení. Podle (3.25) je $j^j = e^{j \text{Ln } j}$. Protože $\arg j = \frac{\pi}{2}$ a $|j| = 1$, je $\text{Ln } j = \ln 1 + j\frac{\pi}{2}$, tedy po dosazení

$$j^j = e^{j^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

□

2. Vypočtěte $\text{arctg}(2j)$.

Řešení. Podle (3.23) je $\text{arctg}(2j) = -\frac{j}{2} \text{Ln} \frac{1+j2j}{1-j2j} = -\frac{j}{2} \text{Ln} \left(-\frac{1}{3}\right)$, protože $\arg\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi$ a $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$, je $\text{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{1}{3} + j\pi$, tedy po dosazení

$$\text{arctg}(2j) = -\frac{j(-\ln 3 + j\pi)}{2} = \frac{\pi}{2} + j\frac{\ln 3}{2}.$$

□

3. Vypočtěte $\text{arctg}(j)$.

Řešení. Uvedená funkční hodnota $\text{arctg}(j)$ není definována, neboť podle (3.23) $\text{arctg}(j) = -\frac{j}{2} \ln \frac{1+j^2}{1-j^2} = -\frac{j}{2} \ln 0$, což není definováno. □

3.8 Integrál funkce komplexní proměnné

Definovat analogii určitého integrálu reálné funkce jedné reálné proměnné je pro funkci komplexní v komplexní rovině možné nahrazením úsečky (intervalu) jejím spojitým obrazem v komplexní rovině, tj. křivkou. V dalším se omezíme pouze na tzv. rektifikovatelné křivky konečné délky.

Nechť je dána křivka $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$ kde $t \in \langle a, b \rangle$ tedy $(\Gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C})$. Každému dělení $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ s normou dělení $\nu(D) = \max_{k=1, \dots, n} \{t_k - t_{k-1}\}$ odpovídá

lomená čára s vrcholy $z_k = \Gamma(t_k)$, jejíž délka je $\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|$. Existuje-li konečné reálné číslo K takové, že pro každé dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ je

$$\sum_{k=1}^n |\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| < K,$$

existuje konečné suprémum $d(\Gamma)$ množiny délek všech lomených čar, které nazýváme **délka křivky** Γ , a křivku φ nazýváme rektifikovatelnou. Speciálním případem rektifikovatelných křivek jsou **hladké křivky** $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$, které mají na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou nenulovou derivaci Γ' a platí

$$d(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Jejich dalším možným zobecněním jsou **po částech hladké orientované křivky**, které jsou konečným součtem hladkých křivek.

Pro konečnou komplexní funkci $f(z)$ a křivku $\Gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, pro dělení $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ a množinu bodů $\{\tau_k\}$, splňujících $\tau_k \in \langle t_{k-1}, t_k \rangle$ pro $k = 1 \dots n$ definujeme integrální součet

$$\sigma(f(z), \Gamma, D, \{\tau_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\Gamma(\tau_k))(\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})).$$

Definice 3.33. Nechť existuje konečná limita

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sigma(f(z), \Gamma, D, \{\tau_k\}) = \lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\Gamma(\tau_k))(\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})),$$

uvažovaná pro všechna dělení D a množiny $\{\tau_k\}$. Pak tuto limitu nazveme **integrálem funkce f po křivce Γ** a zapisujeme ji $\int_{\Gamma} f(z) dz$. Křivku Γ nazýváme **integrační cestou**.

Následující věta stanoví podmínky existence integrálu.

Věta 3.34. *Nechť $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ je rektifikovatelná křivka a funkce $f(z)$ je definovaná, konečná a spojitá na množině $[\Gamma]$. Potom existuje $\int_{\Gamma} f(z) dz$ pro jehož hodnotu platí navíc odhad*

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| dz \leq \sup_{z \in [\Gamma]} |f(z)| d(\Gamma). \quad (3.26)$$

Jestliže je navíc Γ po částech hladká křivka, platí

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\Gamma(t)) \Gamma'(t) dt = \int_a^b f(x(t) + jy(t)) (x'(t) + jy'(t)) dt. \quad (3.27)$$

Tato věta dává do souvislosti geometrickou povahu definice integrálu s parametrizací po částech hladké křivky. V Příkladu 3.9 bylo uvedeno několik parametrizací jedné úsečky. Možný problém různých hodnot integrálu pro různé parametrizace, „řeší“ zavedení následujícího pojmu.

Jsou-li dány 2 křivky $\Gamma_1 : \langle a_1, b_1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ a $\Gamma_2 : \langle a_2, b_2 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ a existuje-li spojitá rostoucí funkce ω definovaná na intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$ taková, že platí

1. $\omega([a_1, b_1]) = [a_2, b_2]$

2. $\Gamma_2(\omega(t)) = \Gamma_1(t)$ pro $t \in \langle a_1, b_1 \rangle$,

potom se křivky Γ_1, Γ_2 liší jen nepodstatně a platí

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Další vlastnosti křivkového integrálu z komplexní funkce jsou uvedeny níže.

Věta 3.35. *Nechť jsou funkce komplexní proměnné $f(z), f_1(z), f_2(z)$ spojité na $[\Gamma], [\Gamma_1], [\Gamma_2]$, kde $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ jsou rektifikovatelné křivky a $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$. Pak platí:*

$$\int_{\Gamma} (k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)) dz = k_1 \int_{\Gamma} f_1(z) dz + k_2 \int_{\Gamma} f_2(z) dz. \quad (3.28)$$

Jestliže $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, pak

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \quad (3.29)$$

Jestliže Γ_2 je opačně orientovaná křivka Γ_1 , pak

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2} f(z) dz \quad (3.30)$$

V dalším textu se omezíme na křivky, které budou po částech hladké, a tuto skutečnost nebudeme dále zdůrazňovat.

Příklad 3.36 (Výpočet integrálu komplexní funkce po křivce). Vypočítejte inte-

grál $\int_{\Gamma} f(z) dz$, je-li dáno:

1. $f(z) = z^n$, kde n je celé číslo a Γ je kružnice se středem 0 o poloměru r kladně orientovaná, např. $z(t) = r(\cos t + j \sin t) = re^{jt}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešení. Ověříme, že křivka $\Gamma : z(t) = r(\cos t + j \sin t) = re^{jt}$ je hladká, výpočtem její derivace $z'(t) = r(-\sin t + j \cos t) = jre^{jt}$ a můžeme tedy použít vzorec (3.27) Celkem tedy získáváme, že

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{njt} jre^{jt} dt = \int_0^{2\pi} jr^{n+1} e^{(n+1)jt} dt = \\ &= r^{n+1} \int_0^{2\pi} -\sin(n+1)t + j \cos(n+1)t dt = \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{pro } n = -1 : [t]_0^{2\pi} = 2j\pi, \\ \text{pro } n \neq -1 : \frac{r^{n+1}}{n+1} [\cos(n+1)t + j \sin(n+1)t]_0^{2\pi} = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

□

2. $f(z) = e^z$, Γ je lomená čára spojující body $z_1 = 2$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + j\pi$.

Řešení. Lomená čára zcela jistě splňuje předpoklady pro použití vztahu (3.29). Za Γ_1 budeme považovat úsečku spojující body $z_1 = 2$ a $z_2 = 1$ a za Γ_2 úsečku spojující body $z_2 = 1$ a $z_3 = 1 + j\pi$. Pro výpočet integrálu potřebujeme následující údaje:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1 : z(t) = 2 - t & \Gamma_2 : z(t) = 1 + j\pi t \\ \alpha_1, \beta_1 : \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1 & \alpha_2, \beta_2 : \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1 \\ z'(t)dt : dz = -dt & z'(t)dt : dz = j\pi dt. \end{array}$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e^z dz &= \int_0^1 e^{2-t}(-1)dt + \int_0^1 e^{1+j\pi t} j\pi dt = \\ &= e^2 \int_0^1 -e^{-t} dt + j\pi e \int_0^1 (\cos(\pi t) + j \sin(\pi t)) dt = \\ &= e^2 [e^{-t}]_0^1 + j\pi e [\sin(\pi t)/\pi - j \cos(\pi t)/\pi]_0^1 = e - e^2 + e(-1 - 1) = -e^2 - e. \end{aligned}$$

□

Ve speciálních případech je možné výpočet integrálu uskutečnit i jiným postupem než poskytuje Věta 3.34. Motivací pro další úvahy je aplikace substituce při výpočtu určitého integrálu, jejíž „mechanické“ použití vede k domněnce, že hodnota integrálu nezávisí na konkrétní křivce, ale pouze na počátečním a koncovém bodě křivky. Tato je ekvivalentní tvrzení, že hodnota integrálu po uzavřené křivce je nulová, což obecně neplatí, viz Příklad 3.36. Připomeňme, že v Odstavci 3.1.3 byl zaveden pojem jednoduše souvislé oblasti. Příkladem jednoduše souvislé oblasti je otevřený kruh $U_\varepsilon(z_0)$, prstenec $P_\varepsilon(z_0)$ je příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá. Tento pojem je podstatný pro formulaci tzv. Cauchyho fundamentální věty.

Věta 3.37 (Cauchy). *Nechť je dána funkce $f(z)$, která je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω . Pak pro její integrál po každé uzavřené křivce Γ , která leží v Ω platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (3.31)$$

Důkaz této věty, která má mnoho významných důsledků, je z důvodu jeho rozsáhlosti vynechán a zájemce jej nalezne např. [25, str. 126-128].

Poznamenejme, že „opačné“ tvrzení je předmětem tzv. Morerovy věty:

Věta 3.38. *Nechť $f(z)$ je konečná a spojitá funkce na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{C}$. Pak funkce $f(z)$ je holomorfní na množině M právě když, platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (3.32)$$

pro každou Jordanovu křivku Γ , pro niž je $\overline{\text{int } \Gamma} \subset M$.

Uvedme jako první důsledek Cauchyho fundamentální věty větu o nezávislosti na integrační cestě.

Věta 3.39. *Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a nechť $f(z)$ je holomorfní na oblasti D . Nechť z_1, z_2 jsou libovolné dva body D a Γ_1, Γ_2 křivky se stejným počátečním bodem z_1 a koncovým bodem z_2 . Potom platí*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz. \quad (3.33)$$

Důkaz. Tvzení věty plyne ze skutečnosti, že součet křivky Γ_1 s opačně orientovanou křivkou Γ_2 je uzavřená křivka a podle (3.30), (3.29) a Cauchyho věty platí $\int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$. \square

Tato skutečnost umožňuje definovat k holomorfní funkci $f(z)$ v jednoduše souvislé oblasti Ω funkci $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$ jako křivkový integrál po libovolné křivce. Tato funkce je funkcí horní meze integrálu a podobně jako v reálné analýze lze odvodit následující tvrzení.

Věta 3.40. *Bud' Ω jednoduše souvislá rovinná oblast a $f(z)$ holomorfní funkce. Potom pro každý pevně zvolený bod $z_0 \in \Omega$ funkce definovaná tak, že*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$$

má derivaci $F'(z) = f(z)$.

Ríkáme, že funkce $F(z)$ je **primitivní funkcí** k funkci $f(z)$, neboť platí $F'(z) = f(z)$. Primitivní funkce není určena k funkci $f(z)$ jednoznačně a vzájemně se liší až na aditivní konstantu. Obdobně jako pro funkce reálné proměnné lze dokázat analogii Newton-Leibnizovy formule.

Věta 3.41. *Nechť funkce $f(z)$ je spojitá a má primitivní funkci $F(z)$ v jednoduše souvislé oblasti Ω . Nechť dále Γ je libovolná po částech hladká orientovaná křivka s počátečním bodem z_1 a koncovým bodem z_2 ležící v Ω . Pak hodnota integrálu $\int_{\Gamma} f(z)dz$ nezávisí na tvaru křivky Γ ale pouze na jejích krajních bodech a platí*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1). \quad (3.34)$$

Poznamenejme, že pomocí této věty je možné zjednodušit výpočet integrálů z holomorfních funkcí, viz Příklad 3.36, 2), kde je počítán integrál z funkce e^z :

$$\int_{\Gamma} e^z dz = \int_2^{1+j\pi} e^z dz = [e^z]_2^{1+j\pi} = e(\cos \pi + j \sin \pi) - e^2 = -e^2 - e.$$

Na Příklad 3.36, 1) uvedenou větu pro $n \leq -1$ nelze použít, protože křivka Γ je uzavřená a Cauchyho fundamentální větu nelze použít, neboť funkce je v bodě 0 není holomorfní a navíc tento bod leží uvnitř kružnice Γ . Situaci budeme dále ilustrovat na příkladech.

Příklad 3.42. *Výpočet integrálu komplexní funkce*

Vypočtete následující integrály $\int_{\Gamma} f(z)dz$, je-li dáno:

1. $f_1(z) = \sin z$, $\Gamma(t) = \pi(2 \sin t - 1 + j2 \sin 2t)$ pro $t = \langle 0, 3\pi/2 \rangle$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že funkce $f_1(z) = \sin z$ je na celém oboru \mathbb{C} spojitá a holomorfní a Γ_1 je rektifikovatelná křivka, existuje integrál a můžeme použít Větu 3.41. S využitím zákona permanence pravidel pro derivování funkcí komplexní proměnné dostáváme:

$$\int_{\Gamma_1} \sin z dz = \int_{\Gamma_1(0)}^{\Gamma_1(3\pi/2)} \sin z dz = - \left[\cos z \right]_{-\pi}^{-3\pi} = 0.$$

□

2. $f_2(z) = 1/z$, Γ_2 je úsečka z bodu $z_1 = -1 + j$ do bodu $z_2 = 1 + j$ tj. např. $\Gamma(t) = 2t - 1 + j$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení. Přestože funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ není holomorfní v bodě 0 můžeme použít Větu 3.41. Zvolíme-li za oblast Ω okolí bodu $2j$ o poloměru $\sqrt{3}$, platí, že daná křivka patří do Ω a jediný bod 0, kde funkce $1/z$ není holomorfní, do Ω nepatří. Můžeme tedy Větu 3.41 v oblasti Ω použít. Musíme však vhodně zvolit primitivní funkci, kterou je logaritmus. Můžeme zvolit hlavní hodnotu $\text{Ln } z$, neboť ta není holomorfní pouze na záporné části reálné osy a tedy v oblasti Ω je holomorfní.

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{-1+j}^{1+j} \frac{1}{z} dz = \left[\text{Ln } z \right]_{-1+j}^{1+j} = \ln \sqrt{2} + j \frac{\pi}{4} - \left(\ln \sqrt{2} + j \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} j$$

□

Poznámka 1. Pro integrál sestavený z funkce v Příkladě 3.42, 2. a křivky z Příkladu 3.42, 1. by výše uvedené výpočty nesplňovaly podmínky Věty 3.41, protože není možné nalézt jednoduše souvislou oblast Ω obsahující křivku Γ_1 , na níž bude funkce $f_2(z) = 1/z$ holomorfní. Křivka $\Gamma(t) = \pi(2 \sin t - 1 + j2 \sin 2t)$ pro $t = \langle 0, \pi \rangle$, která je částí křivky Γ_1 je uzavřená, neboť $\Gamma(0) = -\pi$ a $\Gamma(\pi) = -\pi$. Navíc bod 0, ve kterém funkce $f_2(z) = 1/z$ není holomorfní je vnitřním bodem oblasti ohraničené křivkou $\Gamma(t)$. Což plyne z nerovností, $2 \sin 2t > 0$ pro $t \in (0, \pi/2)$ a tedy $[\Gamma(t)]$ leží v horní polorovině Gaussovy roviny a pro $t \in (\pi/2, \pi)$ platí $2 \sin 2t < 0$ a tedy $[\Gamma(t)]$ leží v dolní polorovině Gaussovy roviny. Protože je navíc platí $\Gamma(0) = -\pi$ a $\Gamma(\pi/2) = \pi$, je bod 0, který je středem úsečky $\langle -\pi, \pi \rangle$ vnitřním bodem oblasti ohraničené křivkou $\Gamma(t)$.

Věta 3.43. *Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní uvnitř uvnitř n -násobně souvislé oblasti Ω a spojitá na jejím uzávěru. Nechť je hranice oblasti Ω tvořena stejně orientovanými*

Jordanovými křivkami $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$, takovými že křivky $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ leží uvnitř křivky Γ . Potom platí

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Gamma_i} f(z) dz \quad (3.35)$$

Pomocí této věty můžeme výpočet integrálu z Poznámky 1 tj. $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ nahradit integrálem po kružnici se středem v počátku s dostatečně malým poloměrem r , aby celá kružnice ležela ve vnitřku křivky Γ . Tento integrál je spočítán v Příkladu 3.36, 1. pro $n = -1$. Protože křivka Γ je záporně orientována a kružnice v uvedeném příkladě je kladně orientována celkově dostáváme $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = -2j\pi$. Integrály tohoto typu se zabývají následující věty.

Věta 3.44 (Cauchyho vzorec). *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř Jordanovy křivky Γ a navíc je spojitá a konečná na křivce Γ , která je kladně orientovaná. Potom pro každý bod z_0 , který leží uvnitř křivky Γ platí:*

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0). \quad (3.36)$$

Důkaz. Pro libovolný pevně zvolený bod z ležící uvnitř křivky Γ , $z \in D = \text{int } \Gamma$ definujeme funkci $g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z; \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$. Neboť funkce $g(\zeta)$ je v oblasti D holomorfní (s případnou výjimkou bodu z kde je spojitá), lze s využitím Cauchyho integrální věty odvodit $\int_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$. Z čehož plyne tvrzení věty:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi j f(z).$$

Při výpočtu posledního integrálu jsme použili Příklad 3.36, 1. pro $n = -1$. □

Splňuje-li funkce $f(z)$ předpoklady Věty 3.44 existují integrály $g_n(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$, pro které je možné odvodit vztah

$$g'_n(z) = \frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} \right) d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{nf(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = n g_{n+1}(z),$$

který spolu s Větou 3.44 umožňuje obecnější formulaci předchozí věty.

Věta 3.45 (Cauchyho vzorec pro n -tou derivaci). *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř Jordanovy křivky Γ a navíc je spojitá a konečná na křivce Γ , která je kladně orientovaná. Potom pro každý bod z , který leží uvnitř křivky Γ má tato funkce derivace všech řádů a platí:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (3.37)$$

Tato věta spolu s Větou 3.43 umožňuje výpočet integrálů po uzavřených křivkách z funkcí typu $\frac{f(z)}{P(z)}$, kde funkce $f(z)$ je holomorfní a $P(z)$ je polynom, neboť v komplexním oboru lze každý polynom rozložit na součin lineárních polynomů. Potom lze integrál po uzavřené křivce nahradit součtem integrálů po křivkách, které budou obsahovat pouze jeden kořen polynomu ve jmenovateli uvažované funkce a který je vnitřním bodem křivky. Tyto integrály lze spočítat pomocí Věty 3.44.

Příklad 3.46. Pomocí Cauchyho vzorce vypočtete $\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2}$, je-li Γ kladně orientovaná kružnice se středem $2j$ o poloměru 3.

Řešení. Polynom lze rozložit $z(z^2 + 4)^2 = z(z + 2j)^2(z - 2j)^2$. V křivce Γ , což je kružnice daná rovnicí $|z - 2j| = 3$ leží dva kořeny jmenovatele $z = 0$ a $z = 2j$, neboť $|0 - 2j| = 2 < 3$ a $|2j - 2j| = 0 < 3$, ale $|-2j - 2j| = 4 > 3$. Můžeme tedy volit dvě křivky Γ_1 jako kružnici se středem v bodě 0 o poloměru 1/2 a křivku Γ_2 jako kružnici se středem v bodě $2j$ o poloměru 1 takové, že podle Věty 3.43 platí:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2}.$$

V prvním integrálu je funkcí $f(z)$ použitou ve Větě 3.44 funkce $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 4)^2}$ a bodem $z_0 = 0$, tedy $f(0) = \frac{1}{16}$.

V druhém integrálu uijeme Větu 3.45 kde $f(z) = \frac{e^z}{z(z + 2j)^2}$, $n = 1$ a bodem $z_0 = 2j$, tedy $f'(z) = \frac{e^z(z^2 + z(-3 + 2j) - 2j)}{z^2(z + 2j)^3}$ a $f'(2j) = \frac{e^{2j}(-1 + j)}{32}$. Celkově tedy dostáváme

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = 2\pi j \left(\frac{1}{16} + e^{2j} \frac{-1 + j}{32} \right).$$

□

Význam této Věty 3.45 spočívá ve skutečnosti, že funkce holomorfní v nějaké oblasti má derivace všech řádů a je možno očekávat její rozvoj v Taylorovu řadu.

3.9 Řady v komplexním oboru a singulární body

Věta 3.47. Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v bodě z_0 . Pak existuje otevřený kruh $U(z_0, R)$ ($R > 0$) takový, že pro každý bod $z \in U(z_0, R)$ platí:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ kde } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (3.38)$$

kde $\Gamma_r = z_0 + re^{jt}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je kladně orientovaná kružnice se středem z_0 o poloměru r , pro který platí $0 < r < R$.

Také naopak platí, že každá konvergentní mocninná uvnitř kruhu $U(z_0, R)$, má zde součet, který je holomorfní funkcí a její derivace můžeme získat jako součty odpovídajících derivací dané mocninné řady (součet můžeme derivovat „člen po členu“ podobně jako v reálném oboru).

Uvedené integrální vzorce (3.38) jsou platné, ale v mnohých případech je možné Taylorovu řadu získat i jiným postupem.

Příklad 3.48. Rozviňte racionálně lomenou funkci $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ v Taylorovu řadu se středem $z_0 = 0$.

Řešení. Danou funkci lze rozložit na součet dvou zlomků

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}}.$$

Oba zlomky je možné vyjádřit jako součet vhodné geometrické řady $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$,

$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$. Celkově dostáváme Taylorův rozvoj, který konverguje pro $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n.$$

□

Povšimněme si, že uvedenou funkci je možné vyjádřit jako součet řady i v dalších oblastech komplexní roviny.

$1 < |z| < 2$ upravíme první zlomek na tvar:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1},$$

neboť takto upravený zlomek je součtem geometrické řady a kvocientem $\frac{1}{z}$. Celkově dostáváme:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n.$$

Poznamenejme, že první geometrická řada konverguje pro $1 < |z|$ a druhá pro $|z| < 2$.

$2 < |z|$: abychom i druhý zlomek mohli v této oblasti interpretovat jako součet geometrické řady upravíme jej:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{2}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$$

a celkově dostáváme rozvoj

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1 + 2^{-n}) z^n,$$

Zobecnění podobných úvah vede k zavedení pojmu Laurentův rozvoj funkce.

Definice 3.49. Necht' $z_0, a_n \in \mathbb{C}$, kde n je celé číslo. Potom výraz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (3.39)$$

nazýváme **Laurentovou řadou se středem v bodě** z_0 a říkáme, že **řada konverguje** v bodě z , jestliže konvergují současně obě řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

První, resp. druhá řada se nazývá **regulární část**, resp. **hlavní část** Laurentovy řady a její **součtem** je součet obou jejích částí.

Věta 3.50. Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní na prstenci $P_{rR}(z_0)$. Pak pro každé z ležící v tomto prstenci, lze funkci $f(z)$ vyjádřit jako součet Laurentovy řady

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (3.40)$$

pro jejíž koeficienty platí a_n , kde $n \in \mathbb{Z}$ platí:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (3.41)$$

kde Γ je libovolná kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem \bar{r} takovým, že $r < \bar{r} < R$.

Opačnou implikací se zabývá následující věta.

Věta 3.51. Necht' je v mezikruží $0 \leq r < |z - z_0| < R$ dána funkce $f(z)$ jako součet řady (3.40), pak je v množině $P_{rR}(z_0)$ holomorfní a pro její koeficienty platí (3.41).

3.9.1 Singulární body a jejich klasifikace

Definice 3.52. Necht' je $f(z)$ holomorfní funkce v prstencovém okolí $P_r(z_0)$ bodu z_0 a současně není holomorfní v bodě z_0 . Potom říkáme, že bod z_0 je **izolovaným singulárním bodem** funkce $f(z)$.

Poznamenejme, že ne každý singulární bod je izolovaným singulárním bodem. Například bod 0 není izolovaným bodem jakékoli jednoznačné větve funkce \sqrt{z} . Pro izolované singulární body platí modifikace L'Hospitalova pravidla.

Věta 3.53 (L'Hospitalovo pravidlo). Necht' funkce $f(z)$, $g(z)$ jsou holomorfní na prstencovém okolí $P_r(z_0)$ ($r > 0$) navíc jsou bodě z_0 spojité a platí $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, potom existují obě následující limity a platí:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (3.42)$$

Klasifikace singulárních bodů funkce $f(z)$

Pro izolovaný singulární bod z_0 nastane právě jedna ze tří následujících možností

1. Hlavní část Laurentova rozvoje je v prstencovém okolí identicky rovna 0, potom existuje konečná limita $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ a po dodefinování funkční hodnoty $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ je funkce v tomto bodě holomorfní. V tomto případě hovoříme o **odstranitelné singularitě**.
2. Hlavní část Laurentova rozvoje má v prstencovém okolí pouze konečný počet nenulových koeficientů $a_n \neq 0$ a platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Singulární bod potom nazýváme **pólem** a absolutní hodnota nejmenšího indexu nenulového koeficientu hlavní části Laurentova rozvoje se nazývá **řád pólu**.
3. Hlavní část Laurentova rozvoje má v prstencovém okolí nekonečný počet nenulových koeficientů $a_n \neq 0$ a potom k libovolně zvolenému číslu $L \in \mathbb{S}$ lze nalézt posloupnost $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ takovou, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$ a současně $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = L$. V tomto případě hovoříme o **podstatné singularitě**.

Příklad 3.54. Pro uvedené funkce určete izolované singulární body a pomocí Laurentova rozvoje proveďte jejich klasifikaci

1. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

Řešení. Funkce $\sin z$ je definována jako řada $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ celkově je Lau-

rentův rozvoj ve tvaru $\frac{\sin z}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ a bod $z = 0$ je odstranitelnou singularitou, a po dodefinování $f(0) = 1$ dostaneme holomorfní funkci. \square

2. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4}$

Řešení. Funkce $\cos z$ je definována jako řada $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$. Laurentův rozvoj odvodíme ve tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos z}{z^4} &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}{z^4} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n)!}}{z^4} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-4}}{(2n)!} = \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-4}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

Nejmenší nenulový koeficient (pro $n = 1$) je $a_{-2} = \frac{1}{2}$, proto je bod $z = 0$ pólem druhého řádu. \square

$$3. f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

Řešení. Funkce e^z je definována jako řada $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$. Laurentův rozvoj dané funkce dostaneme substitucí $t = \frac{1}{z^2}$:

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^{2n}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^{2n}} + \dots, \quad (3.43)$$

tedy bod $z = 0$ je podstatnou singularitou. \square

Nalézt Laurentův rozvoj je v některých případech technicky náročné např. pro převrácenou hodnotu funkce z Příkladu 3.54, 1., proto klasifikování singulárních bodů na základě detailní znalosti Laurentova rozvoje nahradíme pro funkce ve tvaru zlomku jiným postupem. K jeho uskutečnění je nutné zavedení pojmu nulového bodu holomorfní funkce a jeho násobnosti.

Definice 3.55. Buď $f(z)$ holomorfní funkce v okolí $U(z_0)$ bodu z_0 a současně $f(z_0) = 0$. Potom říkáme, že bod z_0 je **nulovým bodem** funkce $f(z)$. Řekneme, že nulový bod z_0 je **n-násobným** nulovým bodem, jestliže platí

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0. \quad (3.44)$$

Pro bod z_0 , který není nulový zavedeme násobnost 0.

Z existence Taylorovy řady holomorfní funkce $f(z)$ plyne následující tvrzení.

Věta 3.56. Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je *n-násobným nulovým bodem holomorfní funkce $f(z)$ právě když, v nějakém okolí $U(z_0)$ lze funkci $f(z)$ vyjádřit ve tvaru*

$$f(z) = (z - z_0)^n F(z), \quad (3.45)$$

kde funkce $F(z)$ je v bodě z_0 holomorfní a nenulová.

Důsledek 3.57. *Nechť je dána funkce $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, která podílem holomorfních funkcí.*

Potom má funkce $f(z)$ singulární body (nejdou podstatnými singularitami) pouze v nulových bodech z_0 funkce $\psi(z)$. Je-li q násobnost nulového bodu z_0 funkce $\psi(z)$ větší než p násobnost nulového bodu z_0 funkce $\varphi(z)$ ($q > p$) je tento bod pólem, jehož řád je roven rozdílu $q - p$ v opačném případě je ve zkoumaném bodě z_0 odstranitelná singularita.

Výše uvedený postup budeme ilustrovat na prvních dvou funkcích (třetí není ve tvaru zlomku) Příkladu 3.54.

Uvažme funkci $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Obě funkce mají bod $z = 0$ nulovým bodem násobnosti 1, tedy uvažovaný rozdíl je 0 a v bodě $z_0 = 0$ je odstranitelná singularita.

Pro funkci $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ dostáváme v bodě $z = 0$:

$\varphi(0) = 0$, $\varphi'(z) = \sin z \Rightarrow \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$, což znamená, že funkce $\varphi(z)$ má bod $z_0 = 0$ nulovým bodem násobnosti 2. Funkce $\psi(z) = z^4$ má bod $z_0 = 0$ nulovým bodem násobnosti 4. Proto určíme, že bod $z_0 = 0$ je pólem násobnosti $4 - 2 = 2$.

3.10 Rezidua a jejich užití

Ze vzorců (3.41) vyplývá, že koeficient $a_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz$ úzce souvisí s hodnotou integrálu po uzavřené kladně orientované křivce obsahující bod z_0 . Zavádíme proto pojem:

Definice 3.58. Nechť je dána funkce $f(z)$ a její rozvoj do Laurentovy v prstencovém okolí bodu z_0 ve tvaru $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Koeficient a_{-1} v tomto rozvoji nazýváme **reziduum** funkce $f(z)$ v bodě z_0 a píšeme $\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$.

Předchozí úvaha spolu s Větou 3.43 umožňují odvodit následující větu:

Věta 3.59 (reziduová, Cauchy). Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a Γ Jordanova uzavřená kladně orientovaná křivka ležící v této oblasti. Vnitřek množiny ohraničené křivkou Γ označíme Γ° . Nechť komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř oblasti Ω , s případnou s výjimkou konečného počtu bodů z_1, z_2, \dots, z_n z nichž žádný neleží na křivce Γ . Pak platí:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{z_k \in \Gamma^\circ} \operatorname{rez}_{z=z_k} f(z). \quad (3.46)$$

K „efektivnímu“ využití uvedené věty potřebujeme určovat rezidua i jiným způsobem než pomocí integrálu jak je reziduum definováno. K nalezení tohoto postupu využijeme Laurentova rozvoje funkce.

Odtud bezprostředně plyne, že pro bod z_0 , který je odstranitelnou singularitou funkce $f(z)$ platí $\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = 0$. Pro singulární bod, který je pólem, platí:

Věta 3.60. Nechť je dána funkce $f(z)$, která má v bodě z_0 pól řádu m . Potom platí:

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \quad (3.47)$$

Jedná-li se o pól prvního řádu, pak se daný vzorec zjednoduší na tvar:

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z), \quad (3.48)$$

Důkaz. Funkce, která má v bodě z_0 pól řádu m , má Laurentův rozvoj se středem v tomto bodě ve tvaru:

$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Vynásobením tohoto rozvoje výrazem $(z-z_0)^m$ dostáváme funkci

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k+m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(z-z_0)^k,$$

kteřá má v tomto bodě odstranitelnou singularitu. Po spojitým dodefinování získáme funkci holomorfní, kterou můžeme $m-1$ -krát derivovat.

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=m-1}^{\infty} a_{k-m} \cdot k \cdot (k-1) \dots (k-m+2) (z-z_0)^{k-m+1}.$$

Všechny členy v nekonečné řadě kromě prvního mají nulovou hodnotu pro $z = z_0$ a tedy platí:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = a_{-1} \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots 1,$$

což dokazuje tvrzení věty. \square

V případě pólů prvního řádu, nazývaných také prosté póly, můžeme výpočet reziduí u funkce, která je podílem dvou holomorfních funkcí realizovat, pomocí následující věty.

Věta 3.61. *Nechť $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou holomorfní v bodě z_0 a platí $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Pak má funkce $f(z)$ v bodě z_0 pól prvního řádu a reziduum lze určit ze vzorce*

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (3.49)$$

Příklad 3.62. Vypočtěte rezidua funkce $f(z)$

$$1) f(z) = \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2}$$

Řešení. Funkce je ve tvaru podílu holomorfních funkcí, proto jejími singulárními body jsou nulové body funkce ve jmenovateli.

Bod $z = 0$ je pól prvního řádu a $z = \pm 2j$ jsou póly druhého řádu a můžeme použít vzorec (3.47). Pro reziduum $z = 0$ je $m = 1$:

$$\operatorname{rez}_{z=0} \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^z}{z(z^2 + 4)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{16}.$$

Pro rezidua $z = \pm 2j$ je $m = 2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rez}_{z=\pm 2j} \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2} &= \lim_{z \rightarrow \pm 2j} \left(\frac{(z \mp 2j)^2 e^z}{z(z^2 + 4)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow \pm 2j} \left(\frac{e^z}{z(z \pm 2j)^2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm 2j} \frac{e^z(z^2 + (-3 \pm 2j)z \mp 2j)}{z^2(z \pm 2j)^3} = \frac{-1 \pm j}{32} e^{\pm 2j}, \end{aligned}$$

\square

$$2) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4}$$

Řešení. Funkce je ve tvaru podílu holomorfních funkcí, proto jejím singulárním bodem je nulový bod funkce ve jmenovateli $z = 0$, který je pól druhého řádu. Toto plyne z faktu $z = 0$ je nulový bod funkce $1 - \cos z$ druhého řádu a nulový bod řádu 4 funkce z^4 a můžeme použít vzorec (3.47), kde $z_0 = 0$ je $m = 2$:

$$\operatorname{rez}_{z=0} \frac{1 - \cos z}{z^4} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos z}{z^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z + 2 \cos z - 2}{z^3}$$

Při výpočtu této limity uijeme opakovaně L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z + 2 \cos z - 2}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z - \sin z}{3z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z \sin z}{6z} = 0.$$

Poznamenejme, že výsledek je ve shodě s definicí rezidua a Laurentovým rozvojem této funkce viz Příklad 3.54 2. \square

$$3) f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Řešení. Funkce $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ má póly prvního řádu v nulových bodech funkce $\cos z$, které určíme ze vztahu $\cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$ viz (3.14) kde využijeme vztahy pro reálné hyperbolické funkce $\cosh y > 0$, $\sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \Re \cos(x + jy) = \cos x \cosh y \Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 &= \Im \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + jy\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \sinh y = (-1)^k \sinh y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Tedy nulové body komplexní funkce $\cos z$ jsou stejné jako nulové body reálné funkce $\cos x$, tj. $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ a funkce $\operatorname{tg} z$ má spočetně mnoho singulárních pólů prvního řádu. K výpočtu reziduí v těchto pólech je vhodné použít vzorec (3.49):

$$\operatorname{rez}_{z=\pi/2+k\pi} \operatorname{tg} z = \left. \frac{\sin z}{(\cos z)'} \right|_{z=\pi/2+k\pi} = \frac{\sin(\pi/2 + k\pi)}{-\sin(\pi/2 + k\pi)} = -1.$$

\square

Reziduí je možné využít při výpočtu integrálu z funkce komplexní proměnné s izolovanými singulárními body po uzavřené křivce. K tomuto výpočtu použijeme Cauchyho reziduovou Větu 3.59. Postup předvedeme na příkladě.

Příklad 3.63. Vypočtete následující integrály pomocí reziduí podle Věty 3.59.

$$1. \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2}, \text{ je-li } \Gamma \text{ kladně orientovaná kružnice se středem } 2j \text{ o poloměru } 3.$$

Tento integrál je je v textu již spočítaný viz Příklad 3.46.

Řešení. Podobně jako v citovaném příkladě je třeba určit singulární body funkce $\frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2}$, jimiž jsou $z = 0$, $z = \pm 2j$. Uvnitř křivky Γ jsou body vyhovující rovnici $|z - 2j| < 3$. Body $z = 0$ a $z = 2j$ jsou uvnitř, neboť $|0 - 2j| = 2 < 3$ a $|2j - 2j| = 0 < 3$, naopak bod $z = -2j$ leží vně kružnice, protože $|-2j - 2j| = 4 > 3$. Proto užitím Věty 3.59 dostáváme

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = 2\pi j \left(\operatorname{rez}_{z=0} \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2} + \operatorname{rez}_{z=2j} \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2} \right) = 2\pi j \left(\frac{1}{16} + \frac{-1 + j}{32} e^{2j} \right).$$

Poznamenejme, že výše uvedená rezidua byla vypočtena v Příkladu 3.62 \square

$$2. \int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz, \text{ kde kružnice } |z| = 1 \text{ je záporně orientována.}$$

Řešení. I v případě, že křivka je záporně orientována je možné použít Větu 3.59 a opačnou orientaci křivky kompenzovat změnou znaménka integrálu. V daném případě má funkce $\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$ jediný singulární bod $z = 0$, který je vnitřním bodem křivky. Reziduum v tomto bodě určíme z Laurentova rozvoje (3.43) v Příkladě 3.54, jako koeficient $a_{-1} = \operatorname{rez}_{z=0} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0$, tedy $\int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0$. \square

3.10.1 Užití reziduí při výpočtu reálných integrálů

Integrálů funkce komplexní proměnné je možné využít při výpočtu některých typů určitých nebo nevlastních integrálů reálné funkce. Důvodem je minimálně zjednodušení jejich výpočtu. Situaci budeme ilustrovat pouze na některých typech.

Výpočet integrálů typu $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$.

Funkce $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ je racionální funkcí, která splňuje podmínku $Q(\sin t, \cos t) \neq 0$, pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, což je ekvivalentní s podmínkou $Q(x, y) \neq 0$ pro $x^2 + y^2 = 1$.

Při výpočtu budeme postupovat tak, že v daném integrálu provedeme substituci $z = \exp(jt)$. Tedy $dz = j \exp(jt) dt \Leftrightarrow dt = \frac{dz}{jz}$ a pomocí vztahů (3.16) dostaneme

$$\sin t = \frac{z - 1/z}{2j} = \frac{z^2 - 1}{2jz}, \quad \cos t = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Tedy celkově nahradíme uvedený integrál integrálem z funkce komplexní proměnné přes kladně orientovanou kružnici se středem v počátku o poloměru 1, který můžeme vyčíslit pomocí Cauchyovy reziduové věty:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2jz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{jz} = 2\pi \sum_{\substack{z=z_k \\ |z_k| < 1}} \operatorname{rez}_{z=z_k} \frac{1}{z} R\left(\frac{z^2 - 1}{2jz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right)$$

Příklad 3.64. Vypočtete $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos t + 1}$, kde $a \neq \pm 1$.

Řešení. Jmenovatel je pro $a \neq \pm 1$ kladný $a^2 - 2a \cos t + 1 = (a \sin t)^2 + (a \cos t - 1)^2 > 0$, tedy funkce v zadaném integrálu splňuje předpoklad o nenulovosti jmenovatele a zadaný integrál je integrálem vlastním. Výše uvedenou substitucí dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos t + 1} &= \int_{\Gamma} \frac{1}{a^2 - 2a \frac{z^2+1}{2z} + 1} \frac{dz}{jz} = \frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(a^2 + 1)z - a(z^2 + 1)} = \\ &= \frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)} = 2\pi \sum_{\substack{z=z_k \\ |z_k| < 1}} \operatorname{rez}_{z=z_k} \frac{1}{(1 - az)(z - a)}. \end{aligned}$$

Funkce $\frac{1}{(1-az)(z-a)}$ má pouze dva jednoduché póly $a, 1/a$, v nichž se rezidua liší pouze znaménkem:

$$\operatorname{rez}_{z=a} \frac{1}{(1-az)(z-a)} = \frac{1}{1-a^2} \quad \operatorname{rez}_{z=1/a} \frac{1}{a(\frac{1}{a}-z)(z-a)} = \frac{-1}{1-a^2}$$

a uvnitř jednotkové kružnice leží pouze jedno reziduum dostáváme pro $a \neq 0$ (pro $a = 0$ má evidentně integrál hodnotu 2π) hodnotu integrálu:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos t + 1} = \frac{2\pi \operatorname{sgn}(\ln |a|)}{a^2 - 1} = \begin{cases} \frac{2\pi}{a^2 - 1}, & \text{pro } a > 1; \\ \frac{2\pi}{1 - a^2}, & \text{pro } a < 1. \end{cases}$$

□

Uvedený výpočet je jednodušší než standardní výpočet, který je založen na univerzální substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$ a vyžaduje rozdělení integračního oboru na dva. To proto, že univerzální substituce je v čísle π nespojitá a navíc oba integrály po provedení substituce jsou nevlastní.

Výpočet nevlastních integrálů typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Aby i v tomto případě měl uvažovaný integrál (jeho hlavní hodnota) smysl, nemůže být funkce $f(x)$ libovolná. Situaci popisuje následující věta

Věta 3.65. *Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní ve všech bodech komplexní roviny s nezápornou imaginární částí s případnou výjimkou konečného počtu pólů z_1, \dots, z_n a stejnoměrně platí: $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi}} z f(z) = 0$. Potom platí*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x)dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{rez}_{z=z_k} f(z).$$

Příklad 3.66. Vypočtěte $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{x^4 + 1}$.

Řešení. Integrál konverguje a integrovaná funkce přesněji její rozšíření do komplexního oboru splňuje předpoklady Věty 3.65, tj.

$$1. \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z^2 + 1)}{z^4 + 1} = 0.$$

2. Funkce $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}$ je holomorfní s výjimkou prostých pólů, které jsou kořeny rovnice $z^4 + 1 = 0$, neboli $\sqrt[4]{-1} = \{z | z^4 = -1\} = \{z | z = \exp(j\varphi), \text{ kde } 4\varphi = \pi\}$. Tedy funkce má pouze dva póly s nezápornou imaginární částí $z_1 = \exp(j\pi/4) = (1 + j)/\sqrt{2}$ a $z_2 = \exp(j3\pi/4) = (-1 + j)/\sqrt{2}$.

Obě rezidua určíme pomocí Věty 3.61:

$$\operatorname{rez}_{z=(\pm 1+j)/\sqrt{2}} \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{z^2+1}{4z^3} \Big|_{z=(\pm 1+j)/\sqrt{2}} = \frac{\frac{1\pm 2j+j^2}{2}+1}{4 \frac{\pm 1+3j\pm 3j^2+j^3}{2\sqrt{2}}} = \frac{1\pm j}{\sqrt{2}(\mp 2+2j)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}j.$$

Pomocí Věty 3.65 vypočteme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1} = 2\pi j 2 \frac{-j\sqrt{2}}{4} = \pi\sqrt{2}.$$

□

3.11 Příklady na procvičení

Cvičení

1. Vypočtete hlavní hodnotu funkční hodnoty:

- a) $\cos(\pi + j)$,
- b) $\sqrt{-j}$,
- c) j^{1+j} .

2. Ověřte, že daná funkce $u(x, y)$ resp. $v(x, y)$ je reálnou resp. imaginární složkou holomorfní funkce $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$. Funkci $f(z)$ vyjádřete s využitím uvedené podmínky, navíc uveďte kde je funkce holomorfní:

- a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + 1$, $f(j) = 2$
- b) $v(x, y) = e^{-y} \sin(x) + y$, $f(-j) = e - j$
- c) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + 2x$, $f(1) = 3$
- d) $v(x, y) = \sinh x \sin y$, $f(j) = \cos 1$

3. Vypočtete integrál $\int_{\Gamma} f(z) dz$, jsou-li funkce $f(z)$ a křivka Γ zadány:

- a) $f(z) = \frac{1}{z}$, Γ je úsečka od bodu $A = 1 - 2j$ do bodu $B = 2 + j$
- b) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $\Gamma(t) = 1 + t \exp(jt)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- c) $f(z) = \operatorname{Ln} z$ (hlavní větev), Γ je horní půlkružnice se středem v počátku od bodu $A = 1$ do bodu $B = -1$
- d) $f(z)$ hlavní větev \sqrt{z} , $\Gamma(t) = \exp(jt)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

4. Rozhodněte o nezávislosti integrál $\int_{\Gamma} f(z) dz$ na integrační cestě a s jejím využitím integrál vypočtete, jsou-li funkce $f(z)$ a křivka Γ zadány:

- a) $f(z) = \frac{1}{z}$, Γ je úsečka od bodu $A = 1 - 2j$ do bodu $B = 2 + j$,

- b) $f(z) = z \cos jz$, $\Gamma(t) = \frac{\pi}{2}(j + \exp(jt))$, $t \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,
 c) $f(z) = e^z \cos z$, $\Gamma = t \exp(jt)$, $t \in (0, \pi)$,
 d) $f(z)$ hlavní větev \sqrt{z} , $\Gamma(t) = \exp(jt)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Výsledky

1. a) $\cos(\pi + j) = -\cosh 1$,
 b) $\sqrt{-j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$,
 c) $j^{1+j} = j \exp(-\frac{\pi}{2})$.
2. a) $f(z) = z^2 - 2jz + 1$,
 b) $f(z) = \exp(jz) + z$,
 c) $f(z) = \frac{2z^2+1}{z}$.
 d) $f(z) = \cosh z$.
3. a) $\frac{j\pi}{2}$,
 b) $\frac{\pi}{\pi-1}$,
 c) $2 - j\pi$,
 d) $-\frac{4}{3}$.
4. a) $[\operatorname{Ln} z]_{1-2j}^{2+j} = \frac{j\pi}{2}$,
 b) $[-\cos(jz) - j \sin(jz)]_0^{\pi j} = 2$,
 c) $\left[\frac{\exp(z)}{2}(\cos z + \sin z)\right]_0^{-\pi} = -\frac{1}{2}(1 + \exp(-\pi))$,
 d) nelze.

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Nalezení funkčních hodnot funkcí komplexní proměnné.](#)
2. [Vykreslení grafů v komplexní rovině funkcí zadaných parametricky.](#)
3. [Určení reálné a imaginární části funkcí komplexní proměnné.](#)
4. [Hledání druhé složky holomorfní funkce.](#)
5. [Určení singulárních bodů funkce komplexní proměnné.](#)
6. [Výpočet reziduí v pólech racionálních lomených funkcí komplexní proměnné.](#)
7. [Kreslení integračních cest funkcí komplexní proměnné.](#)

4 Speciální funkce, Fourierovy řady a Fourierova transformace

Úvodem dané kapitoly zavedeme důležitý pojem hojně využívaný při studiu přírodních jevů. Níže uvedený přístup je motivován analogií s definicí iracionálních čísel jako limity čísel racionálních. Poznamenejme, že v literatuře jsou často zobecněné funkce definovány pomocí pojmu funkcionál např. [18].

4.1 Diracova zobecněná funkce $\delta(t)$, zobecněná derivace

Při studiu mnoha přírodních jevů se setkáváme s veličinami, které jsou všude nulové s výjimkou malého časového intervalu I , ale jejich celková energie (integrál) je kladná. Takový charakter má velká síla působící po velmi krátkou dobu (náraz), velké elektrické proudy působící jen velice krátkou dobu (elektrický impuls), aj. Z věty o střední hodnotě integrálu vyplývá, že funkční hodnoty takovéto funkce musí být uvnitř I velké a pro konstantní hodnotu integrálu a délku intervalu blížící se nule musí funkční hodnoty růst nade všechny meze.

Matematickou motivací následujících úvah může být nalezení derivace nespojitě funkce. Nejdříve uveďme možný postup pro zavedení derivace spojitě funkce, které nemají v daném bodě derivaci. Takovou funkcí je např. absolutní hodnota $y = |x|$ v bodě 0. V těchto případech považujeme za derivaci této funkce funkci, jejíž integrál je roven zadané funkci. V tomto smyslu je nespojitá funkce $\text{sgn}(x)$ derivací funkce $|x|$, neboť platí

$$|x| = \int_0^x \text{sgn}(t) dt.$$

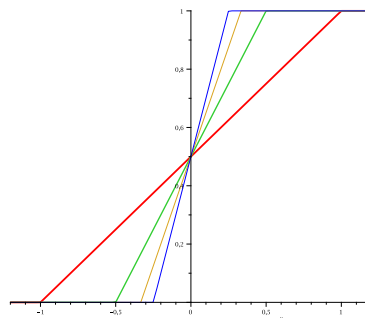
Jako prototyp nespojitě funkce uvažujme Heavisideovu funkci jednotkového skoku $\eta(t)$, které je definována:

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{pro } x = 0; \\ 1, & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

Funkce $\eta(t)$ je nespojitá v bodě 0 (bod nespojitosti prvního druhu) bez ohledu na funkční hodnotu pro $x = 0$, neboť má funkce $\eta(t)$ různé jednostranné limity. Pomocí této funkce je

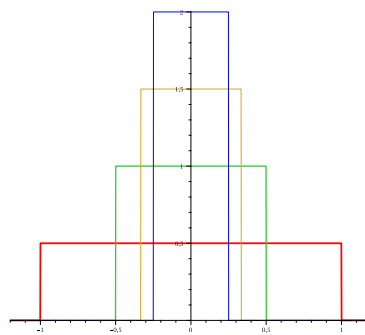
možné modelovat funkce, které mají v izolovaných bodech nespojitosti prvního druhu (jednostranné limity jsou konečné a nejsou si rovny). Heavisideova funkce je limitou posloupnosti funkcí

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < -1/n; \\ \frac{n}{2} \left(t + \frac{1}{n}\right), & \text{pro } -1/n \leq t \leq 1/n; \\ 1, & \text{pro } 1/n \leq t, \end{cases}$$



kteřé jsou spojité a mají ve výše uvedeném smyslu derivaci:

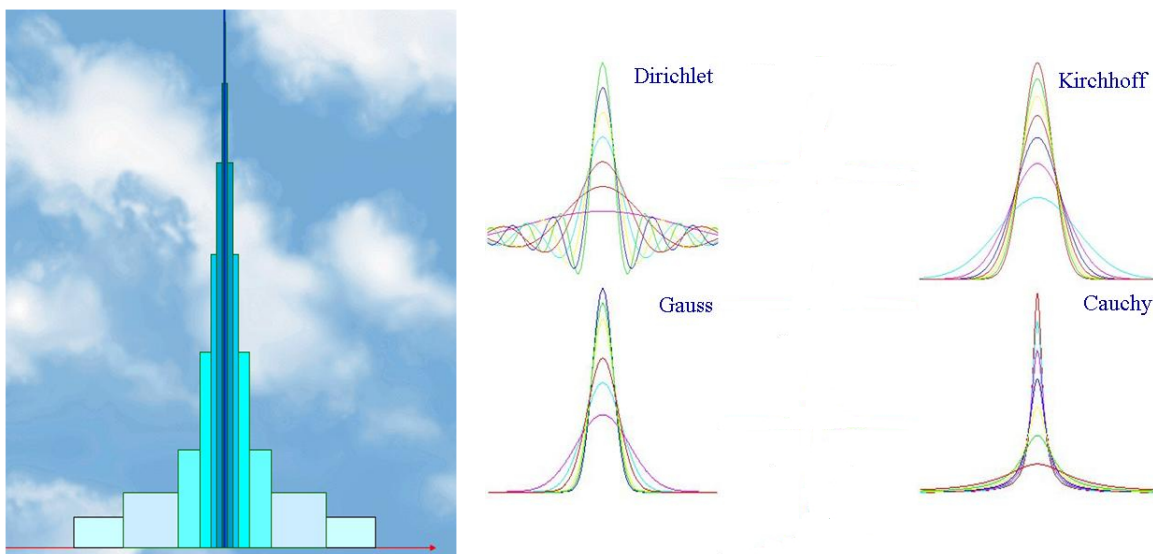
$$F'_n(t) = f_n(t) = \frac{n}{2} \left(\eta\left(t + \frac{1}{n}\right) - \eta\left(t - \frac{1}{n}\right) \right).$$



Provedením obvyklého limitního přechodu pro funkce $f_n(t)$, dostaneme funkci nulovou s výjimkou jednoho bodu s neohrazenou funkční hodnotou ($f(0) = \infty$). Integrál z takovéto funkce je ovšem nulový a tedy výše naznačený postup je nevyhovující. Budeme postupovat podobně jako u reálných čísel, kdy iracionální čísla chápeme jako limitu posloupnosti čísel racionálních blížících se k danému iracionálnímu číslu. Příkladem mohou být různé „definice“ čísla e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Podobně posloupnost obdélníkových kmitů $f_n(t)$ není jedinou posloupností funkcí, které jsou derivací funkcí majících za limitu Heavisideovu funkci jednotkového skoku. Stručně jsou uvedeny grafy některých dalších možných posloupností funkcí:



Uvedená nejednoznačnost těchto posloupností je důvodem k zobecnění, proto zavedeme pojem jehlové funkce.

Definice 4.1. Spojitou, příp. po částech spojitou funkci, $\delta(t, \lambda)$ argumentu t závislou na parametru λ nazveme jehlovou funkcí jestliže platí:

1. $\delta(t, \lambda) = 0$ pro $|t| > \lambda$;
2. $\delta(t, \lambda) \geq 0$ pro $|t| < \lambda$;
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \lambda) dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda) dt = 1$.

Uvažme limitní chování jehlové funkce $\delta(t, \lambda)$ pro $\lambda \rightarrow 0$. Současně platí

- $\delta(t, \lambda) = 0$ pro $t \neq 0$ a $\lambda \rightarrow 0$.
- $\delta(0, \lambda) \rightarrow \infty$ pro $\lambda \rightarrow 0$, což plyne z věty o střední hodnotě určitého integrálu.

To znamená, že limita jehlové funkce pro $\delta \rightarrow 0$ v klasickém slova smyslu nemá požadovanou vlastnost. Proto uvažujme limitní chování $\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt$ pro $\lambda \rightarrow 0$, kde $\delta(t, \lambda)$ je jehlovou funkcí a $f(t)$ je spojitá funkce. I v tomto případě nastanou dva případy v závislosti na skutečnosti, zda interval $\langle a, b \rangle$ obsahuje počátek či nikoli:

- Pro $ab < 0$ ($a < b$) platí

$$\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} f(t)\delta(t, \lambda)dt = f(\tau) \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda)dt = f(\tau), \text{ kde } \tau \in (a, b)$$

je vhodné číslo, existující podle věty o střední hodnotě integrálu.

- Pro $ab > 0$ ($a < b$) platí $\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = 0$.

Protože hodnota $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = \begin{cases} f(0), & \text{pro } ab < 0; \\ 0, & \text{pro } ab > 0, \end{cases}$ tedy nezávisí na volbě konkrétní jehlové funkce $\delta(t, \lambda)$ můžeme použít stručnější zápis

Definice 4.2. Zavedme označení

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = \int_a^b f(t)\delta(t)dt. \quad (4.1)$$

Potom v integrálech používaný symbol $\delta(t)$ nazýváme **Diracovou distribucí**, či **Diracovým impulsem**.

Diracova distribuce je tzv. zobecněnou funkcí, charakterizující limitní chování jehlové funkce $\delta(t, \lambda)$ pro $\lambda \rightarrow 0$ a užívá se při výpočtu integrálů. Pro Diracovu distribuci $\delta(t)$ a spojitou funkci $f(t)$ platí tzv. filtrační vlastnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0 - t)dt = f(t_0). \quad (4.2)$$

Pro monotónní funkci $\varphi(t)$, která má prostý nulový bod v t_0 tj. $\varphi(t_0) = 0 \wedge \varphi'(t_0) \neq 0$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\varphi(t - t_0))dt = \frac{f(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \quad (4.3)$$

Vztah mezi Diracovým impulsem a Heavisideovou funkcí $\eta(t)$ je dán skutečností:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1 & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

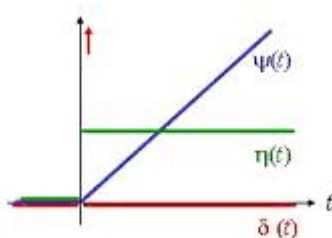
Heavisideovou funkci jednotkového skoku tak můžeme chápat jako zobecněnou primitivní funkci Diracova impulsu. Tento vztah je podobný vztahu mezi Heavisideovou funkcí $\eta(t)$ a identickou funkcí $\psi(t)$, kde platí

$$\int_{-\infty}^t \eta(\tau)d\tau = \psi(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t \leq 0. \end{cases}$$

Využitím vztahu mezi integrálem a derivací můžeme interpretovat Diracovu distribuci jako derivaci Heavisideovy funkce jednotkového skoku, kterou podobně můžeme dále chápat jako derivaci identické funkce $\psi(t)$. Tj.

$$\psi''(t) = \eta'(t) = \delta(t).$$

Situaci ilustruje následující obrázek



Tato ukázka ilustruje obecnější situaci zavedení zobecněné derivace funkcí, které jsou po částech spojitě spolu s derivací.

Definice 4.3. Nechť má funkce $f(t)$ v t_0 bod nespojitosti prvního druhu a je vyjádřena ve tvaru

$$f(t) = \psi(t) + \left(\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right) \eta(t - t_0),$$

kde funkce $\psi(t)$ je spojitá v t_0 a má zde klasickou derivaci $\psi'(t_0)$. **Zobecněnou derivaci** $f'_o(t)$ nazveme potom součet

$$f'_o(t) = \psi'(t) + \left(\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right) \delta(t - t_0). \quad (4.4)$$

Analogicky postupujeme také u zobecněných derivací vyšších řádů. Navíc uvedený postup koresponduje i se zavedením derivace zobecněné $\delta(t)$ funkce, tj. stanovení limity pro $h \rightarrow 0$ z integrálu

$$\int_a^b f(t) \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} dt = \frac{f(-h) - f(0)}{h}$$

Má-li funkce $f(t)$ derivaci $f'(0)$ dostáváme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} dt = \begin{cases} -f'(0) & \text{pro } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } 0 \notin (a, b) \end{cases}$$

Definice 4.4. Nechť funkce $f(t)$ má derivaci $f'(t_0)$ v bodě t_0 , potom v limitě z integrálu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta(t_0+h) - \delta(t_0)}{h} dt = \int_a^b f(t) \delta'(t - t_0) dt = -f'(t_0). \quad (4.5)$$

užitý symbol $\delta'(t)$ nazýváme **derivací Diracovy distribuce**. Jestliže existují potřebné derivace, zavádíme analogicky n -tou derivací Diracovy distribuce $\delta^{(n)}$ postupem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta^{(n-1)}(t_0+h) - \delta^{(n-1)}(t_0)}{h} dt = \int_a^b f(t) \delta^{(n)}(t - t_0) dt = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(t_0) & \text{pro } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } 0 \notin (a, b) \end{cases}. \quad (4.6)$$

Poznámka 2. Je-li navíc jehlová funkce sudá v proměnné t je možné vyjádřit i integrál z funkce $f(t)$ nespojitě v bodě 0:

$$\int_a^b f(t)\delta(t)dt = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) \right)$$

Příklad 4.5. Výše uvedené vlastnosti jsou demonstrovány na funkcích.

a) Zjednodušte výraz $(t^3 + 1)\delta(t - 2)$

Řešení. Protože je funkce $t^3 + 1$ spojitá lze v integrálech daný výraz podle (4.2) nahradit $(2^3 + 1)\delta(t - 2) = 9\delta(t - 2)$. \square

b) Vypočtěte integrál $\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t - t_0)dt, t_0 \geq 0$. Později bude tento integrál interpretován jako obraz Laplaceovy transformace Diracovy funkce $\delta(t - t_0)$.

Řešení. S využitím (4.2) a skutečnosti $\int_{-\infty}^0 e^{-pt}\delta(t - t_0)dt = 0$ dostáváme

$$\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-pt}\delta(t - t_0)dt = e^{-t_0p}$$

\square

c) Vypočtěte integrál $\int_{-\infty}^\infty (t^2 + 2)\delta(5 - 5t)dt$

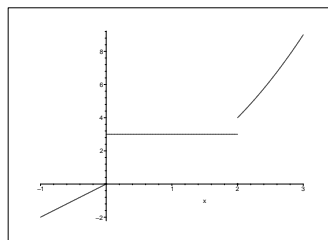
Řešení. Využijeme vlastnosti (4.3) a dostáváme:

$$\int_{-\infty}^\infty (t^2 + 2)\delta(5 - 5t)dt = \frac{1^2 + 2}{|-5|} = \frac{3}{5}$$

\square

d) Následující funkci zapište jediným analytickým zápisem a určete její první a druhou zobecněnou derivaci.

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } -\infty < t < 0 \\ 3 & \text{pro } 0 < t < 2 \\ t^2 & \text{pro } 2 < t < \infty \end{cases}$$



Řešení. K požadovanému zápisu využijeme funkci jednotkového skoku. Uvažme funkci $g(t) = 2t + (3 - 2t)\eta(t)$. Pro $t < 0$ platí $g(t) = 2t$, neboť součin $(3 - 2t)\eta(t)$ je nulový a pro $t > 0$ platí $g(t) = 2t + 3 - 2t = 3$, neboť $(3 - 2t)\eta(t) = 3 - 2t$. Tedy platí $g(t) = f(t)$ pro $t < 2$. V dalším zopakujeme daný postup, tj. k funkci $g(t)$ přičteme součin vhodné funkce s $\eta(t - 2)$. Tato je rovna rozdílu analytického vyjádření funkce

$f(t)$ pro $t > 2$ minus analytického vyjádření funkce $f(t)$ pro $0 < t < 2$, dohromady dostáváme:

$$f(t) = 2t + (3 - 2t)\eta(t) + (t^2 - 3)\eta(t - 2).$$

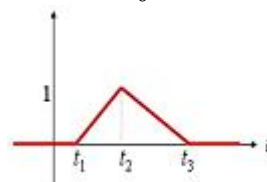
Pro funkce vyjádřené „složitěji“ postupujeme analogicky vždy „zleva doprava“. Zobecněné derivace získáme podle definice:

$$\begin{aligned} f'_o(t) &= 2 - 2\eta(t) + (3 - 2t)\delta(t) + 2t\eta(t - 2) + (t^2 - 3)\delta(t - 2) = \\ &= 2 - 2\eta(t) + 3\delta(t) + 2t\eta(t - 2) + \delta(t - 2), \\ f''_o(t) &= -2\delta(t) + 3\delta'(t) + 2\eta(t - 2) + 2t\delta(t - 2) + \delta'(t - 2) = \\ &= -2\delta(t) + 3\delta'(t) + 2\eta(t - 2) + 4\delta(t - 2) + \delta'(t - 2). \end{aligned}$$

Poznamenejme, že třetí zobecněná derivace bude pouze lineární kombinací funkce jednotkového skoku a jejich derivací. \square

e) Nalezněte druhou zobecněnou derivaci tzv. obecného trojúhelníkového impulsu.

Trojúhelníkový impuls $f(t)$ je zadaný grafem, který je mimo interval $\langle t_1, t_3 \rangle$ nulový a vrchol trojúhelníka má pro $t = t_2$ ($t_1 < t_2 < t_3$) hodnotu v .



Řešení. V tomto příkladě budeme postupovat tak, že derivaci budeme provádět po jednotlivých intervalech bez „znalosti“ analytického zápisu. V intervalu (t_1, t_2) je derivace rovna $\frac{v}{t_2 - t_1}$, což je směrnice úsečky v tomto intervalu analogicky v intervalu (t_2, t_3) je derivace rovna $\frac{-v}{t_3 - t_2}$ a v zbývajících intervalech je derivace nulová. Druhou zobecněnou derivaci určíme snadno ze skutečnosti $\eta'(t) = \delta(t)$ a ze zápisu první derivace pomocí Heavisideovy funkce:

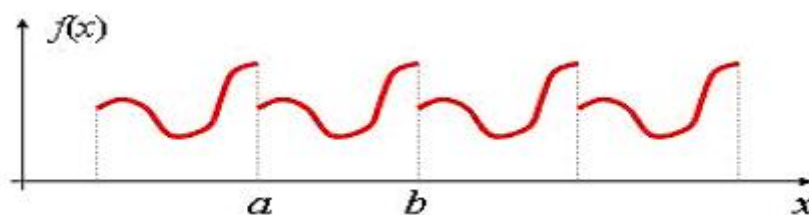
$$\begin{aligned} f'_o(t) &= \frac{v((t_3 - t_2)\eta(t - t_1) + (t_1 - t_3)\eta(t - t_2) + (t_2 - t_1)\eta(t - t_3))}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} \\ f''_o(t) &= \frac{v((t_3 - t_2)\delta(t - t_1) + (t_1 - t_3)\delta(t - t_2) + (t_2 - t_1)\delta(t - t_3))}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} \end{aligned}$$

\square

4.2 Fourierovy trigonometrické řady

4.2.1 Periodické a harmonické funkce

Při vyšetřování periodických dějů, jako jsou např. elektrické, mechanické a akustické kmity, kruhové pohyby, ale také při řešení diferenciálních či integrálních rovnic používáme periodické funkce. Mějme interval $I = \langle a, b \rangle$ a označme $T = b - a$. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *periodická s periodou T* , jestliže platí $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Zabýváme se nejdříve speciálními periodickými funkcemi.



Obr. 4.1: Periodická funkce

Definice 4.6. Reálnou harmonickou funkcí nazýváme každou reálnou funkci, kterou je možné zapsat v tzv. fázovém tvaru

$$f(t) = F \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{kde } -\infty < t < \infty \quad (4.7)$$

a tato je jednoznačně určena trojicí parametrů F , φ a ω , které jsou postupně nazývány **amplituda**, **počáteční fáze** a **frekvence** harmonické funkce,

Udává-li funkce $f(t)$ závislost nějaké fyzikální veličiny na čase, pak se hovoří o harmonickém kmitání. Poznamenejme navíc, že každé nenulové řešení diferenciální rovnice

$$f'' + \omega^2 f = 0, \quad \text{kde } \omega > 0$$

je harmonickou funkcí. Navíc také platí, že harmonická funkce (4.7) je pro $F \neq 0$ periodická s periodou $T = 2\pi/\omega$.

Za předpokladu, že hodnota frekvence ω je pevně zvolena, lze funkci (4.7) jednoznačně určit dvojicí F , φ nebo jedním komplexním parametrem \hat{F} nazývaným **komplexní amplituda**:

$$\hat{F} = F e^{j\varphi} = F(\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad (4.8)$$

tj. $|\hat{F}| = F$, $\arg \hat{F} = \varphi$. V Paragrafu 3.3 věnovaném komplexní funkci reálné proměnné jsme ukázali, že i součet harmonických funkcí se (stejnou frekvencí ω)

$$f_1(t) = F_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad f_2(t) = F_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

je za předpokladu

$$\hat{F}_1 + \hat{F}_2 = F_1 e^{j\varphi_1} + F_2 e^{j\varphi_2} \neq 0$$

harmonická (funkce se stejnou frekvencí ω), tj.

$$f(t) = F_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + F_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = F \cos(\omega t + \varphi).$$

Navíc komplexní amplituda součtu je součtem komplexních amplitud, tj.

$$\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2.$$

Poznamenejme, že i funkce $f(t) = F \sin(\omega t + \varphi)$ je také harmonická funkce, neboť platí $\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$. Další možností zápisu harmonické funkce $F \cos(\omega t + \varphi)$ je

$$F \cos(\omega t + \varphi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

přičemž $a = F \cos \varphi$, $b = -F \sin \varphi$, který bude dále využíván.

4.2.2 Fourierovy trigonometrické řady

Dále se budeme zabývat možností vyjádřit periodickou funkci $f(t)$ s periodou T . Jedna z možností může být odvozena jako důsledek Laurentova rozvoje holomorfních funkcí. Předpokládejme, že funkce $F(z)$ je holomorfní na prstenci $P_{rR}(0)$ kde pro konstanty r, R platí $0 \leq r < 1 < R$. Uvažme parametrizaci kladně orientované jednotkové kružnice se středem v počátku ve tvaru $\Gamma(t) = \exp(j\omega t) = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$, $t \in \langle \theta, \theta + T \rangle$ kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Potom koeficienty Laurentova rozvoje

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

dostaneme dle (3.41) ve tvaru integrálu

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{\theta}^{\theta+T} \frac{F(\exp(j\omega t))}{\exp(j\omega(n+1)t)} \exp(j\omega t) \frac{2\pi j}{T} dt =$$

$$\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(j\omega(-n)t) dt. \quad (4.9)$$

Funkce $f(t) = F(\exp(j\omega t))$ je periodická s periodou T a dosazením $z = \exp(j\omega t)$ do Laurentova rozvoje dostaneme:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}) =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((c_n + c_{-n}) \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + (c_n - c_{-n}) \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2} \right) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t),$$

kde platí $a_0 = 2c_0$ $a_n = c_n + c_{-n}$ $b_n = j(c_n - c_{-n})$.

Tyto koeficienty můžeme pomocí integrálního vyjádření (4.9) odvodit ve tvaru

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(-j\omega n t) dt +$$

$$\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(j\omega n t) dt = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = \frac{j}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(-j\omega n t) dt -$$

$$\frac{j}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(j\omega n t) dt = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Z tohoto vyjádření koeficientů je patrné, že pro reálnou T periodickou funkci $f(t)$ jsou i koeficienty a_n, b_n reálné. Výše uvedené řady a vzorce jsou spojovány se jménem francouzského matematika a fyzika Josepha Fouriera.

Definice 4.7. Necht' je funkce $f(t)$ integrovatelná na intervalu $\langle \theta, \theta + T \rangle$. Označme $\omega = 2\pi/T$. Potom řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (4.10)$$

nazýváme **Fourierovou trigonometrickou řadou** funkce $f(t)$, kde konstanty a_n, b_n jsou určeny vztahy

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (4.11)$$

a nazývají se **koefficienty Fourierovy řady** funkce $f(t)$. Tuto řadu je možné vyjádřit v tzv. **komplexním tvaru Fourierovy řady**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega t), \text{ kde } c_n = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \exp(-jn\omega t) dt. \quad (4.12)$$

nebo tzv. **fázovém tvaru Fourierovy řady**:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega t + \varphi_n), \text{ kde } 2c_{-n} = F_n e^{j\varphi_n} \quad (4.13)$$

Poznámka 4.8. Konstanty v jednotlivých tvarech Fourierovy řady jsou svázány jednoduchými vztahy. F_n je modul a φ_n je argument komplexního čísla $2c_{-n}$ dále

$$\begin{aligned} F_n &= |a_n - jb_n| & \varphi_n &= \text{Arg}(a_n - jb_n) \\ a_n &= F_n \cos \varphi_n & b_n &= -F_n \sin \varphi_n \\ a_n &= c_n + c_{-n} & b_n &= j(c_n - c_{-n}) \\ c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} & c_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2}. \end{aligned}$$

Upozorněme, že Fourierovy řady se v technické praxi často používají velice formálně, bez ověření přípustnosti jejich použití, což může vést k naprosto nesprávným výsledkům. Pokud tedy provádíme různé operace formálně, je nutné se zpětně přesvědčit, že použití všech operací bylo oprávněné. Dále poznamenejme, že podmínkou pro stanovení koeficientů a_n, b_n , případně c_n nebo F_n, φ_n je možnost určit integrál z funkce $f(t)$ na intervalu délky T . Tato podmínka není ovšem dostatečná pro konvergenci (4.10), (4.12) případně (4.13) a rovnosti součtů těchto řad původní funkci. V literatuře je udáván často jako příklad takovéto funkce součet řady

$$s(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\ln n},$$

která není Fourierovou řadou žádné integrovatelné funkce na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Pro stanovení těchto podmínek, které upravují možnost užití Fourierových řad, je potřebná následující definice.

Definice 4.9. Řekneme, že funkce $f(t)$ je **po částech spojitá** na uzavřeném intervalu, jestliže je možné tento interval rozdělit konečným počtem bodů t_1, t_2, \dots, t_k tak, že na každém z těchto intervalů je spojitá a existují konečné jednostranné limity v bodech t_i pro $i = 1, \dots, k$.

Dále řekneme, že je funkce **po částech monotónní** na uzavřeném intervalu, jestliže je možné tento interval rozdělit konečným počtem bodů tak, že na každém z těchto intervalů je monotónní.

Nakonec řekneme, že funkce $f(t)$ splňuje na uzavřeném intervalu **Dirichletovy podmínky**, jestliže je na tomto intervalu po částech spojitá a po částech monotónní.

Věta 4.10. *Nechť funkce $f(t)$ je periodická s periodou T a splňuje Dirichletovy podmínky na libovolném intervalu délky T . Potom řada ve vztahu (4.10), resp. (4.12), resp. (4.13) (kde Fourierovy koeficienty jsou definovány vztahy (4.11), resp. (4.12), resp. (4.13) konverguje pro každé t a její součet je roven:*

1. $f(t)$ v každém bodě t , v němž je funkce $f(t)$ spojitá,
2. $\frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) \right)$ v každém bodě t , v němž je funkce $f(t)$ nespojitá.

Příklad 4.11. Sestrojte Fourierovu řadu funkce $f(t) = t$ pro $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$, která má periodu $T = 2\pi$.

Řešení. V tomto případě je $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Dále zvolíme $\theta = -\pi$, abychom mohli při určení koeficientů a_n využít skutečnosti, že funkce $f(t) = t$ je lichá, protože potom integrály (4.11) určující koeficienty a_n jsou integrály z liché funkce na symetrickém intervalu kolem počátku nulové a tedy $a_n = 0$. Pomocí integrace per partes spočítáme

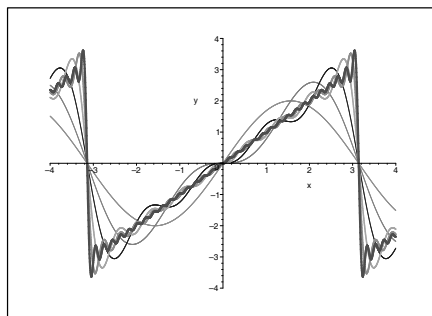
$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Při výpočtu integrálu jsme také využili možnosti vyjádřit integrál ze sudé funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ jako dvojnásobek integrálu z této funkce na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Protože funkce $f(t)$ splňuje Dirichletovy podmínky, podle Věty 4.10 řada

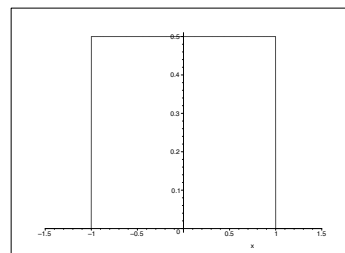
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nt)}{n}$$

konverguje pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a pro $t \in (-\pi, \pi)$ je rovna t , pro $t = n\pi$ je rovna 0. Následující obrázek ukazuje částečné součty postupně pro 1, 2, 4, 8, 16, 32 členů. □

V dalším příkladě rozvineme sudou funkci, která popisuje periodicky se opakující obdélníkové impulsy, do komplexního tvaru Fourierova rozvoje.

Obr. 4.2: Aproximace funkce $f(t) = t$ **Příklad 4.12.**

Uvažujme obdélníkový signál, který má šířku 2ε , výšku h a délka periody je T ($T > 2\varepsilon$). Funkci $f(t)$, která vyhovuje zadaným požadavkům, zvolíme tak, aby byla sudá, tj. v intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$, který má délku T , bude signál nenulový pouze v intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$, viz obrázek vpravo



Řešení. Pro frekvenci ω platí $\omega = 2\pi/T$:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h e^{-jn\omega t} dt = \frac{h}{-jn\omega T} [e^{-jn\omega t}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{h}{T} \frac{2 \sin(n\omega\varepsilon)}{n\omega}$$

Koeficient $c_0 = 2h\varepsilon/T$ není daným vztahem definován, neboť se jedná o podíl $\frac{0}{0}$. Tato skutečnost bývá zejména v technické literatuře řešena zavedením funkce sinc, která je definována vztahem

$$\text{sinc } t = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{pro } t \neq 0; \\ 1, & \text{pro } t = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

což umožňuje zápis $c_n = \frac{h\varepsilon}{T} \text{sinc}(n\omega\varepsilon)$ a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2h\varepsilon}{T} \text{sinc}(n\omega\varepsilon) e^{jn\omega t} = \frac{2h\varepsilon}{T} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h\varepsilon}{T} \text{sinc}(n\omega\varepsilon) \cos(n\omega t).$$

Řada vpravo je fázový tvar Fourierovy řady. Skutečnost, že funkce $f(t)$ je sudá, nám sice neumožnila určit část koeficientů c_n , ale projevila se díky Poznámce 4.8 v tom, že c_n jsou reálné (neboť $b_n = 0$). \square

Příklad 4.13. Rozviňte funkci $f(t) = \frac{1}{a^2 - 2a \cos t + 1}$, kde $a > 1$ ve Fourierovu řadu.

Řešení. V tomto případě použijeme jiný postup než v ostatních příkladech. Budeme postupovat analogicky s motivací, která předcházela Definici 4.7. Provedeme-li substituci $z = \exp(jt) \Leftrightarrow \cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$, dostáváme po dosazení do funkce $f(t) = F(\exp(jt))$ ve shodě s Příkladem 3.64 $F(z) = \frac{1}{a^2 - 2a \frac{z^2+1}{2z} + 1} = \frac{z}{(1-az)(z-a)}$, což je funkce, která je na jednotkové kružnici se středem v počátku holomorfní a je tedy možné určit její Laurentův rozvoj rozkladem na součet parciálních zlomků:

$$\begin{aligned} \frac{z}{(1-az)(z-a)} &= \frac{1}{a^2-1} \left(\frac{1}{az-1} + \frac{a}{a-z} \right) = \frac{1}{a^2-1} \left(\frac{1}{az} \frac{1}{1-\frac{1}{az}} + \frac{1}{1-\frac{z}{a}} \right) = \\ &= \frac{1}{a^2-1} \left(\frac{1}{az} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(az)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a} \right)^n \right) = \frac{1}{a^2-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{a^{|n|}}, \end{aligned}$$

což znamená $c_n = \frac{a^{-|n|}}{a^2-1} = \frac{1}{(a^2-1)a^{|n|}}$. Jinou možností vyjádření Fourierova rozvoje s využitím zpětné substituce odvodíme

$$f(z) = \frac{1}{a^2-1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) \right) \Leftrightarrow F(t) = \frac{1}{a^2-1} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \cos(nt) \right).$$

Tedy dostáváme Fourierův rozvoj funkce $F(t) = \frac{1}{a^2 - 2a \cos t + 1}$:

$$F(t) = \frac{1}{a^2-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{jnt}}{a^{|n|}} = \frac{1}{a^2-1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{a^n} \right),$$

kde řada vlevo je komplexní tvar Fourierovy řady a řada vpravo je současně Fourierovou trigonometrickou řadou a tak i fázovým tvarem této řady. \square

Příklad 4.14. Rozviňme tzv. **dvoucestné** a **jednocestné usměrnění** ve Fourierovu řadu.

Dvoucestné usměrnění je definované relací $f_d(t) = |\sin t|$ neboli $f_d(t) = \sin t$ pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$ a funkce $f_d(t)$ je periodická s periodou π , tj. $f(t + \pi) = f(t)$. Funkce je zřejmě sudá, proto pro všechna n je $b_n = 0$. Stačí tedy určit jen koeficienty a_n . Nejdříve vypočteme koeficient a_0 :

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Využitím známé trigonometrické relace $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$ postupně vypočteme

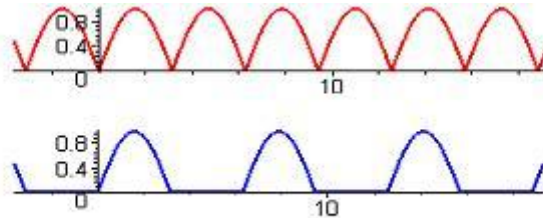
$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)) dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)t)}{n-1} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos((n+1)\pi) - 1}{n+1} + \frac{\cos((n-1)\pi) - 1}{n-1} \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)(n-1)} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi(n^2-1)} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Protože funkce $f_d(t)$ je spojitá dostáváme její Fourierův rozvoj, kde $n = 2m$, ve tvaru

$$f_d(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mt}{4m^2 - 1}.$$

Jednocestné usměrnění je definováno vztahem $f_j(t) = \frac{1}{2}(|\sin t| + \sin t)$. S využitím lineariry integrálu je zřejmé, že součet funkcí má rozvoj ve tvaru součtu rozvoje. Využijeme znalosti rozvoje dvoucestného usměrnění a bezprostředně dostáváme:

$$f_j(t) = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2mt)}{4m^2 - 1}$$



Obr. 4.3: Dvoucestné a jednocestné usměrnění

Poznámka 3. Jestliže funkce $f(t)$ splňuje Dirichletovy podmínky (viz Definice 4.9) potom lze také získat integrál z funkce $f(t)$ jako řadu, která vznikne z původní integrací jejich členů. Analogické tvrzení pro derivaci platí, jestliže řada vzniklá derivováním jednotlivých členů konverguje, což ale nemusí být vždy splněno.

Chceme-li rozvinout ve Fourierovu řadu funkci $f(t) = \cos t$ pro $t \in (0, \pi)$ s periodou π , tj. $f(t + \pi) = f(t)$. Tuto funkci můžeme s výjimkou bodů $n\pi$ chápat jako derivaci funkce $|\sin t|$. Navíc splňuje Dirichletovy podmínky a její Fourierův rozvoj existuje a můžeme jej bezprostředně získat derivací člen po členu rozvoje funkce $|\sin t|$, neboť ten konverguje tj.

$$f(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin(2mt)}{4m^2 - 1}$$

Naopak derivací člen po členu rozvoje v Příkladu 4.11 vznikne řada, která nesplňuje nutnou podmínku konvergence a tedy uvedený postup nelze použít.

4.2.3 Rozvoj pouze do sinů resp. kosinů

Předcházející ukázky nás mohou motivovat k úvaze, za jakých předpokladů je možné funkci rozvinout v řadu sinů nebo kosinů. Z předcházejících ukázek je patrné, že lichou funkci ($f(-t) = -f(t)$) rozložíme ve Fourierovu řadu pouze lichých funkcí, tj. v řadu sinů a sudou funkci ($f(-t) = f(t)$) rozložíme ve Fourierovu řadu pouze sudých funkcí, tj. v řadu kosinů. Tato skutečnost je dána tím, že integrál na symetrickém intervalu kolem počátku je z liché funkce nulový a pro součin sudých a lichých funkcí platí obdobná pravidla jako pro sčítání sudých a lichých čísel.

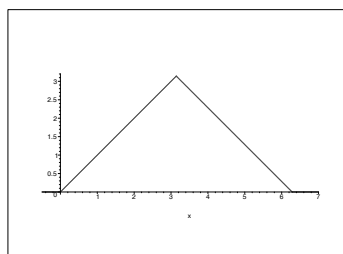
Tedy nebudeme-li trvat na periodicitě dané funkce $f(t)$ můžeme postupovat tak, že funkci $f(t)$ definovanou na intervalu $\langle 0, T \rangle$, je možné dodefinovat v intervalu $\langle -T, 0 \rangle$ v sudou $f_s(t)$ resp. lichou funkci $f_l(t)$, která má periodu $2T$. Potom v bodech kde je funkce $f(t)$ spojitá platí:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nT}{\pi} t, \quad \text{pro } t \in (0, T), \quad \text{kde } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt,$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nT}{\pi} t, \quad \text{pro } t \in (0, T), \quad \text{kde } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt.$$

Příklad 4.15. Na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ rozviňte do sinů a kosinů funkci $f(t)$ definovanou vztahem

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t & \text{pro } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$



Řešení. Pro rozvoj do sinů je třeba vypočít integrály (při jejich výpočtu zohledníme, že platí $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{2\pi} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin \frac{nt}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t) \sin \frac{nt}{2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{4}{n^2} \left(\sin \left(\frac{nt}{2} \right) - \frac{nt}{2} \cos \left(\frac{nt}{2} \right) \right) \right]_0^{\pi} + \right. \\ & \left. 2\pi \left[-\frac{2}{n} \cos \left(\frac{nt}{2} \right) \right]_{\pi}^{2\pi} - \left[\frac{4}{n^2} \left(\sin \left(\frac{nt}{2} \right) - \frac{nt}{2} \cos \left(\frac{nt}{2} \right) \right) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{n^2} \left(\sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{n\pi}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) - \frac{4\pi}{n} (-1)^n + \frac{4\pi}{n} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \right. \\ & \left. \frac{4}{n^2} \left(-n\pi (-1)^n - \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{n\pi}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) \right) = \frac{8}{\pi n^2} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Rozvoj do sinů $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)$ obsahuje pouze členy s lichými koeficienty:

$$\frac{8}{\pi} \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(\frac{3t}{2}\right) + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + \dots \right)$$

Pro rozvoj do kosinů je třeba vypočítat integrály

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \frac{n\pi t}{2\pi} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos \frac{nt}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t) \cos \frac{nt}{2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{4}{n^2} \left(\cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \frac{nt}{2} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right) \right]_0^{\pi} + \right. \\ &\quad \left. 2 \left[\frac{2}{n} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right]_{\pi}^{2\pi} - \left[\frac{4}{n^2} \left(\cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \frac{nt}{2} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) + \frac{4\pi}{n} \sin(n\pi) - \frac{4\pi}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{n^2} \left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \right) = \frac{4}{\pi n^2} \left(2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right) \end{aligned}$$

Dále musíme ještě vyčíslit $a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$, což lze určením plochy shora ohraničené funkcí $f(t)$ zdola osou x , jejíž hodnota je π . Rozvoj do kosinů můžeme tedy formálně vyjádřit ve tvaru

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \left(2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right) \cos\left(\frac{n\pi t}{2\pi}\right).$$

Tento tvar lze zjednodušit v závislosti na sudosti resp. lichosti n :

Pro $n = 2k - 1$ platí

$$a_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^2} (0 - 1 + 1) = 0.$$

Pro $n = 2k$ platí

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi(2k)^2} (2(-1)^k - 1 - 1) = \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1).$$

Další zjednodušení dostáváme analogicky s předchozím opětovným rozlišením na sudá resp. lichá k

Pro $k = 2\ell$ $a_{2k} = a_{4\ell} = 0$

Pro $k = 2\ell - 1$ $a_{2(2\ell-1)} = \frac{4}{\pi(2\ell-1)^2}$.

Funkci $f(t)$ můžeme tedy rozvinout do kosinů tak, že budeme zapisovat pouze nenulové členy rozvoje tj. budeme počítat přes index ℓ a tomu odpovídajícím způsobem upravíme

koeficienty v argumentu funkcí kosinus $n = 2k = 2(2\ell - 1)$:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2\ell-1)^2} \cos \frac{2(2\ell-1)}{2}t = \frac{\pi}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2\ell-1)^2} \cos((2\ell-1)t)$$

Tento tvar odpovídá rozvoji na intervalu poloviční délky, což není žádná náhoda, neboť funkce $y = t$ definovaná v intervalu $(0, \pi)$ rozvinutá do cosinů, tj. sudá funkce, má stejné periodické pokračování jako funkce $f(t)$. Tento fakt umožňuje podstatným způsobem zjednodušit výpočet Fourierova rozvoje do kosinů a sice volit $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos \frac{n\pi t}{\pi} dt$ a rozvoj provést vzhledem k funkcím $\cos(nt)$. \square

4.2.4 Grafické znázornění Fourierova rozvoje - Spektrum

Graficky Fourierův rozvoj reprezentujeme pomocí **spektra**, kdy jednu číselnou osu užíváme k vynášení frekvencí $n\omega = \frac{n2\pi}{T}$ a v rovině kolmé na osu frekvencí koeficienty $a_n = F_n \cos \varphi_n$, $b_n = -F_n \sin \varphi_n$ jsou souřadnicemi bodu přiřazeného n -té harmonické složce Fourierova rozvoje. Tato grafická interpretace je ovšem trojrozměrná, proto se používá zobrazení pomocí dvou rovinných zobrazení, kdy se na jednu osu vynáší frekvence $n\omega = \frac{n2\pi}{T}$ a na druhou koeficient a_n resp. b_n , které znázorníme úsečkou začínající na ose frekvencí a končící v bodě jehož druhá souřadnice je a_n resp. b_n . Druhou možností je vynášet místo dvojice a_n, b_n dvojici F_n, φ_n , hovoříme tak o **spektru modulů** a **spektru argumentů**.

Další možností je vyjádření spektra pro Fourierův rozvoj v komplexním tvaru. Analogicky s reálným oborem můžeme vytvořit dvojici zobrazující zvlášť reálnou a imaginární část koeficientu c_n nebo obvykle postupujeme tak, že zobrazujeme komplexní koeficient c_n dvojicí jeho amplitudy a argumentu.

Analogicky s harmonickými funkcemi platí pro spektra funkcí:

1. spektrum součtu je rovno součtu spekter
2. spektrum α násobku funkce je rovno α násobku tohoto spektra
3. posunutá funkce $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ má spektrum modulů stejné jako funkce $f(t)$ a spektrum argumentů je o $n\omega\tau$ menší tj.

$$\varphi_{\varphi n} = \varphi_n - n\omega\tau$$

4. spektrum funkce se změněným měřítkem $f(mt)$ má periodu T/m a frekvence harmonických složek jsou násobkem $m\omega$, ale koeficienty a_n, b_n a tedy moduly F_n a argumenty φ_n jsou stejné.

Závěrem uvedme, že výpočet integrálu $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt$, který je nazýván střední hodnotou součinu dvou funkcí se stejnou periodou, pro které existuje Fourierův rozvoj:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin n\omega t = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega t}$$

$$g(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{-jn\omega t},$$

je možné realizovat bez použití integrování. Využijte se přitom skutečnost, že trigonometrický systém funkcí

$$1, \cos(\omega t), \dots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \dots, \sin(n\omega t), \dots$$

je ortogonální na intervalu délky periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Tato vlastnost znamená, že pro dvě různé funkce $f_1(t) \neq f_2(t)$ tohoto systému platí $\int_0^T f_1(t)f_2(t) dt = 0$. S využitím této skutečnosti je možné odvodit:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt = \frac{a_0}{2} \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \gamma_{-n}$$

Poznamenejme, že pomocí tohoto vztahu je možné určit hodnotu integrálu

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt,$$

který je v technické praxi interpretován jako střední výkon elektromagnetické soustavy v ustáleném stavu, které je napájena ze zdroje, jehož napětí $u(t)$ je periodická funkce a $i(t)$ je proud, který je rovněž periodická funkce.

Pro $f(t) = g(t)$ dostáváme tzv. Parsevalovu rovnost tj.

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n}$$

4.3 Fourierova transformace a Fourierův integrál

V tomto odstavci se budeme zabývat přenesením aparátu komplexního tvaru Fourierova rozvoje periodických funkcí na funkce, které nejsou periodické. Tímto postupem je motivováno zavedení pojmu Fourierovy transformace spolu s „ověřením“ základního vztahu této transformace.

Uvažujme na intervalu $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$ funkci $f(t)$, která zde splňuje Dirichletovy podmínky, viz Definice 4.9. S využitím Věty 4.10 na tomto intervalu dostáváme ve všech bodech spojitosti funkce $f(t)$ rovnost:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega x} dx e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega(x-t)} dx, \text{ kde } t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right).$$

Proto, abychom mohli výše uvedenou sumu interpretovat jako integrální součet, zavedeme dělení množiny reálných čísel jako posloupnost bodů $z_n = n\omega = \frac{n2\pi}{T}$ pro $n = -\infty, \dots, \infty$, přičemž norma dělení $\Delta z_n = z_{n+1} - z_n = \frac{2\pi}{T}$, se zmenšuje pro zvětšující se T tj. $\Delta z_n \rightarrow 0$

pro $T \rightarrow \infty$. Potom je možné při tomto označení vyjádřit funkční hodnotu $f(t)$ pomocí nekonečné řady

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta z_{m-1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn z_n(x-t)} dx,$$

a interpretovat ji jako integrální součet funkce

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jz(x-t)} dx$$

proměnné z na intervalu $(-\infty, \infty)$. Formálním provedením limitního přechodu pro periodu $T \rightarrow \infty$ obdržíme **Fourierův integrální vzorec**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jz(x-t)} dx \right) dz. \quad (4.15)$$

Před stanovením podmínek, které „zabezpečí“ platnost uvedeného vztahu, uveďme následující definici.

Definice 4.16. Řekneme, že funkce $f(t)$ je absolutně integrovatelná, jestliže platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Věta 4.17. *Nechť je funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná a $f(t)$, $f'(t)$ jsou po částech spojitě viz Definice 4.9, potom pravá strana vztahu (4.15) se rovná*

1. $f(t)$ v každém bodě spojitosti t funkce $f(t)$
2. $\frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) \right)$ v každém bodě nespojitosti t funkce $f(t)$.

Různými aspekty Fourierova integrálního vzorce se budeme zabývat v následujícím textu, neboť právě Fourierův integrální vzorec lze chápat jako složení Fourierovy transformace přímé a zpětné.

4.3.1 Zavedení Fourierovy transformace

Definice 4.18. Nechť $f(t)$ je funkce reálné proměnné t (reálná nebo komplexní), která je spolu se svojí derivací $f'(t)$ po částech spojitá a navíc je absolutně integrovatelná. Potom je pro všechna reálná ω definována funkce

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.16)$$

kterou nazýváme **Fourierovým obrazem** (spektrém) funkce $f(t)$. Toto přiřazení se nazývá **Fourierovou transformací**, funkce $f(t)$ jejím předmětem, funkce $F(\omega)$ obrazem Fourierovy transformace.

Druhý vztah, který můžeme vysvětlovat tak, že ze známé funkce $F(\omega)$ určíme funkci $f(t)$, tj.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.17)$$

nazýváme **zpětnou Fourierovou transformací**. Vztah mezi funkcemi $f(t)$ a $F(\omega)$ stručně zapisujeme

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega) \quad \text{a} \quad \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t).$$

Poznámka 4. V literatuře nalezneme i zápis $F(j\omega)$, který je třeba interpretovat jako složenou funkci, kdy vnější složkou je integrál obsahující komplexní proměnnou $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$, za kterou dosadíme vnitřní složku $j\omega$.

Obecně platí, že v případě sudé nebo liché funkce se výše uvedené integrály zjednoduší. Pro funkci $f(t)$, která je spolu se svojí derivací $f'(t)$ po částech spojitá a navíc je absolutně integrovatelná na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ je možné jejím definováním na intervalu $(-\infty, 0)$ do **sudé funkce** $f(-t) = f(t)$ zavést tzv. **Fourierovu kosinovou transformaci**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos(\omega t) d\omega.$$

a jejím definováním do **liché funkce** $f(-t) = -f(t)$ zavést tzv. **Fourierovu sinovou transformaci**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sin(\omega t) d\omega.$$

Fourierovu transformaci není možné „použít na libovolné funkce“, neboť užívané integrály nemusí obecně konvergovat. Situaci se zabývá následující věta, která stanoví dostatečnou podmínku existence obrazu Fourierovy transformace, navíc udává podmínku pro funkci komplexní proměnné, kterou musí splňovat obraz Fourierovy transformace reálné funkce.

Věta 4.19. *Nechť je funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná, potom obraz Fourierovy transformace $F(\omega)$ existuje a je spojitá funkce, pro kterou platí $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0$.*

Poznamejme, že se budeme zabývat i funkcemi komplexní proměnné nesplňujícími uvedenou podmínku, které budou obrazem zobecněných funkcí např. Diracův impuls viz níže. Další věta je analogií tvrzení, které jsme pro periodické funkce spojili s tzv. Parsevalovou rovností.

Věta 4.20. *Nechť $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$. Potom platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Další vlastnosti uspořádáme pro větší přehlednost do tabulky. Před uvedením věty, která shrne základní vlastnosti Fourierovy transformace připomeňme pojem konvoluce dvou absolutně integrovatelných funkcí.

Definice 4.21. Nechť jsou funkce $f(t)$, $g(t)$ absolutně integrovatelné. Potom funkci definovanou vztahem

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau. \quad (4.18)$$

nazýváme konvolucí funkcí $f(t)$, $g(t)$ a zapisujeme ji $f(t) * g(t)$.

Věta 4.22. O předmětech Fourierovy transformace (funkce v tabulce vlevo) předpokládáme, že jsou absolutně integrovatelné. Navíc označme $\mathcal{F}f(t) = F(\omega)$, případně $\mathcal{F}g(t) = G(\omega)$. Potom platí

Věta o	předmět	obraz
<i>linearitě</i>	$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$
<i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r}F\left(\frac{\omega}{r}\right)$
<i>posunutí předmětu</i>	$f(t - r)$	$\exp(-jr\omega)F(\omega)$
<i>posunutí obrazu</i>	$\exp(jrt)f(t)$	$F(\omega - r)$
<i>derivaci předmětu</i>	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
<i>derivaci obrazu</i>	$t^n f(t)$	$j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
<i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}$
<i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$	$F(\omega)G(\omega)$

Při zavádění Fourierovy transformace pro funkce nesplňující výše uvedené podmínky nebo pro zobecněné funkce postupujeme tak, že uvedenou funkci případně zobecněnou funkci chápeme jako „limitu“ posloupnosti funkcí, které uvedené předpoklady splňují. Fourierův obraz potom chápeme jako limitu obrazů funkcí dané posloupnosti. Takto můžeme nalézt obraz Fourierovy transformace Diracovy distribuce a jejích derivací, ale v těchto konkrétních případech můžeme formálně postupovat i tak, že u Diracovy distribuce využijeme tzv. filtrační vlastnost (4.2):

$$\mathcal{F}\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (4.19)$$

Pro derivaci Diracovy delta funkce lze odvodit:

$$\mathcal{F}\delta^{(n)}(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-j\omega t} dt = (j\omega)^n e^{-j\omega t_0}. \quad (4.20)$$

Pro funkci jednotkového skoku můžeme přímým výpočtem získat:

$$\mathcal{F}\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{-j}{\omega} \quad (4.21)$$

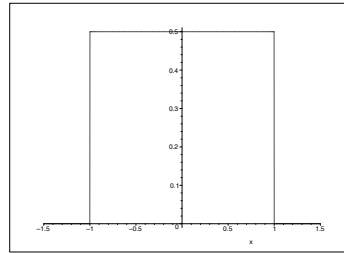
Při výpočtu tohoto integrálu je vhodné si uvědomit, že konverguje pouze pro ω s kladnou reálnou částí.

4.3.2 Užití Fourierovy transformace při určování obrazů některých funkcí

V tomto odstavci využijeme uvedené vlastnosti Fourierovy transformace při výpočtu Fourierových obrazů některých speciálních funkcí (signálů).

Příklad 4.23.

Nalezněte obraz obdélníkového signálu, který má šířku 2ε , výšku h , který je navíc umístěn tak, aby funkce $f(t)$, která jej popisuje byla sudá, tj. signál bude umístěn v intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$ viz obrázek vpravo.

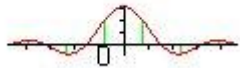
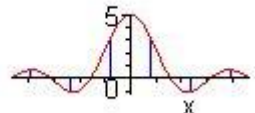
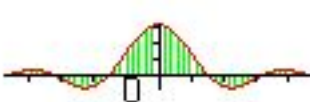
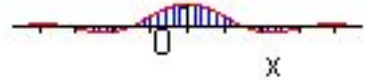
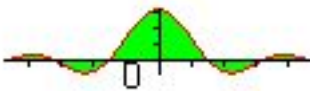



Řešení.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(t) = F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} he^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{h}{-jn\omega} [e^{-jn\omega t}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 2h \frac{\sin n\omega\varepsilon}{n\omega} = 2h\varepsilon \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon), \end{aligned}$$

kde funkce sinc je definována vztahem 4.14 uvedeným v příkladu při stanovení Fourierova rozvoje sudého obdélníkového signálu, tj. Příkladu 4.12. \square

Poznámka 5. Na daném příkladu a Příkladu 4.12 je možné demonstrovat limitní přechod spektra Fourierova rozvoje periodického obdélníkového signálu (s periodou T) (viz příklad 4.12) v obraz Fourierovy transformace jednoho obdélníkového signálu. Uvažme, že koeficienty c_n Fourierova rozvoje jsou integrály (4.12) násobené převrácenou hodnotou periody T , která se v limitním přechodu „použije“ k vytvoření dělení vnějšího integrálu ve Fourierově integrálním vzorci. Proto si také zobrazíme modifikované spektrum kdy koeficienty c_n vynásobíme periodou T . V následující tabulce jsou zobrazena pouze spektra modulů, protože argumenty koeficientů c_n jsou nulové. Úhlový kmitočet základní harmonické složky je $\omega = 2\pi/T$.

T	modifikované spektrum	spektrum
4		
16		
64		

Z uvedených spekter je patrné, že pro zvětšující se T roste hustota spekter a pro hodnotu $T = 64$ při zvoleném grafickém znázornění (tloušťka čar) modifikovaného je obraz spektra stejný jako integrál vyjadřující Fourierovu transformaci.

Poznámka 6. Další možností užití obrazu sudého obdélníkového impulsu je ověřit již dříve uvedený Fourierův obraz Diracova impulsu $\delta(t)$. Tuto Diracovu funkci chápeme jako limitní chování jehlové funkce viz Definice 4.1, za kterou volíme obdélníky

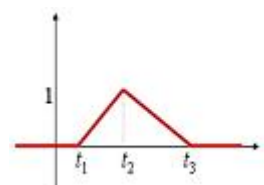
$$\delta(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} (\eta(t - \varepsilon) - \eta(t + \varepsilon)).$$

Využijeme-li výsledek předchozího příkladu dostaneme obraz $\delta(t)$ jako limitu obrazů jednotlivých obdélníkových impulsů, tj.

$$\mathcal{F}\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}\delta(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{2\varepsilon} \frac{\sin n\omega\varepsilon}{n\omega} = 1.$$

Příklad 4.24.

Nalezněte Fourierův obraz tzv. obecného trojúhelníkového impulsu $f(t)$ zadaného grafem, který je mimo interval $[\langle 1, t_3 \rangle$ nulový a vrchol trojúhelníka má pro $t = t_2$ ($t_1 < t_2 < t_3$) hodnotu v .



Řešení. K jeho určení využijeme znalosti druhé zobecněné derivace této funkce z Příkladu 4.5 e) a užitíme také větu o derivaci předmětu a pro obraz $F(j\omega)$ dostáváme rovnici

$$-\omega^2 F(\omega) = \mathcal{F}f''(t) = \frac{v((t_3 - t_2)e^{-j\omega t_1} + (t_1 - t_3)e^{-j\omega t_2} + (t_2 - t_1)e^{-j\omega t_3})}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Co po úpravě dává:

$$F(\omega) = -\frac{v((t_3 - t_2)e^{-j\omega t_1} + (t_1 - t_3)e^{-j\omega t_2} + (t_2 - t_1)e^{-j\omega t_3})}{\omega^2(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Poznamenejme, že pro sudý trojúhelníkový impuls tj, $t_1 = -T$, $t_2 = 0$, $t_3 = T$ lze obraz zapsat jednoduše:

$$F(\omega) = v \frac{T e^{j\omega T} - 2T + T e^{-j\omega T}}{T^2 \omega^2} = v \frac{2(\cos(\omega T) - 1)}{T \omega^2} = v T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 = v T \left(\operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2} \right)^2$$

□

Příklad 4.25. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-a^2 t^2}$. Nejdříve poznamenejme, že funkce má obraz Fourierovy transformace, neboť existuje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Výpočet tohoto integrálu lze nalézt v literatuře viz [18]. Pro funkci $f(t)$ platí diferenciální rovnice

$$f'(t) = -a^2 2t e^{-a^2 t^2} = 2a^2 t f(t)$$

Pro Fourierův obraz této rovnice dostáváme

$$j\omega F(\omega) = \mathcal{F} f'(t) = -2a^2 \mathcal{F} t f(t) = -2a^2 j \frac{dF(\omega)}{d\omega},$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Jak vidíme v následující úpravě, jež řeší danou rovnici:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{2a^2} d\omega = \frac{dF(\omega)}{F(\omega)} &\Leftrightarrow \int -\frac{\omega}{2a^2} d\omega = \int \frac{dF}{F} \\ -\frac{\omega^2}{4a^2} + \ln |C| = \ln |F| &\Leftrightarrow F(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}, \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Integrační konstantu C určíme dosazením $\omega = 0$ $C = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$ a ze vztahu známého z literatury [18]. Celkově tak dostáváme $\mathcal{F} e^{-a^2 t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right)$.

V daném příkladě jsme využili větu o derivaci předmětu, která umožní převést diferenciální rovnice pro předmět řešení na rovnici bez derivací, kterou je možno obvykle řešit jednodušeji, pro obraz řešení. Uvedený postup je základem příštího odstavce.

4.3.3 Užití Fourierovy transformace při řešení diferenciálních rovnic

Pro diferenciální případně integro-diferenciální rovnice, jejichž řešení je v technické praxi určeno počáteční podmínkou, to jest řešení existuje na intervalu $\langle t_0, \infty \rangle$, se obvykle používá později probíraná Laplaceova transformace. Proto budeme pomocí Fourierovy transformace řešit rovnici, kde bude řešení definováno pro všechna reálná čísla. V následujícím příkladě se budeme zabývat parciální diferenciální rovnicí aniž bychom se touto problematikou v tomto textu systematicky zabývali. To je umožněno tím, že níže uvedený postup hlubším způsobem teorii parciálních diferenciálních rovnic nevyužívá.

V literatuře známým užitím Fourierovy transformace je řešení diferenciální rovnice vedení tepla v nekonečně dlouhé a tenké tyči, kterou ztotožníme s osou x a popisujeme ji pomocí funkce $u(x, t)$, jejíž hodnota udává teplotu v bodě o souřadnici x a v čase t . Tato funkce vyhovuje tzv. počáteční diferenciální úloze:

$$au''_{xx} = u'_t, \quad u(x, 0) = g(x), \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Použitím Fourierovy transformace vzhledem k proměnné x pro každou konstantu t dostaneme obraz $\mathcal{F}u(x, t) = U(\omega, t)$ řešení, což je funkce dvou proměnných ω, t . Použitím této transformace na zadanou rovnici vznikne diferenciální rovnice vzhledem k proměnné t , kterou formálně řešíme jako rovnici se separovanými proměnnými (předpokládá to tvar funkce $U(\omega, t)$ ve tvaru součinu funkcí obou proměnných):

$$a(j\omega)^2 U = \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{U} = -a\omega^2 dt \Rightarrow U(\omega, t) = G(\omega) \exp(-a\omega^2 t),$$

kde $G(\omega) = \mathcal{F}g(x)$ je obraz počátečního rozložení $u(x, 0) = g(x)$ teplot v tyči v čase $t = 0$. Při hledání předmětu využijeme, že obraz konvoluce je součinem obrazů. Nejdříve stanovíme předmět k obrazu $\exp(-a\omega^2 t)$ s využitím Příkladu 4.25 (proměnná obrazu je ω a x je proměnná vzoru, t je parametr), tj.

$$\mathcal{F}^{-1} \exp(-a\omega^2 t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

Rovnice vedení tepla má řešení (tzv. elementární) ve tvaru konvolučního integrálu:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4ta}\right)}{2\sqrt{\pi at}} g(\xi) d\xi.$$

Poznámka 7. Při použití Fourierovy transformace k řešení rovnic se může stát, že uvedeným postupem není možné nalézt všechna řešení (aniž bychom se dopustili chyby), neboť použití Fourierovy transformace omezuje prostor funkcí viz Definice 4.16, které je možno takto získat. Konkrétní příklad je možné nalézt v [18] (Ukázka 7.2).

4.3.4 Slovník Fourierovy transformace

Předmět	Obraz
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} \exp(-a \omega) a > 0$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$ t e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$
$\eta(t)t^n e^{-at}, a > 0, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$
$\frac{\exp(-a/\sqrt{ t })}{\sqrt{ t }}, a > 0$	$\frac{\sqrt{2}(\cos \sqrt{2\pi \omega } - \sin \sqrt{2\pi \omega })}{ \omega }$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$te^{-at^2}, a > 0$	$-j \frac{\sqrt{\pi}\omega}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\frac{\sin(at)}{\sqrt{ t }}$	$j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega - a }} - \frac{1}{\sqrt{ \omega + a }} \right)$
$\frac{\cos(at)}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega - a }} + \frac{1}{\sqrt{ \omega + a }} \right)$
$\sin(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
$\cos(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\frac{\sin t}{t}$	$\pi(\eta(\omega + 1) - \eta(\omega - 1))$

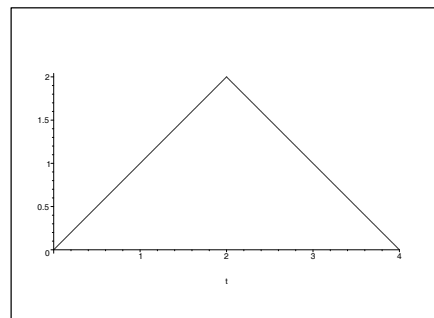
4.4 Příklady na procvičení

Cvičení

1. Pro uvedené funkce určete jejich Fourierovu trigonometrickou řadu. Uveďte také její komplexní a fázový tvar.

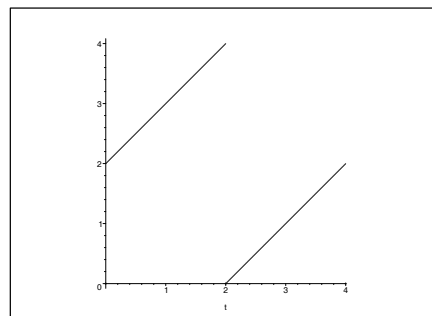
a) Pro níže uvedenou funkci určete součet Fourierovy trigonometrické řady pro $t = 10$:

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{kde } 0 \leq t \leq 2; \\ 4 - t, & \text{kde } 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$



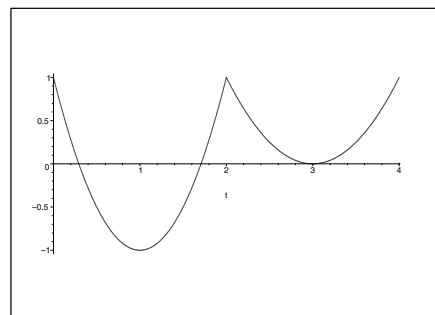
b) Pro níže uvedenou funkci určete součet Fourierovy trigonometrické řady pro $t = 10$:

$$f(t) = \begin{cases} t + 2, & \text{kde } 0 \leq t \leq 2; \\ t - 2, & \text{kde } 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$



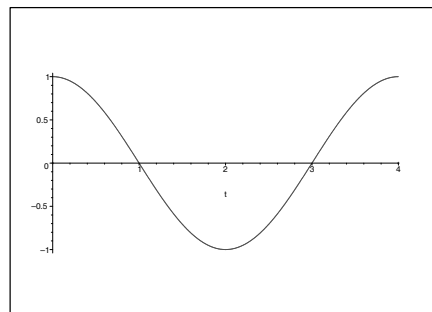
c) Pro níže uvedenou funkci určete součet Fourierovy trigonometrické řady pro $t = 10$:

$$f(t) = \begin{cases} 2(t - 1)^2 - 1, & 0 \leq t \leq 2; \\ (t - 3)^2, & 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

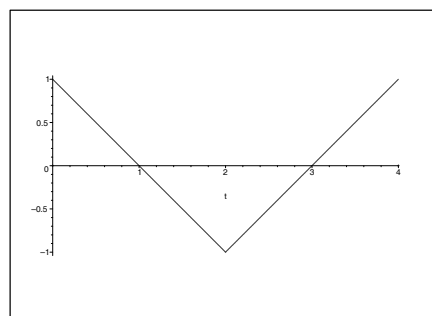


2. Pro uvedené funkce napište jejich rozvoj do sinů a cosinů:

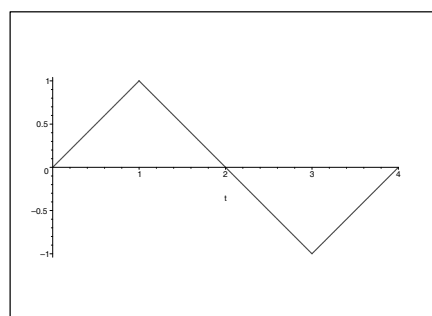
a) $f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$



b) $f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t \leq 2; \\ t+3, & 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$



c) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1; \\ 2-t, & 2 \leq t \leq 3; \\ t-4, & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$



Výsledky

1. a) $1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2} = 1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)}{(2k+1)^2}$, fázový tvar je stejný jako s trigonometrickými funkcemi ($\varphi_n = 0$), $f(10) = f(2) = 2$.

b) $2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2}$, komplexní tvar $2 + \frac{4j}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)}{2k+1}$, fázový tvar

$$2 + \frac{2j}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2} + \pi\right), f(10) = f(2) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t=2^-} f(t) + \lim_{t=2^+} f(t) \right) = 2.$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2\pi^2} \cos(k\pi t) - \frac{32}{(2k-1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{2}\right), \text{ komplexní tvar } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{3 \exp(k\pi t)}{k^2\pi^2} - \\ - \frac{16j \exp\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)}{(2k-1)^3}, \text{ fázový tvar } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2\pi^2} \cos(k\pi t) + \frac{32}{(2k-1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{2} + \pi\right), \\ f(10) = f(2) = 2.$$

$$2. \quad \text{a) } f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n}{\pi(4n^2-1)} \sin(n\pi t), \quad f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right),$$

$$\text{b) } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi(2n+1) - 8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{4}\right), \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2}\right)$$

$$\text{c) } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2}\right), \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 \left(\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) - 1 \right)}{(2n+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi t}{4}\right)$$

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Rozvinutí reálné funkce do Fourierovy řady.](#)
2. [Fourierova transformace - hledání obrazu či předmětu k dané funkci.](#)

5 Laplaceova transformace

V mnoha technických aplikacích jsou studovány děje, které „začínají“ od nějakého časového okamžiku, např. připojíme elektrický obvod k napětí, spustíme stroj, atd. O takových procesech můžeme předpokládat, že jejich studium začne v čase $t = 0$. Pro studium dějů tohoto typu, popsanými rovnicemi, které kromě neznámé funkce obsahují i její derivace či integrál (integro-diferenciální rovnice), je s výhodou používáno tzv. operátorového počtu. Ten je založen na procesu, že k dané rovnici vytvoříme její obraz, tj. novou rovnici, která je snadněji řešitelná. Poté najdeme řešení této rovnice a zpětným procesem nalezneme řešení původního problému.

Celý postup můžeme přirovnat k používání logaritmů při násobení čísel v dobách, kdy neexistovaly kalkulačky. Při „ručním“ počítání je sečtení dvou čísel jistě výrazně jednodušší než jejich násobení. Součin byl proto určován tak, že se pomocí logaritmických tabulek našly logaritmy jednotlivých činitelů a ty se „ručně“ sečetly. Po zpětném použití logaritmických tabulek na tento součet (tzv. delogarithmování) se našel hledaný součin.

Hojně v elektrotechnice užívanou integrální transformací je transformace Laplaceova, která reálné funkci přiřazuje funkci komplexní.

Definice 5.1. Jestliže pro $t \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{C}$ konverguje nevládní integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad (5.1)$$

nazýváme jím definovanou funkci $F(p)$ **Laplaceovým obrazem** funkce $f(t)$. Naopak funkci $f(t)$ nazýváme **vzorem** funkce $F(p)$. Zobrazení přiřazující funkci $f(t)$ funkci $F(p)$ nazýváme **Laplaceovou transformací** a zapisujeme $F(p) = \mathcal{L}f(t)$ nebo $f(t) \leftrightarrow F(p)$.

Ze vzorce (5.1) je patrné, že pro některé funkce (např. $f(t) = \exp(t^2)$) nelze definovat Laplaceův obraz, protože integrál je divergentní. Vymezíme si nejdříve třídu funkcí, pro kterou je tato transformace definována a je jednoznačná.

Definice 5.2. Funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme **předmětem** neboli **originálem** Laplaceovy transformace \mathcal{L} , jestliže splňuje následující podmínky

- (i) $f(t)$, $f'(t)$ jsou po částech spojitě pro všechna $t \in \mathbb{R}$,
- (ii) $f(t) = 0$ pro $t < 0$,
- (iii) existují kladné konstanty M , t_0 a konstanta $s \in \mathbb{R}$ tak, že platí $|f(t)| \leq M \exp(st)$ pro všechna $t \geq t_0$. Říkáme, že $f(t)$ je funkcí **ohraňovaného růstu s indexem s** .

Předpoklad (ii) Definice 5.2 je zaveden z důvodu jednoznačnosti zobrazení definovaného Laplaceovou transformací, neboť integrál v její definici je na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Často budeme zobrazovat elementární funkce, které nesplňují uvedený předpoklad. Tento „problém“ lze snadno eliminovat tak, že danou funkci násobíme Hevisideovou funkcí jednotkového skoku $\eta(t)$. V literatuře je zvykem, že tuto skutečnost často mlčky předpokládáme a nezapisujeme.

Příklad 5.3. Nalezněte Laplaceův obraz funkce jednotkového skoku $\eta(t)$.

Řešení. Před každým nalezením obrazu je vhodné ověřit, že integrál definující obraz konverguje. Stačí ověřit, že je originálem Laplaceovy transformace viz Definice 5.2. U Heavisideovy funkce snadno ověříme i platnost předpokladu (iii) dané definice, např. volbou konstant $M = 2$, $t_0 = 1$ a $s = 0$. Přímým výpočtem získáme:

$$\mathcal{L}\eta(t) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{\exp(-pt)}{p} \right]_0^u = \frac{1}{p} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-pu)}{p} = \frac{1}{p}.$$

□

V následujícím příkladu odvodíme obecnější vztah pro $\mathcal{L}(t^n \eta(t))$

Příklad 5.4. Nalezněte Laplaceův obraz funkce $t^n \eta(t)$, kde n je celé nezáporné číslo.

Řešení. U této funkce snadno ověříme i platnost předpokladu (iii) dané definice např. volbou konstant $M = 1$, $t_0 = \exp(n)$ a $s = 1$. Nejdříve odvodíme rekurentní vztah:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^n \eta(t)) &= \int_0^{\infty} t^n \exp(-pt) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{t^n \exp(-pt)}{p} \right]_0^u + \\ &\frac{n}{p} \int_0^{\infty} t^{n-1} \exp(-pt) dt = - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-pu)}{p} + \frac{n}{p} \mathcal{L}(t^{n-1} \eta(t)) = \frac{n}{p} \mathcal{L}(t^{n-1} \eta(t)). \end{aligned}$$

Využijeme předchozí příklad jako $\mathcal{L}(t^0 \eta(t)) = 1/p$ a užitím rekurentního vztahu celkově dostaneme:

$$\mathcal{L}(t^n \eta(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

□

Příklad 5.5. Nalezněte Laplaceův obraz funkce $\exp(\omega t) \eta(t)$, kde $\omega \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Řešení. Pro ověření předpokladu (iii) Definice 5.2 stačí volit $M = 1$, $t_0 = 1$ a $s = \omega + 1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\exp(\omega t) \eta(t)) &= \int_0^{\infty} \exp(\omega t) \exp(-pt) dt = \\ &\lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{\exp(-(p-\omega)t)}{p-\omega} \right]_0^u = \frac{1}{p-\omega} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-(p-\omega)u)}{p-\omega} = \frac{1}{p-\omega}. \end{aligned}$$

□

Poznamenejme, že v posledním příkladu lze za ω volit libovolnou komplexní konstantu.

Věta 5.6. Předpokládejme, že platí $F(p) = \mathcal{L}f(t)$, $G(p) = \mathcal{L}g(t)$. Nechť $r > 0$, $\omega \in \mathbb{C}$ jsou konstanty. Dále nechť $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ a $f^{(i)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(i)}(t)$. Potom platí následující tvrzení.

Tvrzení o	Předmět	Obraz
<i>linearitě</i>	$af(t) + bg(t)$	$aF(p) + bG(p)$
<i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r}F\left(\frac{p}{r}\right)$
<i>posunutí předmětu vpravo</i>	$f(t-r)\eta(t-r)$	$e^{-rp}F(p)$
<i>posunutí předmětu vlevo</i>	$f(t+r)\eta(t)$	$e^{rp}F(p) - \int_0^r e^{-pt}f(t) dt$
<i>posunutí obrazu</i>	$e^{\omega t}f(t)$	$F(p-\omega)$
<i>derivaci předmětu</i>	$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
<i>n-té derivaci předmětu</i>	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0^+)p^{n-1-i}$
<i>derivaci obrazu</i>	$tf(t)$	$-F'(p)$
<i>derivaci podle parametru α</i>	$f'_\alpha(t, \alpha)$	$F'_\alpha(p, \alpha)$
<i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
<i>integraci obrazu</i>	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(z) dz$
<i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$	$F(p)G(p)$
<i>Duhamelův vzorec</i>	$f(0^+)g(t) + f'(t) * g(t)$	$pF(p)G(p)$

Poznamenejme, že pro funkce $f(t)$, $g(t)$, které jsou nulové pro záporný argument (jsou originálem Laplaceovy transformace), je dříve uvedený integrál definující konvoluci modifikován na vztah:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

Protože některá tvrzení předcházející věty plynou bezprostředně z vlastností integrálu, zaměříme se v dalším na jejich užití.

Příklad 5.7. Výsledky Příkladu 5.4 a Příkladu 5.5 odvoďte pomocí tabulky uvedené v předcházející větě.

Řešení. V obou odvozeních budeme postupovat podle různých tvrzení z tabulky.

1. Funkci $f(t) = t^n$ je možné určit pomocí funkčních hodnot derivací této funkce:

$$f^{(n)}(t) = n!, \quad f^{(i)}(0) = 0 \quad \text{pro } i = 0, \dots, n-1.$$

Užitím tvrzení o n -té derivaci funkce dostáváme:

$$\frac{n!}{p} = \mathcal{L}((t^n)^{(n)}) = p^n \mathcal{L}t^n - \sum_{i=0}^{n-1} (t^n)^{(i)} \Big|_{t=0^+} p^{n-1-i} = p^n \mathcal{L}t^n - 0 \Rightarrow \mathcal{L}t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

2. Analogicky lze užitím tvrzení o posunutí obrazu Laplaceovy transformace funkce jednotkového skoku $\eta(t)$ odvodit obraz funkce $e^{\omega t}$:

$$\mathcal{L}e^{\omega t} = \mathcal{L}(e^{\omega t} \eta(t)) = \mathcal{L}\eta(p - \omega) = \frac{1}{p - \omega}.$$

□

Příklad 5.8. Pomocí tvrzení uvedených v předcházející tabulce odvoďte Laplaceovy obrazy funkcí $\sin at$, $\cos at$, $t \cos at$.

Řešení. Obraz funkce $\sin at$ můžeme získat užitím Eulerova vzorce a linearit Laplaceovy transformace z předchozího výsledku:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \sin at &= \mathcal{L} \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j} = \frac{\mathcal{L}e^{jat} - \mathcal{L}e^{-jat}}{2j} = \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p - ja} - \frac{1}{p + ja} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{p + ja - (p - ja)}{p^2 + a^2} = \frac{a}{p^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Laplaceův obraz funkce $\cos at$ bychom mohli získat obdobně. Druhou možností je využití předchozího výsledku a tvrzení o derivaci předmětu dostáváme:

$$a \mathcal{L} \cos at = \mathcal{L}(\sin at)' = p \mathcal{L} \sin at - \sin 0 = p \cdot \frac{a}{p^2 + a^2} - \sin 0 \Rightarrow \mathcal{L} \cos at = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

Derivací podle parametru a odvodíme Laplaceův obraz funkce $t \cos at$ z obrazu funkce $\cos at$:

$$\mathcal{L}(t \cos at) = \mathcal{L} \frac{\partial \sin at}{\partial a} = \frac{\partial \frac{a}{p^2 + a^2}}{\partial a} = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}.$$

Uvedený výsledek lze také získat jako $-\frac{\partial \frac{p}{p^2 + a^2}}{\partial p}$ užitím tvrzení o derivaci obrazu. □

V dalším textu se zabýváme podrobněji obrazy periodických předmětů. Připomeňme, že funkce $f(t)$ je periodická s periodou T , jestliže platí $f(t+T) = f(t)$ pro $t > 0$. Označme $f_T(t) = f(t) - f(t)\eta(t-T)$ funkci tvořenou jednou periodou v intervalu $\langle 0, T \rangle$ a mimo tento interval nulovou. Dále označme $\mathcal{L}f(t) = F(p)$, $\mathcal{L}f_T(t) = F_T(p)$ a použijme rovnost

$$f(t)\eta(t) = f_T(t) + f(t-T)\eta(t-T).$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace na tuto rovnost s využitím tvrzení o posunutí předmětu odvodíme:

$$F(p) = \int_0^T f(t) \exp(-tp) dt + \int_T^\infty f(t) \exp(-tp) dt = F_T(p) + \exp(-Tp)F(p).$$

Po úpravě tohoto vztahu dostáváme tzv. **větu o obrazu periodické funkce**.

Věta 5.9. *Nechť funkce $f(t)$ je originálem a navíc je periodická s periodou T . Potom platí*

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - \exp(-Tp)}. \quad (5.2)$$

Příklad 5.10. Nalezněte Laplaceovy obrazy dvou technicky významných funkcí a sice jednocestného usměrnění $f_1(t) = \max(\sin t, 0)$ a dvoucestného usměrnění $f_2(t) = |\sin t|$.

Řešení. V obou případech je nutné určit Laplaceův obraz funkce

$$f(t) = \eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t,$$

která je nenulová pouze v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\pi \sin t \exp(-pt) dt = \left[-\frac{\exp(-pt)(\cos t + p \sin t)}{p^2 + 1} \right]_0^\pi = \frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}.$$

1. Funkce f_1 má periodu 2π a užitím předchozí věty dostáváme

$$\mathcal{L}f_1 = \frac{\frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}}{1 - \exp(-2\pi p)} = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}$$

2. Funkce f_2 má periodu π a stejný obraz základní periody. Užitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f_2 &= \frac{\frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}}{1 - \exp(-\pi p)} = \frac{1}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{1 + \exp(-\pi p)}{1 - \exp(-\pi p)} = \\ &= \frac{1}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\pi p}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\pi p}{2}\right)}{\exp\left(\frac{\pi p}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\pi p}{2}\right)} = \frac{1}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi p}{2}\right)} = \frac{1}{(p^2 + 1)} \coth\left(\frac{\pi p}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Dalším typem hledaných Laplaceových obrazů jsou obrazy předmětů, které nejsou originálem Laplaceovy transformace, jako je např. Diracova distribuce. Při hledání těchto obrazů postupujeme podobně jako u Fourierovy transformace. Využijeme toho, že takovýto předmět je limitou předmětů, jež jsou originály Laplaceovy transformace. Laplaceovou transformací těchto předmětů dostaneme posloupnost, jejíž limita je obrazem hledaného předmětu. Podobně jako u Fourierovy transformace lze u hledání obrazu Diracova impulsu a jeho derivací využít tzv. filtrační vlastnost, analogicky jako v Příkladě 4.5 b), tj.

$$\mathcal{L}\delta(t - t_0) = \int_0^\infty \delta(t - t_0)e^{-pt} dt = e^{-t_0p}, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{L}\delta^{(n)}(t - t_0) = \int_0^\infty \delta^{(n)}(t - t_0)e^{-pt} dt = (-1)^n (e^{-pt})^{(n)} \Big|_{t=t_0} = p^n e^{-t_0p}. \quad (5.4)$$

Uvedme jednu možnost využití obrazu Diracova impulsu při hledání obrazů některých funkcí. Příkladem může být funkce definovaná pro různé intervaly různým předpisem tak, že zobecněná derivace dostatečně velkého řádu této funkce je ve tvaru lineární kombinace Diracova impulsu a jeho derivací. V těchto případech můžeme Laplaceův obraz určit i bez analytického zápisu této funkce (viz Paragraf 4.1), a to pouze s využitím tvrzení o integraci předmětu a znalosti obrazu zobecněné derivace této funkce. Celý postup budeme ilustrovat na příkladě.

Příklad 5.11. Naleznete obraz funkce popisující lichoběžníkový impuls definovaný pomocí funkce f ,

$$f(t) = \begin{cases} t - 1, & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle; \\ 1, & \text{pro } t \in \langle 2, 3 \rangle; \\ -t/2 + 5/2, & \text{pro } t \in \langle 3, 5 \rangle; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení. Na obrázku je zobrazen graf funkce f spolu s její první a druhou derivací. Druhá derivace je zobecněnou derivací a je všude nulová kromě lineární kombinací Diracových impulsů:

$$f''_o(t) = \delta(t - 1) - \delta(t - 2) - \frac{1}{2}\delta(t - 3) + \frac{1}{2}\delta(t - 5).$$

Aplikací Laplaceovy transformace dostáváme rovnici

$$p^2 F(p) = \mathcal{L}f''_o(t) = e^{-p} - e^{-2p} - \frac{1}{2}e^{-3p} + \frac{1}{2}e^{-5p},$$

odkud jednoduchou úpravou získáme obraz $F(p)$ funkce $f(t)$,

$$F(p) = \frac{2e^{4p} - 2e^{3p} - e^{2p} + 1}{2p^2 e^{5p}}.$$

□

Poznamenejme, že pro obecný lichoběžníkový impuls $f(t)$ s body změny t_1, t_2, t_3, t_4 a výškou v , lze analogicky nalézt druhou zobecněnou derivaci

$$f_o''(t) = \frac{v}{t_2 - t_1} \delta(t - t_1) - \frac{v}{t_2 - t_1} \delta(t - t_2) - \frac{v}{t_4 - t_3} \delta(t - t_3) + \frac{v}{t_4 - t_3} \delta(t - t_4)$$

a analogickým postupem s předchozím příkladem získáme Laplaceův obraz

$$F(p) = \frac{\frac{v}{t_2 - t_1} e^{-t_1 p} - \frac{v}{t_2 - t_1} e^{-t_2 p} - \frac{v}{t_4 - t_3} e^{-t_3 p} + \frac{v}{t_4 - t_3} e^{-t_4 p}}{p^2}.$$

Před „technicky náročnější“ pasáží textu, kterou je inverzní Laplaceova transformace, vyřešíme v následujícím příkladě Laplaceovou transformací systém integro-diferenciálních rovnic. K nalezení daného řešení z vypočteného obrazu využijeme již známých výsledků, které byly odvozeny dříve při ilustraci některých vlastností Laplaceovy transformace.

Příklad 5.12. Nalezněte neznámou funkci $i_1(t)$, která spolu s funkcí $i_2(t)$ a počátečními podmínkami $i_1(0) = i_2(0) = 0$ je řešením systému integro-diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} Li_1'(t) + Mi_2'(t) &= \eta(t), \\ Mi_1'(t) + Li_2'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(s) ds &= 0. \end{aligned}$$

Tato úloha může být interpretována jako nalezení proudu $i_1(t)$ v primárním obvodu dvou induktivně vázaných obvodů, přičemž jsou indukčně svázány dvě cívky o stejné indukci L a induktivní vazba mezi cívkami je M ($M < L$). Druhý obvod je tvořen kromě indukčně svázaných cívek ještě kondenzátorem o kapacitě C . V čase $t = 0$ připojíme k primárnímu obvodu napětí mající průběh jednotkového skoku $\eta(t)$. Počáteční podmínky jsou nulové, což znamená, že v čase $t = 0$ je energie magnetického pole cívek nulová stejně jako energie elektrického pole kondenzátoru. Poznamenejme, že se jedná pouze o modelovou situaci, neboť nejsou vzaty v úvahu ohmické odpory v systému. Z Laplaceova obrazu této soustavy,

$$\begin{aligned} LpI_1(p) + MpI_2(p) &= \frac{1}{p}, \\ MpI_1(p) + \left(Lp + \frac{1}{Cp} \right) I_2(p) &= 0, \end{aligned}$$

můžeme snadno určit funkci $I_1(p)$ (například užitím Cramerova pravidla):

$$I_1(p) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{p} & Mp \\ 0 & Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Lp & Mp \\ Mp & Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{p} \left(Lp + \frac{1}{Cp} \right)}{Lp \left(Lp + \frac{1}{Cp} \right) - M^2 p^2} = \frac{CLp^2 + 1}{C(L^2 - M^2)p^2 \left(p^2 + \frac{L}{C(L^2 - M^2)} \right)}.$$

Při hledání proudu $i_1(t)$ si zjednodušíme situaci tím, že rozložíme funkci $I_1(p)$ na součet parciálních zlomků, tj.

$$I_1(p) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{M^2}{L} \sqrt{\frac{C}{L(L^2 - M^2)}} \cdot \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \text{kde } a = \sqrt{\frac{L}{C(L^2 - M^2)}}.$$

Nyní ke každému zlomku najdeme vzor. S funkcemi, které mají obraz roven jednotlivým parciálním zlomkům (bez konstant), jsme se seznámili v Příkladu 5.4 a v Příkladu 5.8. Odtud dostáváme

$$i_1(t) = \frac{t}{L} + \frac{M^2}{L} \sqrt{\frac{C}{L(L^2 - M^2)}} \sin at.$$

Jednoznačnost takto nalezeného řešení je dále v textu řešena ve Větě 5.15. Protože v obvodu nebyly vzaty v potaz ohmické odpory není systém stabilní a proud s časem vzrůstá.

Tento příklad dokládá důležitost postupu najít předmět k danému obrazu, tj. důležitost inverzní Laplaceovy transformace. Poznamenejme, že často provedení inverzní transformace je nejobtížnější částí řešení příkladů tohoto typu. Uvedeme proto několik vět, které vymezí nutné podmínky pro funkce komplexní proměnné, jež jsou obrazem originálu Laplaceovy transformace.

Věta 5.13. *Nechť funkce $F(p)$ je obrazem originálu Laplaceovy transformace, potom platí (tzv. nutné podmínky):*

1. *Existuje číslo ξ_1 tak, že $F(p)$ je regulární funkcí komplexní proměnné v polorovině $\Re p > \xi_1$.*
2. *V polorovině $\Re p \geq \xi_2$, kde $\xi_2 > \xi_1$, platí: $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.*
3. *V oblasti $|p| < k \Re p$, kde $k > 1$, existuje konečná limita $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$.*

Poznámka 5.14. Uvedená konečná limita $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ má vazbu k funkci $f(t)$, pro níž $\mathcal{L}f(t) = F(p)$. Existuje-li totiž $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$, potom platí

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

Analogicky je možné ukázat, že existují-li níže uvedené limity, potom platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ |p| \leq k \Re p}} pF(p), \quad \text{kde } k > 1 \text{ je konstanta.}$$

Poznamenejme, že budeme pracovat i s funkcemi, které uvedené podmínky nesplňují a nejsou obrazy v klasickém slova smyslu, zejména se jedná o obraz Diracovy funkce. Podmínky uvedené ve větě jsou pouze nutné, ale ne postačující. V literatuře je v této souvislosti často uváděna funkce $F(p) = \frac{e^{-p}}{\sqrt{p}}$, která nutné podmínky splňuje, ale není obrazem žádné funkce $f(t)$.

5.1 Zpětná Laplaceova transformace

Východiskem úvah o zpětné Laplaceově transformaci je Lerchova věta.

Věta 5.15. *Nechť vzory $f_1(t)$, $f_2(t)$ mají stejný Laplaceův obraz, tj. $\mathcal{L}f_1(t) = \mathcal{L}f_2(t)$. Potom platí*

$$\int_0^{\infty} |f_1(t) - f_2(t)| dt = 0.$$

Pro dva originály (Definice 5.2) se stejným obrazem se tyto předměty mohou lišit pouze hodnotami v izolovaných bodech, ve kterých alespoň jeden z nich není spojitý. Odstraněním této nejednoznačnosti tím, že se dále omezíme na originály, která mají v bodě nespojitosti funkční hodnotu rovnu aritmetickému průměru limit zleva a zprava, můžeme definovat inverzní Laplaceovu transformaci.

Definice 5.16. Nechť F je funkce komplexní proměnné, ke které existuje originál Laplaceovy transformace. Přiřadíme-li k funkci F originál f splňující pro každý svůj bod nespojitosti t_0

$$f(t_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right),$$

potom toto přiřazení nazýváme **inverzní Laplaceovu transformací**. Tuto skutečnost zapisujeme $\mathcal{L}^{-1}F(p) = f(t)$.

Obdobně postupujeme i u inverzní Laplaceovy transformace Diracovy distribuce a její derivace.

5.1.1 Zpětná transformace racionální lomené funkce

Základní myšlenka je velmi jednoduchá. Vychází z možnosti rozkladu racionální lomené funkce (musí být ryze lomená) na součet parciálních zlomků. To je postup, který by měl každý čtenář znát z integrálního počtu funkcí jedné proměnné. Tato myšlenka je někdy zastřena složitě vypadajícími vzorci, které postup zjednodušují jen ve speciálních případech. Jelikož F je funkce komplexní proměnné, můžeme využít i rozklad na parciální zlomky v komplexním oboru.

V případě kdy se jedná o zlomek se jmenovatelem ve tvaru kvadratického trojčlenu v první mocnině je vhodné tento zlomek upravit na součet obrazů funkcí \sin a \cos :

$$\frac{Ap + B}{(p + a)^2 + b^2} = \frac{A(p + a)}{(p + a)^2 + b^2} + \frac{B - Aa}{(p + a)^2 + b^2} = A\mathcal{L}e^{-at} \cos bt - (B - Aa)\mathcal{L}e^{-at} \sin bt,$$

přičemž bylo použito tvrzení o posunutí obrazu na výsledky Příkladu 5.8.

Místo uvádění vzorců, které mohou za určitých předpokladů urychlit výpočet (např. polynom ve jmenovateli má jednoduché kořeny), je vhodné uvést, že v literatuře je možné dohledat rozsáhlé slovníky transformace.

Nutná a postačující podmínka, aby racionální lomená funkce $F(p)$ byla obrazem originálu (viz Definice 5.2), je předpoklad, že funkce $F(p)$ je ryze lomená, tj. stupeň polynomu ve jmenovateli je větší než stupeň polynomu v čitateli.

Celý postup zahrnující rozklad na parciální zlomky budeme ilustrovat na následujícím příkladu.

Příklad 5.17. Vypočtěte $\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že kvadratický dvojčlen ve jmenovateli je v první mocnině nebude obtížné provést rozklad na součet parciálních zlomků v reálném oboru. Předpokládaný tvar rozkladu bude

$$\frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{(p + 1)^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 1}.$$

Po formálním součtu na pravé straně porovnáváme čitatele obou zlomků, tj.

$$\frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \frac{A(p + 1)(p^2 + 1) + B(p^2 + 1) + (Cp + D)(p + 1)^2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}.$$

Rovnice, ze kterých určíme hledané konstanty A, B, C, D , můžeme získat buď porovnáním funkčních hodnot nebo porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné p . První dvě rovnice získáme porovnáním funkčních hodnot pro $p = -1$, $p = 0$, další dvě rovnice porovnáním koeficientů u mocnin p^3, p , tj.

$$\begin{aligned} 2 &= 2B, \\ 2 &= A + B + D, \\ 0 &= A + C, \\ 0 &= A + C + 2D. \end{aligned}$$

Tento systém má řešení $A = 1 = B, C = -1, D = 0$. Jestliže máme k dispozici rozklad je další výpočet jednoduchý. Obvykle využijeme vzorců pro nalezení předmětů. V tomto případě můžeme využít i výsledků z Příkladu 5.5 a z Příkladu 5.8:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p + 1} + \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(p + 1)^2} - \mathcal{L}^{-1} \frac{p}{p^2 + 1} = \eta(t)(e^{-t} + te^{-t} - \cos t).$$

□

5.1.2 Integrální tvar inverzní transformace

Při hledání integrálního tvaru Laplaceovy transformace využijeme vlastností Fourierova integrálu. Nechť funkce $f(t)$ je originálem Laplaceovy transformace s indexem růstu s_0 . Potom pro $s > s_0$ integrál

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt$$

konverguje a tedy pro funkci $f(t)e^{-st}$ platí Věta 4.17, jejíž tvrzení v bodech spojitosti funkce $f(t)e^{-st}$ dává identitu:

$$f(t)e^{-st} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx}e^{-jz(x-t)} dx \right] dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jzt} \left[\int_0^{\infty} f(x)e^{-(s+jz)x} dx \right] dz.$$

V prvním integrálu (vnitřním) je možné nahradit spodní mez $-\infty$ nulou neboť, funkce $f(x)$ je originálem Laplaceovy transformace. Po vynásobení výrazem e^{st} a provedení substituce ve druhém integrálu (vnějším) $s + jz = p$, $dz = dp/j$ dostáváme rovnost:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+jz)t} \left[\int_0^{\infty} f(x)e^{-(s+jz)x} dx \right] dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} e^{pt} \left[\int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx \right] dp =$$

(integrál podle proměnné x definuje Laplaceův obraz $F(p)$ funkce f)

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \text{přesněji} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{s-j\omega}^{s+j\omega} F(p)e^{pt} dp.$$

Uvedený nevlastní integrál po přímce $p = s + j\omega$, kde $-\infty < \omega < \infty$ se obvykle vzhledem k technické náročnosti nepočítá přímo, ale pomocí reziduí. V následující větě jsou uvedené úvahy konkretizovány.

Věta 5.18. *Nechť funkce $F(p)$ je holomorfní všude s výjimkou izolovaných singularit p_1, \dots, p_n ležících v polorovině $\Re p < s$. Nechť funkce $F(p)$ konverguje stejnoměrně k nule na libovolné posloupnosti kružnic $|p| = R_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$. Potom pro konvergentní*

integrál $\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} |F(p)e^{pt}| dp$ platí

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \operatorname{rez}_{p=p_k} (F(p) \exp pt) & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Užití této věty je v následujícím příkladu. Pro srovnání určíme pomocí reziduí předmět k funkci z příkladu 5.17.

Příklad 5.19. Určete vzor k funkci $F(p) = \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}$.

Řešení. Tato funkce splňuje předpoklady věty. Má tři singulární body, jeden pól $p_1 = -1$ druhého řádu a dvojici komplexně sdružených pólů $p_{2,3} = \pm j$. Vypočteme jednotlivá rezidua funkce $F(p)e^{pt}$

$$\operatorname{rez}_{p=-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{2e^{pt}}{(p^2 + 1)} \right)' = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{2te^{pt}}{(p^2 + 1)} - \frac{4pe^{pt}}{(p^2 + 1)^2} = e^{-t}(1 + t),$$

$$\operatorname{rez}_{p=\pm j} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} e^{pt} = \lim_{p=\pm j} \frac{2e^{pt}}{(p \pm j)(p + 1)^2} = \frac{2e^{\pm jt}}{(\pm 2j)(\pm 2j)} = -\frac{e^{\pm jt}}{2},$$

a dostáváme funkci $f(t)$:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = e^{-t}(1 + t) - \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = e^{-t}(1 + t) - \cos t.$$

□

Poznámka 8. Uvedenou větu lze formulovat i v podstatně silnějším znění [20]. Například může být reziduí nekonečně mnoho a jejich suma je nahrazena nekonečnou řadou, kde rezidua sčítáme podle velikosti jejich modulu. Tamtéž je použití této věty při hledání předmětu, který je T periodický; to jest funkce $F(p)$ je součinem a jeden činitel je zlomek $\frac{1}{1 - e^{-pT}}$. Tento zlomek má nekonečně mnoho jednoduchých pólů. Dále je třeba poznamenat, že předpoklady této věty nejsou splněny ani u jednoduchých funkcí. Například u funkce $R(p)e^{at}$ ($R(p)$ je racionální lomená funkce) postupujeme tak, že nalezneme předmět racionální lomené funkce $R(p)$ a použijeme větu o translaci. Další možností je využít vyjádření předmětu ve tvaru konvoluce.

Dalším „speciálním“ případem je obraz, který je nulový a holomorfní v nekonečnu.

Věta 5.20. 1. *Heavivideova věta o rozkladu.* Nechť lze funkci $F(p)$ pro $|p| > R > 0$ vyjádřit ve tvaru konvergentní řady:

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Potom platí:

$$\mathcal{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Užitečnost této budeme demonstrovat na následujícím příkladu

Příklad 5.21. Pomocí předchozí věty ukažte, že platí $\mathcal{L} \left(\frac{\sin t}{t} \right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}$.

Řešení. Uvedenou rovnost získáme porovnáním rozvoju obou funkcí. Funkce $\sin t$ má Taylorovu řadu se středem v $t_0 = 0$ ve tvaru $\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ odtud plyne rozvoj funkce

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$$

Taylorovu řadu funkce $\operatorname{arctg} t$ lze získat integrací geometrické řady $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}$.

Platí tedy

$$\operatorname{arctg} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{p^{2k+1}}.$$

V obou řadách máme $a_n = \begin{cases} 0, & \text{pro sudé } n = 2k; \\ \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}, & \text{pro liché } n = 2k + 1. \end{cases}$ Funkce arctg je funkcí komplexní a v odvozené rovnosti je brána pouze hlavní větev ve shodě se vzorcem (3.23). \square

Poznamenejme, že uvedený příklad může být vhodnou ukázkou použití Heavisideovy věty v obou směrech, neboť funkce $\frac{\sin t}{t}$ má transcendentní integrál a naopak funkce $\operatorname{arctg} \frac{1}{p}$ má v počátku podstatnou singularitu.

5.2 Souvislost Fourierovy a Laplaceovy transformace

Při odvozování integrálního vyjádření inverzní Laplaceovy transformace jsme ukázali, že Laplaceův obraz funkce $f(t)$ je ekvivalentní souboru Fourierových obrazů funkcí $f(t)e^{-st}$, kde $s > s_0$. Z toho plynou některé následující důsledky.

Fourierovy obrazy lze někdy počítat pomocí Laplaceových obrazů, které se snáze počítají, neboť to jsou holomorfní funkce. Rozlišme dva případy:

1. Funkce $f(t)$ je nulová pro $t < 0$ a obraz Fourierovy transformace existuje (je originálem Laplaceovy transformace), potom Fourierův obraz dostaneme tak, že v Laplaceovu obrazu za p dosadíme $p = j\omega$:

$$\mathcal{F} f(t) = F(\omega) = \mathcal{L} f(t)|_{p=j\omega}$$

2. Funkce $f(t)$ má obraz Fourierovy transformace a pro $t < 0$ je nenulová. Označme $f^+(t)$ zúžení funkce $f(t)$ na $\langle 0, \infty$ a $f^-(t) = f(-t)$ pro $t \in \langle 0, \infty$. Předpokládejme, že jejich Laplaceovy obrazy $F_1(p) = \mathcal{L} f^+(t)$, $F_2(p) = \mathcal{L} f^-(t)$ existují. Potom platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(-t)e^{j\omega t} dt = F_1(j\omega) + F_2(-j\omega),$$

Užití této identity umožní v návaznosti na výsledek Příkladu 5.21 určit Fourierův obraz funkce $\frac{\sin t}{t}$. Uvážíme, že funkce $\frac{\sin t}{t}$ je sudá a dostáváme:

$$\mathcal{F} \left(\frac{\sin t}{t} \right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{j\omega} + \operatorname{arctg} \frac{-1}{j\omega}.$$

S použitím vzorce (3.23) dostáváme rovnost

$$\mathcal{F} \left(\frac{\sin t}{t} \right) = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + j\frac{1}{j\omega}}{1 - j\frac{1}{j\omega}} - \frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + j\frac{-1}{j\omega}}{1 - j\frac{-1}{j\omega}} = -\frac{j}{2} \left(\operatorname{Ln} \frac{\omega + 1}{\omega - 1} + \operatorname{Ln} \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \right).$$

Pro reálnou proměnnou ω nastávají dvě možné varianty

1. $|\omega| > 1$, z čehož plyne $\frac{w-1}{w+1} > 0$ a dané logaritmy jsou reálnými funkcemi, které se vzájemně sečtou na 0, neboť jejich argumenty jsou převrácenými hodnotami.
2. $|\omega| < 1$ z čehož plyne $\frac{w-1}{w+1} < 0$ a pro dané logaritmy platí:

$$\operatorname{Ln} \frac{w+1}{w-1} + \operatorname{Ln} \frac{w-1}{w+1} = \ln \left| \frac{w+1}{w-1} \right| + j\pi + \ln \left| \frac{w-1}{w+1} \right| + j\pi = 2j\pi,$$

neboť se reálné logaritmy odečtou ze stejného důvodu jako v prvním případě.

Celkově dostáváme funkci, které je nulová pro $t \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$ a v intervalu $(-1, 1)$ rovna $-\frac{j}{2}2j\pi = \pi$:

$$\mathcal{F} \left(\frac{\sin t}{t} \right) = \pi(\eta(\omega+1) - \eta(\omega-1)).$$

5.3 Užití Laplaceovy transformace k řešení rovnic

Jak jsme již uvedli v úvodu, je Laplaceova transformace s výhodou používána k řešení diferenciálních, integro-diferenciálních rovnic a jejich soustav. Předností tohoto postupu je, že při jeho užití u rovnic s konstantními koeficienty jsou transformované rovnice algebraickými. Další výhodou je, že při řešení Cauchyho počáteční úlohy není třeba hledat obecné řešení a posléze určovat partikulární řešení na základě počátečních podmínek. Je-li cílem nalezení obecného řešení integro-diferenciální rovnice, dosadíme za počáteční podmínky obecné konstanty a popsáním postupem získáme obecné řešení.

V následujících ukázkách budeme postupovat od jednodušších příkladů ke složitějším, navíc budeme při hledání předmětu užívat různé možnosti jeho nalezení.

Příklad 5.22. Nalezněte řešení diferenciální rovnice $x'' - 2x' = e^t(t^2 + t - 3)$, určené počátečními podmínkami $x(0) = 2$, $x'(0) = 2$.

Řešení. Nejdříve nalezneme obraz rovnice:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x'' - 2\mathcal{L}x' &= \mathcal{L}e^{t^2} + \mathcal{L}e^t t - 3\mathcal{L}e^t, \\ p^2 X(p) - 2p - 2 - 2pX(p) + 4 &= \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{3}{p-1}, \\ X(p)(p^2 - 2p) &= \frac{-3p^2 + 7p - 2}{(p-1)^3} + 2p - 2. \end{aligned}$$

Rovnici vyřešíme vzhledem k $X(p)$ a získanou racionální lomenou funkcí rozložíme na součet parciálních zlomků :

$$X(p) = \frac{2p^3 - 8p^2 + 9p - 1}{(p-1)^3(p-2)} = \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{2}{(p-1)^3}.$$

Předmět nalezneme pomocí vzorce pro obraz funkce t^n spolu s tvrzením o posunutí obrazu:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{2}{(p-1)^3} \right\} = e^{2t} + e^t(1-t-t^2).$$

□

Příklad 5.23. Nalezněte řešení systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} 3y_1' - y_2'' + y_2' - y_1 &= 2t^2 + f(t) \\ y_2' - 3y_1 &= 0, \end{aligned}$$

určené počátečními podmínkami $y_1(0) = 0$, $y_2'(0) = y_2(0) = 0$, kde $f(t)$ je libovolná spojitá funkce.

Řešení. Budeme postupovat analogicky s předcházející ukázkou. Nejdříve určíme obraz systému rovnic ($f(t) \leftrightarrow F(p)$):

$$\begin{aligned} 3pY_1 - p^2Y_2 + pY_2 - Y_1 &= \frac{4}{p^3} + F(p), \\ pY_2 - 3Y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k proměnným Y_1, Y_2 jsme získali systém dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} (3p-1)Y_1 + Y_2(p-p^2) &= \frac{4}{p^3} + F(p), \\ -3Y_1 + pY_2 &= 0, \end{aligned}$$

jehož řešení můžeme získat pomocí Cramerova pravidla:

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{p^3} + F(p) & p(1-p) \\ 0 & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p-1 & p(1-p) \\ -3 & p \end{vmatrix}} = \frac{\frac{4}{p^3} + pF(p)}{\underbrace{3p^2 - p + 3p - 3p^2}_{2p}} = \frac{2}{p^3} + \frac{F(p)}{2},$$

$$Y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3p-1 & \frac{4}{p^3} + F(p) \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{2p} = \frac{6}{p^4} + \frac{3F(p)}{2p}.$$

Dále použijeme vzorec pro obraz funkce t^n spolu s tvrzením o integrálu předmětu dostáváme:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p^3} + \frac{F(p)}{2} \right\} = t^2 + \frac{1}{2}f(t), \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{p^4} + \frac{3F(p)}{2p} \right\} = t^3 + \frac{3}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

□

Předmět k obrazu $F(p)/p$, v němž je blíže neurčená funkce, jsme získali podle tvrzení o integraci předmětu. Stejný výsledek bychom získali podle tvrzení o konvoluci předmětů. Funkce $1/p$ má předmět Heavisideovu funkci jednotkového skoku a $F(p)$ funkci $f(t)$. Vyjádření předmětu ve tvaru konvolučního integrálu je postup mnohem využitelnější. V dalším příkladu tohoto obratu využijeme při řešení diferenciální rovnice s periodickou pravou stranou.

Příklad 5.24. Řešte diferenciální rovnici $y' + y = f(t) = \max(\sin t, 0)$ spolu s nulovými počátečními podmínkami $y(0) = 0$.

Řešení. S využitím Příkladu 5.10 získáme snadno Laplaceův obraz rovnice

$$pY(p) + Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))},$$

ze které snadno nalezneme obraz řešení,

$$Y(p) = \frac{1}{(p + 1)(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}.$$

Funkci $Y(p)$ je možné chápat jako součin dvou funkcí

$$\frac{1}{p + 1} \cdot \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}$$

se známými předměty. Využitím tvrzení o konvoluci předmětů můžeme řešení formálně vyjádřit ve tvaru konvolučního integrálu:

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \max(\sin \tau, 0) d\tau.$$

Velice často, např. při studiu asymptotického chování řešení rovnice, je vhodnější jiný zápis tohoto řešení ve tvaru součtu periodické a neperiodické složky. Předpokládejme, že takovýto postup je možný a obraz řešení má tvar:

$$Y(p) = \frac{1}{(p + 1)(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))} = \frac{A}{p + 1} + \frac{G_{2\pi}(p)}{1 - \exp(-2\pi p)},$$

kde druhý sčítanec je obrazem periodické složky. Vzhledem k periodicitě pravé strany $f(t) = \max(\sin t, 0)$ rovnice očekáváme periodu 2π pro tuto periodickou složku řešení. Proto, s využitím tvrzení o obrazu periodické funkce, je obrazem této složky řešení zlomek, který ve jmenovateli obsahuje rozdíl $1 - \exp(-2\pi p)$ a čítec je obrazem jediného impulsu $G_{2\pi}(p)$. Po vynásobení rovnice výrazem $1 - \exp(-2\pi p)$ dostáváme

$$\frac{1}{p + 1} \cdot \frac{1 + \exp(-p\pi)}{(p^2 + 1)} = \frac{A(1 - \exp(-2\pi p))}{(p + 1)} + G_{2\pi}(p).$$

Nyní použijeme inverzní transformaci s tím, že druhý činitel součinu vlevo je předmětem jednoho impulsu $f_{2\pi}(t) = \eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t$ a při stanovení předmětu levé strany rovnice využijeme tvrzení o konvoluci předmětů

$$e^{-t} * (\eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f_{2\pi}(\tau) d\tau = A (e^{-t}\eta(t) - e^{-(t-2\pi)}\eta(t - 2\pi)) + g_{2\pi}(t).$$

Protože předměty $f_{2\pi}$, $g_{2\pi}$ jsou pro $t > 2\pi$ nulové dostaneme vztah z něhož určíme A :

$$e^{-t} \frac{e^\pi + 1}{2} = e^{-t} \int_0^\pi e^\tau \sin \tau d\tau = Ae^{-t}(1 - e^{2\pi}) \Rightarrow A = \frac{-1}{2(\exp(\pi) - 1)}.$$

Po dosazení za A do rovnice získáme vztah, ze kterého určíme na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ periodickou složku řešení $g_{2\pi}(t)$. V intervalu $0 < t < \pi$ platí:

$$g_{2\pi}(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin t - \cos t) + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{1}{2} \left(\sin t - \cos t + e^{-t} \frac{e^\pi}{e^\pi - 1} \right).$$

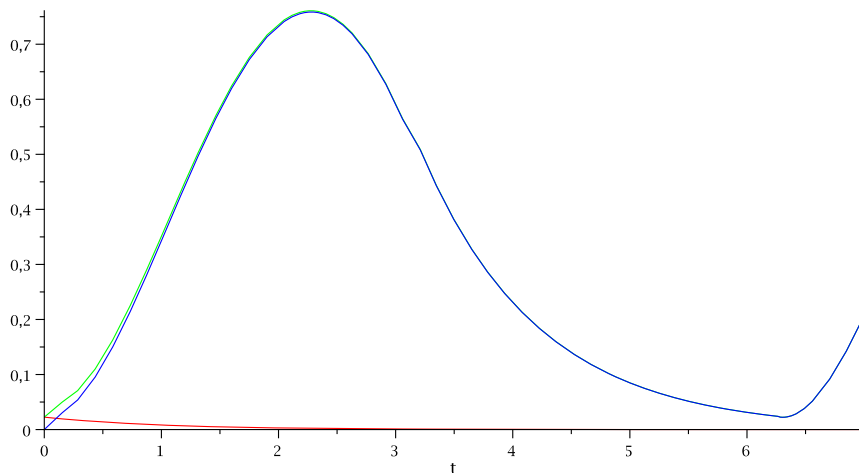
Analogicky dostáváme pro $\pi < t < 2\pi$:

$$g_{2\pi}(t) = \int_0^\pi e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{e^{-t}}{2} (e^\pi + 1) + \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^\pi}{e^\pi - 1} = \frac{e^{-t} e^{2\pi} + e^\pi - 1}{2 e^\pi - 1}.$$

Řešení $y(t)$ nalezneme ve tvaru součtu

$$y(t) = \frac{1}{2(\exp(\pi) - 1)} e^{-t} + g_{per}(t),$$

kde $g_{per}(t)$ je periodická složka řešení dostatečně popsána průběhem v základním intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ ($g_{per}(t) = g_{2\pi}(t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$). Vzhledem k tomu, že neperiodická složka $A = \frac{1}{2(\exp(\pi) - 1)} e^{-t}$ nabývá velmi malých hodnot, lze pro dostatečně velká t řešení ztotožnit s periodickou složkou. Toto má i praktický význam. Daná rovnice popisuje tok elektrického proudu v obvodu tvořeném cívkou o indukci $L = 1$ a ohmickým odporem $R = 1$, který byl v čase $t = 0$ připojen k jednocestnému usměrněnému napětí. Nalezená periodická složka řešení popisuje potom ustálený stav. \square



Poznámka 9. V předcházejícím příkladu byl realizován postup nalezení periodické složky řešení. Podrobněji je tento postup popsán v [20].

V praktických případech často opakovaně řešíme podobné rovnice, kde levá strana je stejná a mění se pouze pravá strana. Budeme-li rovnici interpretovat tak, že její řešení je reakcí nějakého systému na vstup popsáný pravou stranou, je vhodné získat výsledek ve tvaru, kdy je možné pouze dosazovat různé pravé strany. Např. je-li řešením proud v elektrickém obvodu popsáným nějakou lineární integro-diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty $\mathcal{L}(i(t))$ a pravou stranou je nějaké napětí $u(t)$, ke kterému je obvod připojen, znamená to opakovaně řešit rovnici $\mathcal{L}(i(t)) = u(t)$. Z toho plyne, že Laplaceův obraz této rovnice $Y(p)L(p) = U(p)$ má řešení za stejných počátečních podmínek vždy ve tvaru součinu funkcí

$$Y(p) = \frac{1}{L(p)} \cdot U(p).$$

S využitím vlastností konvoluce dvou funkcí $l(t) \leftrightarrow \frac{1}{L(p)}$, $u(t) \leftrightarrow U(p)$ dostáváme řešení

$$i(t) = \int_0^t l(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

Výše uvedená funkce $l(t)$ se v teorii lineárních systémů nazývá **impulsní charakteristika**, protože je tato funkce chápána jako odezva systému na Diracův impuls. Funkce $l(t)$ je totiž Laplaceovým vzorem funkce $\frac{1}{L(p)}$ a čítec tohoto zlomku je obrazem Diracova impulsu $\delta(t) \leftrightarrow 1$. Stanovit tuto charakteristiku experimentálně je obtížné, neboť se Diracova funkce i přibližně nesnadno aproximuje. Je mnohem jednodušší stanovit charakteristiku $h(t)$ jako reakci systému na Heavisideovu funkci jednotkového skoku:

$$\mathcal{L}(h(t)) = \eta(t) \Leftrightarrow H(p)L(p) = \frac{1}{p}.$$

Tato charakteristika se nazývá **přechodová charakteristika** a umožní s využitím Duhamelova vzorce jiné vyjádření reakce systému $\mathcal{L}(i(t)) = u(t)$ na libovolnou pravou stranu $u(t)$. Platí

$$I(p) = \frac{1}{L(p)}U(p) = p \frac{1}{pL(p)}U(p) = pH(p)U(p)$$

a aplikací zmíněného Duhamelova vzorce dostáváme

$$i(t) = h(t)u(0^+) + h(t) * u'(t) \quad \text{nebo} \quad i(t) = h(0^+)u(t) + h'(t) * u(t).$$

V případě, že se jedná o lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty tj.,

$$\mathcal{L}i(t) = a_n i^{(n)}(t) + a_{n-1} i^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 i'(t) + a_0 i(t),$$

je funkce $L(p)$ charakteristickým polynomem. V tomto případě máme možnost určit předmět $l(t)$ i jinak než jako odezvu na Diracův impuls. Budeme-li uvažovat homogenní systém,

tj. systém s nulovou pravou stranou, a dále konkrétní počáteční úlohu určenou počátečními podmínkami

$$i(0) = 0, \quad i'(0) = 0, \quad \dots, \quad i^{(n-2)}(0) = 0, \quad i^{(n-1)}(0) = 1,$$

dostaneme pro obraz řešení rovnici ve tvaru

$$I(p) = \frac{a_n}{L(p)}.$$

Poslední rovnice je až na násobek a_0 obrazem impulsní charakteristiky lineárního systému. Partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice můžeme vyjádřit pomocí konvolučního integrálu, již dříve zavedené váhové funkce. Ta je řešením nehomogenní rovnice (dělená koeficientem a_n) splňující výše uvedené počáteční podmínky.

5.4 Slovník Laplaceovy transformace

Všechny předměty v tabulce jsou násobeny funkcí jednotkového skoku $\eta(t)$ a tuto skutečnost je třeba při práci s tabulkou zohlednit.

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
A	$\frac{A}{p}$	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\cos bt, b \neq 0$	$\frac{p}{p^2+b^2}$	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
$\sin bt, b \neq 0$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
$\cosh bt, b \neq 0$	$\frac{p}{p^2-b^2}$	$e^{-at} \cosh bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
$\sinh bt, b \neq 0$	$\frac{b}{p^2-b^2}$	$e^{-at} \sinh bt$	$\frac{b}{(p+a)^2-b^2}$
$t \cos bt, b \neq 0$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$	$e^{-at}t \cos bt$	$\frac{(p+a)^2-b^2}{((p+a)^2+b^2)^2}$
$t \sin bt, b \neq 0$	$\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}$	$e^{-at}t \sin bt$	$\frac{2b(p+a)}{((p+a)^2+b^2)^2}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}, b \neq a$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{e^{at}-\cos bt-\frac{a}{b}\sin bt}{a^2+b^2}$	$\frac{1}{(p-a)(p^2+b^2)}$
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}, b \neq a$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{ae^{at}-a\cos bt+b\sin bt}{a^2+b^2}$	$\frac{p}{(p-a)(p^2+b^2)}$
$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$	$\frac{a^2e^{at}+b^2\cos bt+ab\sin bt}{a^2+b^2}$	$\frac{p^2}{(p-a)(p^2+b^2)}$
$\left(t+\frac{at^2}{2}\right)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$	$\frac{\sin bt-bt\cos bt}{2b^3}$	$\frac{1}{(p^2+b^2)^2}$

5.5 Příklady na procvičení

Cvičení

1. Určete Laplaceův obraz funkce $f(t)\eta(t)$

a) $f(t) = 1 - 2 \cos 3t$

b) $f(t) = te^{-2t}$

c) $f(t) = \sqrt{t}e^{-t}$

d) $f(t) = te^t \cos 2t$

2. Načrtněte graf signálu $f(t)$ a určete jeho Laplaceův obraz:

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ t^2 & \text{pro } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{pro } 1 < t \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 2t - t^2 & \text{pro } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{pro } t < 0, 2 < t \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \sin t & \text{pro } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } \frac{\pi}{2} < t \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} 2t - 4 & \text{pro } 2 < t < 4 \\ 8 - t & \text{pro } 2 \leq t < 8 \\ 0 & \text{pro } t < 2, 8 < t \end{cases}$

3. Načrtněte graf periodického signálu $f(t)$ s periodou T a určete jeho Laplaceův obraz:

a) $T = 6$

$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 < t < 1 \\ 4t - 4 & \text{pro } 1 \leq t < 2 \\ 6 - t & \text{pro } 2 \leq t < 6 \end{cases}$

b) $T = 4$

$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{pro } 2 < t < 4 \end{cases}$

4. Určete předmět k Laplaceovu obrazu $F(p)$

a) $F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)}$

b) $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)^2}$

c) $F(p) = \frac{(p-3)^2}{p(p^2+9)}$

d) $F(p) = \frac{p^2+1}{p^3+4p^2+13p}$

5. Nalezněte řešení diferenciálních rovnic určených počátečními podmínkami:

a) $y'' + 5y' + 6y = 12e^t, y(0^+) = y'(0^+) = 1$

b) $y'' + 4y = \cos t, y(0^+) = 0, y'(0^+) = 0$

c) $y''' + y' = e^{2t}, y(0^+) = 1, y'(0^+) = -1, y''(0^+) = 2$

d) $y'' + 3y' + 2y = t + e^{-t}, y(0^+) = y'(0^+) = 0$

6. Nalezněte řešení integrálních a integro-diferenciálních rovnic případně určených počátečními podmínkami:

a) $y' + 6y + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 0, y(0^+) = 0$

b) $y' - y - 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = \sin t, y(0^+) = 0$

c) $y(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$

d) $y'' + y' + y + \int_0^t y(\tau) d\tau = 2, y(0^+) = 2, y'(0^+) = -2$

7. Nalezněte řešení systému diferenciálních a integro-diferenciálních rovnic určených počátečními

podmínkami:

$$\text{a) } \begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2, & y_1(0^+) &= 1, & y_2(0^+) &= 1 \\ y_2' &= 5y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 18y_2 + 12e^{-t}, & y_1(0^+) &= 2, & y_2(0^+) &= 1 \\ y_2' &= 3y_1 + 5y_2 + 5e^{-t} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} y_1'' + 7y_2' + 8y_1 &= 0, & y_1(0^+) &= 1, & y_1'(0^+) &= 0, & y_2(0^+) &= 0, & y_2'(0^+) &= 0, \\ y_2'' - y_1' + 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$y_1' = -2y_1 + y_2'$$

$$\text{b) } y_2' = 2y_1 - 3y_2' + y_3, \quad y_1(0^+) = 1, \quad y_1'(0^+) = 0, \quad y_2(0^+) = 1, \quad y_3(0^+) = 0,$$

$$y_3' = 2y_2' - 3y_3$$

Výsledky

$$1\text{a) } F(p) = \frac{p^2 - 6p + 9}{p^3 + p}$$

$$1\text{b) } F(p) = \frac{1}{(p+2)^3}$$

$$1\text{c) } F(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(p+1)^{2/3}}$$

$$1\text{d) } F(p) = \frac{p^2 - 2p - 3}{(p^2 - 2p + 5)^2}$$

$$2\text{a) } F(p) = \frac{e^{-p}}{p} \left[1 - \frac{1}{2}e^{-p}(3 - e^{-2p}) \right]$$

$$2\text{b) } F(p) = \frac{2}{p^2}(1 - e^{-2p}) - \frac{2}{p^3}(1 + e^{-2p})$$

$$2\text{c) } F(p) = \frac{p + e^{-p\frac{\pi}{2}}}{p(p^2 + 1)}$$

$$2\text{d) } F(p) = \frac{1}{p^2}(2e^{2p} - 3e^{-3p} + e^{-8p})$$

$$3\text{a) } F(p) = \frac{2e^{-p} - 3e^{-2p} + e^{-4p}}{p^2(1 + e^{-6p})}$$

$$3\text{b) } F(p) = \frac{2 - 4pe^{-2p}}{p(1 + e^{-4p})^3}$$

$$4\text{a) } f(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$$

$$4\text{b) } f(t) = t - 2 = e^{-t}(t + 2)$$

$$4\text{c) } f(t) = 1 - 2 \sin 3t$$

$$4\text{d) } f(t) = \frac{1}{13} \left[1 + e^{-2t} \left(12 \cos 3t - \frac{28}{3} \sin 3t \right) \right]$$

$$5\text{a) } f(t) = e^t$$

$$5\text{b) } f(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$$

$$5\text{c) } f(t) = \frac{36 \cos t - 12 \sin t - e^t - 15}{10}$$

$$5\text{d) } f(t) = \frac{3}{4}(e^{-2t} - 1) = te^{-t} + \frac{t}{2}$$

6a) $f(t) = e^{-3t}(1 - 3t)$

6b) $f(t) = \frac{1}{2}(\sin t - te^{-t})$

6c) $f(t) = \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t$

6d) $f(t) = 2e^{-t}$

7a) $y_1(t) = e^{2t}(\cos 3t - \sin 3t)$

$y_2(t) = e^{2t}(\cos 3t + 2 \sin 3t)$

7b) $y_1(t) = -4e^{-2t} + 3e^{-t} + 3e^t$

$y_2(t) = -2e^{-2t} + 2e^t + e^t$

7c) $y_1(t) = \frac{7}{15} \cos 4t - \frac{8}{15} \cos t$

$y_2(t) = \frac{2}{15} \sin 4t - \frac{8}{15} \sin t$

7d) $y_1 = \frac{1}{5}(1 - e^{-5t})$ $y_2 = \frac{1}{5}(2 + 3e^{-5t})$ $y_3 = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})$

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Laplaceova transformace - hledání obrazu reálné funkce či předmětu komplexní funkce.](#)
2. [Řešení lineární diferenciální rovnice \(až třetího řádu\) s konstantními koeficienty pomocí Laplaceovy transformace.](#)

6 \mathcal{Z} transformace

Cílem předchozí kapitoly bylo seznámit čtenáře se základním matematickým aparát pro popis systémů se spojitým časem. Velice často se zabýváme systémy kdy se studovaná veličina vytváří, případně je měřena, jen v diskrétních časových okamžicích, zpravidla stejně od sebe vzdálených. Takovým příkladem jsou impulsní soustavy. Situaci popisujeme pomocí posloupností, jejíž členy představují hodnoty jisté fyzikální veličiny v daných časových okamžicích. Rovnice popisující vlastnosti těchto diferenčních systémů můžeme řešit analogicky jako ve se spojitým případě pomocí transformace. Touto transformací je \mathcal{Z} transformace.

Definice 6.1. Nechť je dána posloupnost čísel $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Jestliže existuje alespoň jedno komplexní číslo $0 \neq z \neq \infty$ takové, že funkční řada

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} \quad (6.1)$$

konverguje, potom řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je \mathcal{Z} transformovatelná neboli **přípustná**. Její součet $F(z)$ je komplexní regulární funkce definovaná v okolí bodu ∞ a nazýváme ji **obrazem posloupnosti** $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Tuto skutečnost zapisujeme $\mathcal{Z}\{f_n\}$ nebo též $F(z) \leftrightarrow \{f_n\}$. Toto přiřazení je jediné a nazýváme jej **Z-transformací**.

V dalším textu budeme pro jednoduchost indexování posloupnosti vynechávat, tj. symbolem $\{f_n\}$ budeme rozumět vždy posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Poznamenejme, že často bývá posloupnost zapisována pouze pomocí n -tého členu f_n , resp. posloupnosti funkčních hodnot $f(n)$. Abychom vymezili množinu přípustných posloupností zavedeme pojem index růstu posloupnosti.

Definice 6.2. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ je **ohraničeného růstu s indexem** s , jestliže existují konstanty M, s takové, že

$$|f_n| \leq M e^{sn} \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}_0.$$

Věta 6.3. Platí, že posloupnost $\{f_n\}$ je \mathcal{Z} transformovatelná, právě když je ohraničeného růstu s indexem s , kde s je vhodné číslo.

Příklad 6.4. Konstantní posloupnost $\{1\}$ (posloupnost $\{1\}$ nazýváme diskrétní jednotkový impuls) je ohraničeného růstu s indexem 0. Její obraz nalezneme pomocí součtu geometrické řady, tj.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Příklad 6.5. Snadno vidíme, že posloupnost $\{e^{an}\}$ je ohraničeného růstu s indexem $|a|$, pro libovolné komplexní a . Její obraz nalezneme opět pomocí součtu geometrické řady.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{an}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - e^a z^{-1}} = \frac{z}{z - e^a}.$$

Pokud bychom tuto posloupnost zapsali ve tvaru $\{\alpha^n\}$ obdrželi bychom výsledkem ve tvaru

$$\mathcal{L}\{\alpha^n\} = \frac{z}{z - \alpha}.$$

Než uvedeme větu, která přehledně shrne základní vlastnosti \mathcal{L} transformace, zavedeme některé důležité pojmy analogické s pojmy vyskytujícími se ve formulaci podobných vět pro transformace integrální. Důležitým pojmem je konvoluce.

Definice 6.6. Konvolucí $\{f_n * g_n\}$ posloupností $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ nazýváme posloupnost, pro jejíž členy platí vztah

$$f_n * g_n = \sum_{i=0}^n f_{n-i} g_i.$$

Příklad 6.7. Spočtěme konvoluci několika jednoduchých posloupností

$\{f_n\}$	$\{g_n\}$	$\{f_n * g_n\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\sum_{i=0}^n 1 = \{n+1\}$
$\{1\}$	$\{n\}$	$\sum_{i=0}^n i = \left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}$
$\{1\}$	$\{f_n\}$	$\left\{\sum_{i=0}^n f_i\right\} = \{s_n\}$ posl. část. součtů
$\{n\}$	$\{f_n\}$	$\left\{\sum_{i=0}^n (n-i)f_i\right\} = n(f_n * 1) - (nf_n) * 1$

Poznamenejme, že jsou-li obě posloupnosti přípustné je i jejich konvoluce přípustná posloupnost. Navíc je konvoluce posloupností operací, která je komutativní, distributivní a asociativní.

Definice 6.8. Nechť k je přirozené číslo. O posloupnosti $\{g_n\} = \{f_{n+k}\}$ řekneme, že vznikla z posloupnosti $\{f_n\}$ posunutím o k míst vlevo, jestliže pro její členy g_n platí

$$g_n = f_{n+k} \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots$$

O posloupnosti $\{h_n\} = \{f_{n-k}\}$ řekneme, že vznikla z posloupnosti $\{f_n\}$ posunutím o k míst vpravo, jestliže pro její členy h_n platí

$$h_n = \begin{cases} 0, & \text{pro } n = 0, 1, \dots, k-1; \\ f_{n-k}, & \text{pro } n = k, k+1, \dots \end{cases}$$

Další důležitou operací je vytvoření posloupnosti diferencí k dané posloupnosti.

Definice 6.9. Nechť je zadaná posloupnost $\{f_n\}$ potom výraz $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ nazýváme **první diferencí** a $\{\Delta f_n\}$ **posloupností diferencí**. Diference vyšších řádů definujeme rekurentně pomocí první diference

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n)$$

a výraz $\Delta^k f_n$ nazýváme **k-tou diferencí** a $\{\Delta^k f_n\}$ **posloupností k-tých diferencí**.

Poznamenejme, že můžeme tedy posloupnost diferencí chápat jako lineární kombinaci posunutých posloupností:

$$\Delta^k y_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_{n+i}. \quad (6.2)$$

Tento vztah lze dokázat matematickou indukcí. Budeme-li považovat posloupnost $\{f_n\}$ za posloupnost nulových diferencí $\{\Delta^0 f_n\}$ (tj. $\Delta^0 f_n = f_n$) uvedený vzorec platí pro $k = 1$.

Použijeme-li indukční předpoklad pro $k - 1$ tj. $\Delta^{k-1} y_n = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+i}$, pro k -tou diferencí odvodíme

$$\begin{aligned} \Delta^k f_n &= \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+1+i} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+i} \\ &= f_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+1+i} - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+i} + (-1)^k f_n = \\ &= f_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k-1}{i-1} f_{n+i} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k-1}{i} f_{n+i} + (-1)^k f_n = \\ &= f_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \underbrace{\left(\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} \right)}_{=\binom{k}{i}} f_{n+i} + (-1)^k f_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_{n+i}. \end{aligned}$$

Diference posloupností jsou obdobou derivací funkcí na intervalu. V následujícím příkladě se s diferencemi seznámíme na konkrétním příkladě.

Příklad 6.10. Spočtěme všechny diference posloupnosti $f_n = n^2$.

$$\begin{array}{lll} \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\} & f_n = n^2 & \text{zadaná posloupnost,} \\ \{1, 3, 5, 7, 9, 16, \dots\} & \Delta f_n = 2n + 1 & \text{posloupnost prvních diferencí,} \\ \{2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots\} & \Delta^2 f_n = 2 & \text{posloupnost druhých diferencí,} \\ \{0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\} & \Delta^k f_n = 0 & \text{posloupnost } k\text{-tých diferencí, kde } k > 2. \end{array}$$

Věta 6.11. Předpokládejme, že posloupnosti $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ jsou ohraničeného růstu. Označme $F(z) = \mathcal{L}\{f_n\}$ a $G(z) = \mathcal{L}\{g_n\}$, dále $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$ jsou konstanty. Potom platí

Věta o	Předmět	Obraz
	<i>poznámka</i>	
<i>linearitě</i>	$a\{f_n\} + b\{g_n\}$	$aF(z) + bG(z)$
<i>podobnosti</i>	$\{a^n f_n\}$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
<i>posunutí vpravo</i>	$\{f_{n-k}\}$	$z^{-k}F(z)$
	<i>posloupnost $\{f_{n-k}\}$ je doplněna nulami</i>	
<i>posunutí</i>	$\{f_{n+k}\}$	$z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_n}{z^n} \right]$
<i>derivaci obrazu</i>	$\{n f_n\}$	$-zF'(z)$
<i>integraci obrazu</i>	$\left\{ \frac{f_n}{n} \right\}$	$\int_z^\infty \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta$
	<i>musí platit $f_0 = 0$, tj. $\{f_n/n\} = \{0, f_1, f_2/2, \dots\}$</i>	
<i>konvoluci předmětu</i>	$\{f_n * g_n\}$	$F(z)G(z)$
<i>diferenci</i>	$\{\Delta^k f_n\}$	$(z-1)^k F(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-i} \cdot \Delta^i f_0$
	<i>posloupnost Δ^k je také přípustná, $\Delta^0 f_n = f_n$</i>	
<i>částečném součtu</i>	$\{s_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^n f_i \right\}$	$\frac{z}{z-1} F(z)$
	<i>posloupnost $\{s_n\}$ je také přípustná</i>	

Na místo provádění důkazů procvičíme použití jednotlivých vět při hledání obrazů přípustných posloupností.

Příklad 6.12. Pomocí výsledku v Příkladu 6.5 a věty o linearitě můžeme odvodit následující výsledky.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin \alpha n\} &= \frac{\mathcal{L}\{e^{j\alpha n}\} - \mathcal{L}\{e^{-j\alpha n}\}}{2j} = \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\alpha}} - \frac{z}{z - e^{-j\alpha}} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{z(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})}{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) + 1} = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}. \end{aligned}$$

Analogicky dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos \alpha n\} &= \frac{\mathcal{L}\{e^{j\alpha n}\} + \mathcal{L}\{e^{-j\alpha n}\}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\alpha}} + \frac{z}{z - e^{-j\alpha}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})}{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) + 1} = \frac{(z - \cos \alpha) z}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}.\end{aligned}$$

Dále označme $\{a_n\} = \{1\}$, $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{c_n\} = \{j^n\}$, $\{d_n\} = \{(-j)^n\}$, potom platí

posloupnost	kombinace	obraz
$\{e_n\} = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$	$\{e_n\} = \frac{1}{2}(\{a_n\} + \{b_n\})$	$\frac{z^2}{z^2 - 1}$
$\{f_n\} = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$	$\{f_n\} = \frac{1}{2}(\{a_n\} - \{b_n\})$	$\frac{z}{z^2 - 1}$
$\{g_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$	$\{g_n\} = \frac{1}{2}(\{c_n\} + \{d_n\})$	$\frac{z^2}{z^2 + 1}$
$\{h_n\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$	$\{h_n\} = \frac{1}{2}(\{c_n\} - \{d_n\})$	$\frac{z}{z^2 + 1}$
$\{1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots\}$	$\frac{1}{4}(\{a_n\} + \{b_n\} + \{c_n\} + \{d_n\})$	$\frac{z^4}{z^4 + 1}$

Příklad 6.13. Na výsledcích předchozího příkladu je možné demonstrovat použití vět o posunutí vpravo i vlevo. Platí vztahy mezi posloupnostmi $\{e_{n-1}\} = \{f_n\} = \{e_{n+1}\}$, pro jejich obrazy současně také platí:

$$z^{-1}E(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2}{z^2 - 1} = F(z) = z \left(\frac{z^2}{z^2 - 1} - 1 \right) = z(E(z) - 1)$$

Příklad 6.14. Pomocí věty o derivování obrazu ($\{nf_n\} \leftrightarrow -zF'(z)$) postupně určete obrazy posloupností $\{n\}$, $\{n^2\}$, $\{n^3\}$.

Řešení. $\mathcal{L}\{n\} = -z(\mathcal{L}\{1\})' = -z \left(\frac{z}{z-1} \right)' = -z \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Analogicky dostaneme obraz posloupností $\{n^2\}$, $\{n^3\}$:

$$\mathcal{L}\{n^2\} = -z(\mathcal{L}\{n\})' = -z \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = -z \frac{-z-1}{(z-1)^3} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}, \quad (6.3)$$

$$\mathcal{L}\{n^3\} = -z(\mathcal{L}\{n^2\})' = -z \left(\frac{z^2+z}{(z-1)^3} \right)' = z \frac{z^2+1+4z}{(z-1)^4} = \frac{z(z^2+1+4z)}{(z-1)^4}. \quad (6.4)$$

□

V následujícím příkladě nalezneme obraz jedné posloupnosti třemi způsoby s využitím různých vět.

Příklad 6.15. Nalezněte obraz posloupnosti $\left\{ \binom{n+1}{2} \right\}$

Řešení. 1. Využijeme výsledků Příkladu 6.14 $\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$ a $\mathcal{Z}\{n^2\} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$.

Součtem obrazů obou posloupností a jeho dělením 2, neboť $\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}(n^2+n)$, dostáváme:

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z^2+z}{(z-1)^3} \right) = \frac{z^2 - z + z^2 + z}{2(z-1)^3} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

2. Využijeme skutečnosti $\left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \{1\} * \{n\}$ (viz Příklad 6.7) a věty o obrazu konvoluce ($\{f_n * g_n\} \leftrightarrow F(z)G(z)$):

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \mathcal{Z}\{1\} \cdot \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{z-1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

3. Třetí možností je využít známé skutečnosti $\sum_{i=0}^n i = \binom{n+1}{2}$ a užitím věty částečných součtech:

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{z-1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

□

V následujícím příkladě použijeme větu o integraci obrazu.

Příklad 6.16. Nalezněte obraz posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 0, 1, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$.

Řešení. Tuto posloupnost můžeme také zapsat jako posloupnost $\{f_n/n\}$, kde je posloupnost $\{f_n\} = \{0, 1, -1, \dots\}$. Ve větě o integrálu obrazu položíme $\{f_n\} = \{0, 1, -1, 1, \dots\}$ a její obraz můžeme získat jako součet geometrické řady:

$$\mathcal{Z}\{0, 1, -1, 1, \dots\} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} = \frac{\frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}.$$

Integraci racionálně lomené funkce $F(\zeta)/\zeta$ provedeme pomocí rozkladu na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\} &= \int_z^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta+1)} = \int_z^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta+1} \right) d\zeta = \lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} [\text{Ln } \zeta - \\ &\text{Ln}(\zeta+1)]_z^{\zeta_0} = \lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} \left(\text{Ln} \frac{\zeta_0}{\zeta_0+1} - \text{Ln} \frac{z}{z+1} \right) = -\text{Ln} \frac{z}{z+1} = \text{Ln} \left(1 + \frac{1}{z} \right), \end{aligned}$$

kde Ln je hlavní větev logaritmu a navíc platí:

$$\lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} \text{Ln} \frac{\zeta_0}{\zeta_0 + 1} = \text{Ln} \lim_{\frac{1}{\zeta_0} \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\zeta_0}} = \text{Ln} 1 = 0.$$

□

Věta 6.17. *Nechť $\{f_n\}$ je přípustná tj. $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$. Jestliže níže uvedené limity existují, potom platí:*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f_0 \quad \text{počáteční hodnota} \quad (6.5)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (6.6)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z-1)F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{koncová hodnota} \quad (6.7)$$

Užitečnost těchto limitních vztahů je mimo jiné dána u vztahu (6.5) možností nahradit předpoklad $f_0 = 0$ předpokladem na funkci $F(\infty) = 0$. Vztah (6.6) nám umožní využít předchozí ukázky k určení součtu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{z \rightarrow 1} \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) = \ln 2.$$

6.1 Souvislost \mathcal{Z} a Laplaceovy transformace

Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}$ je přípustná. Uvažujme zobecněnou funkci

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t-n)$$

Vypočteme Laplaceův obraz této zobecněné funkce:

$$\mathcal{L} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L} f_n \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}.$$

Tento vztah se nazývá diskretní Laplaceova transformace a substitucí $e^p = z$ dostáváme obraz \mathcal{Z} transformace posloupnosti $\{f_n\}$.

6.2 Zpětná \mathcal{Z} transformace

Tímto pojmem rozumíme nalezení vhodné posloupnosti $\{f_n\}$, která má funkci $F(z)$ za svůj obraz při \mathcal{Z} transformaci. Každá funkce komplexní proměnné $F(z)$, která je v okolí bodu ∞ holomorfní, je obrazem vhodné posloupnosti $\{f_n\}$, to jest $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$, což také zapíšeme:

$$\mathcal{Z}^{-1} \{F(z)\} = \{f_n\}. \quad (6.8)$$

Protože členy této posloupnosti jsou koeficienty Laurentova rozvoje je toto zobrazení jednoznačné a navíc pro ně platí integrální vzorec:

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} F(z) z^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

kde C_ρ je kružnice se středem v počátku o dostatečně velkém poloměru takovém, že všechny případné singularity leží uvnitř této kružnice. Tento postup je poměrně náročný.

Poznámka 10. Při hledání vzoru \mathcal{L} transformace můžeme využít všech vlastností \mathcal{L} transformace, které jsou přehledně shrnuty ve Větě 6.11. V následujícím paragrafu, věnovanému hledání vzoru pro racionálně lomenou funkci, to bude linearita zpětné transformace \mathcal{L}^{-1} , která plyne z linearity \mathcal{L} transformace.

Situace se výrazně zjednoduší při hledání vzoru pro racionálně lomenou funkci.

6.2.1 Předmět k racionální funkci

Je-li obrazem \mathcal{L} transformace racionálně lomená funkce, lze předmět nalézt poměrně jednoduše několika možnostmi.

1. Rozkladem na parciální zlomky: $\frac{1}{(z - z_0)^k}$, kde $k \in \mathbb{N}$ a z_0 je konečné komplexní číslo. Přesněji řečeno pro racionální funkci, která není ryzí, je vyjádření ve tvaru součtu konstanty a parciálních zlomků. Pro parciální zlomek kde $k = 1$ snadno získáme

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} + \frac{z_0^2}{z^3} + \frac{z_0^3}{z^4} + \dots \quad (6.10)$$

Rozvoj parciálních zlomků $(z - z_0)^{-k}$, kde $2 \leq k \in \mathbb{N}$ můžeme odvodit z rozvoje (6.10), jestliže jej $k - 1$ krát derivujeme. Situaci přesně popisuje následující věta.

Věta 6.18. *Je-li $z_0 \neq 0$ platí*

$$\frac{1}{(z - z_0)^k} = \frac{1}{z^k} + \binom{k}{k-1} \frac{z_0}{z^{k+1}} + \dots + \binom{k-1+n}{k-1} \frac{z_0^n}{z^{k+n}} + \dots, \quad (6.11)$$

což dává předpis pro hledanou posloupnost

$$f_n = 0 \text{ pro } n < k \text{ a } f_{k+n} = \binom{k-1+n}{k-1} \frac{z_0^n}{z^{k+n}} \text{ pro } k \leq n.$$

Poznamenejme, že uvedená věta platí i pro $k = 1$ a pravá strana rovnice (6.11) je jenom složitěji zapsaná pravá strana (6.10). Podobně případný předpoklad $z_0 \neq 0$ není nutný, ale pro $z_0 = 0$ je parciální zlomek přímo Laurentovým rozvojem.

Celkově můžeme postup hledání předmětu \mathcal{L} transformace k racionální funkci shrnout do jediné věty. Racionálně lomenou funkci vyjádříme ve tvaru součtu konstanty a parciálních zlomků a z linearity \mathcal{L} transformace získáme předmět jako součet předmětů jednotlivých parciálních zlomků podle známých vzorců. Uvedený postup předvedeme na příkladech.

Příklad 6.19. Nalezněte předmět \mathcal{Z} transformace k funkci

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)}.$$

Řešení. Rozklad racionální funkce má tvar

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} = \frac{1}{z - 1} + \frac{2}{(z + 1)^2}.$$

Podle vztahu (6.10) dostáváme

$$\frac{1}{z - 1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots$$

a podle vztahu (6.11)

$$\frac{2}{(z + 1)^2} = \frac{2}{z^2} + \frac{2\binom{2}{1}(-1)}{z^3} + \dots + \frac{2\binom{n}{n-1}(-1)^{n-2}}{z^{n+1}} + \dots$$

a předmět původní racionální funkce je ve tvaru součtu jednotlivých předmětů

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} = \frac{1}{z} + \frac{2 + 1}{z^2} + \dots + \frac{1 + 2(n - 1)(-1)^n}{z^n}.$$

Zápis předmětu \mathcal{Z} transformace k dané funkci lze realizovat i takto

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} \leftrightarrow \{\delta_{0n} + 1 + 2(n - 1)(-1)^n\},$$

kde δ_{0n} je tzv. Kroneckerův symbol. □

2. Pomocí reziduí: Je-li funkce $F(z)$ racionálně lomená má konečný počet singularit z_k , které jsou póly nebo odstranitelné singularity a výše uvedený integrál můžeme vyčíslit pomocí reziduí

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_p} F(z)z^{n-1}dz = \sum_{z=z_k} \operatorname{rez}_{z=z_k} F(z)z^{n-1}. \quad (6.12)$$

Postup budeme ilustrovat na stejném zadání.

Příklad 6.20. Nalezněte předmět \mathcal{Z} transformace k funkci

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)}$$

Řešení. Výpočet členů posloupnosti $\{f_n\}$ musíme provést dvěma způsoby, neboť funkce obsažená v integrálu $\int_{C_\rho} F(z)z^{n-1}dz$ má pro $n > 0$ pouze dva póly $z = 1$ (prvního řádu) a $z = -1$ (druhého řádu). Členy vzoru $\{f_n\}$ k této funkci pro $n > 0$ vyjádříme jako součet

$$\begin{aligned} f_n &= \operatorname{rez}_{z=-1} \frac{(z^2 + 4z - 1)z^{n-1}}{(z+1)^2(z-1)} + \operatorname{rez}_{z=1} \frac{(z^2 + 4z - 1)z^{n-1}}{(z+1)^2(z-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z^2 + 4z - 1)z^{n-1}}{(z-1)} \right)' + \frac{4 \cdot 1^n}{(1+1)^2} \\ &= \lim_{z=-1} \frac{z^{n-2}(nz^3 + (3n-5)z^2 + (2-5n)z + n-1)}{(z-1)^2} + 1 \\ &= (2n-1)(-1)^n + 1 \end{aligned}$$

Pro f_0 platí výpočet

$$\begin{aligned} f_0 &= \operatorname{rez}_{z=-1} \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z+1)^2(z-1)} + \operatorname{rez}_{z=1} \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z+1)^2(z-1)} + \operatorname{rez}_{z=0} \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z+1)^2(z-1)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z-1)} \right)' + \frac{4}{(1+1)^2 \cdot 1} + \frac{-1}{-1} = \\ &= \lim_{z=-1} -\frac{5z^2 - 2z + 1}{(z-1)^2 z^2} + 1 - 1 = -\frac{8}{(-2)^2(-1)^2} + 2 = 0 \end{aligned}$$

Celkově dostáváme předmět \mathcal{L} transformace k dané funkci ve stejném tvaru

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z+1)^2(z-1)} \leftrightarrow \{\delta_{0n} + 1 + 2(n-1)(-1)^n\}.$$

□

3. Přímo z definice: Vyjdeme-li ze vztahu (6.1), je možné získat člen f_n také tak, že daný vztah vynásobíme z^{n-1} a n -krát derivujeme. Získáme tak řadu, která začíná výrazem $(-1)^n f_n n! z^{-n-1}$ neboť z umocněné na nezáporné celé mocnitéle derivováním zmizely. Vynásobíme-li nyní řadu z^n a provedeme limitní přechod $z \rightarrow \infty$ dostaneme vzorec

$$f_n = (-1)^n \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d^n}{dz^n} [z^{n-1} F(z)].$$

Přestože, odvození tohoto vzorce je jednoduché, jeho užití komplikuje nutnost určit n -tou derivaci racionálně lomené funkce, což je vhodné realizovat ve tvaru rozkladu této funkce ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků. Nebudeme proto uvádět příklad výpočtu pomocí tohoto v literatuře [18] uváděného vzorce. Místo toho uvedeme další možnost

4. Dělení polynomu polynomem: Tento postup nám umožní v mnohých případech určit vzor jak je dokumentováno v následujícím příkladu

Příklad 6.21. Nalezněte předmět \mathcal{Z} transformace k funkci

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)}.$$

Řešení. $(z^2 + 4z - 1) : (z^3 + z^2 - z - 1) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} - \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} - \frac{7}{z^5} + \frac{11}{z^6}$ □

$$\begin{array}{r}
 z^2 \quad +z \quad -1 \quad -\frac{1}{z} \\
 \hline
 \quad 3z \quad \quad \quad +\frac{1}{z} \\
 \quad 3z \quad +3 \quad -\frac{3}{z} \quad -\frac{3}{z^2} \\
 \hline
 \quad \quad -3 \quad +\frac{4}{z} \quad -\frac{3}{z^2} \\
 \quad \quad -3 \quad -\frac{3}{z} \quad -\frac{3}{z^2} \quad +\frac{3}{z^3} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \frac{7}{z} \quad \quad \quad -\frac{3}{z^3} \\
 \quad \quad \quad \frac{7}{z} \quad +\frac{7}{z^2} \quad -\frac{7}{z^3} \quad -\frac{7}{z^4} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad -\frac{7}{z^2} \quad +\frac{4}{z^3} \quad +\frac{7}{z^4} \\
 \quad \quad \quad \quad -\frac{7}{z^2} \quad -\frac{7}{z^3} \quad +\frac{7}{z^4} \quad +\frac{7}{z^5} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \frac{11}{z^3} \quad \quad \quad -\frac{7}{z^5}
 \end{array}$$

Poznamenejme, že při ilustrování různých možností byl úmyslně volen tentýž příklad, aby měl čtenář možnost vzájemným porovnáním zvolit metodu, která mu vyhovuje. Další určování předmětů \mathcal{Z} transformace bude dílčí úlohou při využití \mathcal{Z} transformace. V textu jsou uvedeny dvě možnosti užití \mathcal{Z} transformace. První je k řešení diferenční nebo rekurentních rovnic a druhá možnost je k určování konečných součtů.

6.3 Řešení diferenčních a rekurentních rovnic

S diferenčními a rekurentními rovnicemi se setkáváme při popisu diskrétních systémů v různých oblastech a to jak v matematice samé (např. při numerickém řešení diferenciálních rovnic, v konstruktivní teorii funkcí, v teorii pravděpodobnosti) tak v aplikacích

(numerická analýza fyzikálních polí, elektrotechnika, stavebnictví apod.) Analogicky s řešením lineárních integro-diferenciálních rovnic užitím Laplaceovy transformace můžeme řešit lineární diferenční rovnice. Za lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty považujeme:

$$a_r \{\Delta^r y_n\} + \dots + a_2 \{\Delta^2 y_n\} + a_0 \{y_n\} = \{f_n\},$$

kde $a \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a navíc

- a_i jsou konečné komplexní konstanty pro $i = 0, \dots, r$, které se nazývají koeficienty rovnice.
- $\{f_n\}$ je zadaná posloupnost komplexních čísel, která se nazývá pravá strana rovnice.
- $\{y_n\}$ je hledaná posloupnost, kde prvních r členů y_0, y_1, \dots, y_{r-1} jsou obvykle zadány jako počáteční hodnoty.

Při hledání řešení postupujeme obvykle následujícím způsobem:

1. Nalezneme obraz diferenční rovnice, který je v případě lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty rovnice algebraická.
2. Dosazením počátečních podmínek do této algebraické získáme rovnici, která jedno řešení a nalezneme tak obraz řešení diferenční rovnice.
3. Hledané řešení $\{y_n\}$, potom určíme zpětnou transformací.

Příklad 6.22. Řešte diferenční rovnici $\{\Delta^2 y_n\} - \{y_n\} = \{1\}$ s počátečními podmínkami $y_0 = 0$, $\Delta y_0 = -1$.

Řešení. Určíme obraz diferenční rovnice $\mathcal{L}\{\Delta^2 y_n\} - \mathcal{L}\{y_n\} = \mathcal{L}\{1\}$, přičemž označíme $\mathcal{L}\{y_n\} = Y(z)$:

$$(z-1)^2 Y(z) - z(z-1)y_0 - z\Delta y_0 - Y(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Dosazením počátečních podmínek a vyřešením rovnice získáme obraz řešení:

$$\begin{aligned} (z-1)^2 Y(z) + z - Y(z) &= \frac{z}{z-1}, \\ Y(z)(z^2 - 2z) &= \frac{z}{z-1} - z = \frac{2z - z^2}{z-1}, \\ Y(z) &= \frac{1}{1-z}. \end{aligned}$$

K tomuto obrazu řešení nalezneme snadno předmět užitím (6.10):

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{z-1} \right\} = \{-1\}.$$

□

Druhou možností zápisu závislostí, které popisují diferenční rovnice je tzv. rovnice rekurentní. Dosadíme-li za všechny difference lineární kombinaci členů hledané posloupnosti při využití vztahu

$$\Delta^r y_n = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_{n+i},$$

lze každou diferenční rovnici s konstantními koeficienty přepsat na rovnici, která má tvar:

$$A_r \{y_{n+r}\} + \cdots + A_2 \{y_{n+2}\} + A_1 \{y_{n+1}\} + A_0 \{y_n\} = \{f_n\}, \quad (6.13)$$

kde $A_r \neq 0 \neq A_0$ a A_i jsou vhodné komplexní konstanty. Vzhledem k tomu, že ze známých počátečních podmínek lze opakovaným použitím tohoto vztahu určit libovolné y_n je tento tvar rovnice nazýván rekurentní rovnicí. Postup naznačíme na rovnici z Příkladu 6.22.

Příklad 6.23. Přepište rovnici z Příkladu 6.22, tak aby neobsahovala difference.

Řešení. Z ilustrativních důvodů odvodíme druhou diferenci $\Delta^2 y_n$ bez použití výše uvedeného vzorce:

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = y_{n+2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Po dosazení do rovnice dostáváme

$$\{y_{n+2}\} - 2\{y_{n+1}\} + \{y_n\} - \{y_n\} = \{y_{n+2}\} - 2\{y_{n+1}\} = 1.$$

□

Při hledání řešení rekurentních rovnic postupujeme stejně jako u rovnic diferenčních, to znamená, že nejdříve určíme obraz dané rovnice, který vyřešíme. Potom zpětnou transformací určíme řešení původní rovnice jako vzor řešení obrazu původní rovnice. Situaci budeme ilustrovat na příkladu známé Fibonacciovy posloupnosti. Poprvé byla užitá italským matematikem Leonardem z Pisy, známým spíše jako Fibonacci, který žil v letech 1170 až 1240. Problém králíků zveřejnil Leonardo z Pisy již v roce 1202 v knize Liber abaci. Tento problém můžeme formulovat takto: Kolik králíků vzejde po roce z jednoho páru, jestliže každému páru se v období dospělosti, tj. po dvou měsících, narodí jeden nový pár. Označme y_n počet párů králíků v n -té generaci, přičemž předpokládáme, že žádní králíci neuhynou. Pro zjednodušení budeme králíky rozlišovat na staré (mohou mít potomky) a mladé (nemohou mít potomky) páry. V $(n+2)$. generaci je starých párů jako všech párů v $(n+1)$. generaci, tj. y_{n+1} a mladých párů je zde tolik, kolik bylo starých párů v $(n+1)$ -ní generaci, tj. jako všech párů n -té generace, tj. y_n . Touto úvahou jsme odvodili rovnici $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$. Dále předpokládejme, že začínáme s mladým párem tj. $y_0 = y_1 = 1$.

Příklad 6.24. Nalezněte hodnoty tzv. Fibonacciovy posloupnosti určené rekurentním vztahem $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ a počátečními hodnotami $f_0 = f_1 = 1$.

Nejdříve nalezneme obraz a následně vyřešíme:

$$z^2(F(z) - 1 - 1/z) = z(F(z) - 1) + F(z),$$

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

Rozkladem na součet „parciálních“ zlomků dostaneme Fibonacciovu posloupnost:

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{z_1 z}{z - z_1} - \frac{z_2 z}{z - z_2} \right), \quad \text{kde } z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$f_n = \frac{z_1 z_1^n - z_2 z_2^n}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Uvedený výsledek není v příliš praktickém tvaru. Rozvineme proto $n + 1$. mocniny podle binomické věty a v rozdílu obou závorek se odečtou sudé mocniny $\sqrt{5}$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}2^{n+1}} \left[\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \sqrt{5}^i - \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \sqrt{5}^i \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k,$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Poznámka 11. Poznamenejme, že při obecných počátečních podmínkách $y_0 = \alpha$, $y_1 = \beta$ má obraz řešení dané rekurentní rovnice tvar

$$F(z) = \frac{y_0 z^2 + (y_1 - y_0)z}{z^2 - z - 1},$$

proto rozklad na „parciální“ zlomky obsahuje pouze zlomky se stejnými jmenovateli. Z toho plyne, že řešení je ve tvaru vhodné lineární kombinace posloupností uvedených výše a koeficienty této lineární kombinace lze stanovit z počátečních podmínek. Pro zjednodušení zápisu doplníme výše uvedenou Fibonacciovu posloupnost členy $f_{-2} = 1$, $f_{-1} = 0$, která je zřejmě také řešením dané rekurentní rovnice. Pro lineární kombinaci posunutých posloupností $g_n = \alpha y_{n-2} + \beta y_{n-1}$, platí $g_0 = \alpha$, $g_1 = \beta$. Proto posloupnost $g_n = \alpha y_{n-2} + \beta y_{n-1}$ je řešením s počátečními podmínkami $y_0 = \alpha$, $y_1 = \beta$.

V dalším příkladu si ukážeme možnost řešit rekurentní rovnice, kde řešení je zadáno jinak než pomocí počátečních podmínek.

Příklad 6.25 (Zruinování hazardního hráče). Hráč hraje proti protivníkovi řadu her, kdy vsadí jednu korunu a s pravděpodobností q korunu vyhraje a s pravděpodobností $1 - q$ korunu prohraje. Tato situace se opakuje, dokud hráč nezíská předem stanovených N korun nebo neprohraje všech n korun, se kterými do hry vstupoval. Určete pravděpodobnost zruinování hazardního hráče, to jest, že hra skončí jeho prohrou.

Řešení. Označme f_n pravděpodobnost prohry (zruinování) hráče, který má n korun. V situaci kdy hráč vlastní n korun mohou nastat dvě vzájemně se vylučující možnosti. První, že hráč korunu získá, tedy pravděpodobnost zruinování je $f_n = q f_{n+1}$. Druhá, že

korunu ztratí a pravděpodobnost zruinování je $f_n = (1-q)f_{n-1}$. Protože pravděpodobnost vzájemně se vylučujících možností je součtem jednotlivých pravděpodobností, dostáváme rovnici

$$f_n = qf_{n+1} + (1-q)f_{n-1}.$$

Dále ze zadání plyne počáteční podmínka $f_0 = 1$ (hráč prohrál) a $f_N = 0$ (hráč vyhrál). Nejdříve danou rovnici upravíme na tvar analogický s předchozím případem (n nahradíme $n+1$)

$$f_{n+1} = qf_{n+2} + (1-q)f_n \Leftrightarrow f_{n+2} - \frac{1}{q}f_{n+1} + \frac{1-q}{q}f_n = 0.$$

Pro provedení \mathcal{Z} transformace potřebujeme také znát f_1 . Protože hodnotu f_1 neznáme, označíme ji jako parametr $f_1 = \alpha$ s tím, že α dodatečně stanovíme z druhé podmínky ($f_N = 0$). Obraz dané rovnice je ve tvaru

$$z^2(F(z) - 1 - \frac{\alpha}{z}) - \frac{1}{q}z(F(z) - 1) + \frac{1-q}{q}F(z) = 0.$$

Odtud určíme $F(z)$ a pro $q \neq \frac{1}{2}$ rozložíme na „parciální“ zlomky, tj.

$$F(z) = \frac{z^2 + z\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)}{z^2 - \frac{z}{q} + \frac{1-q}{q}} = \frac{z^2 + z\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)}{\left(z + 1 - \frac{1}{q}\right)(z - 1)} = \frac{z}{z - 1} \frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \frac{z}{z + 1 - \frac{1}{q}} \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1}$$

a řešení dané rekurentní rovnice (v závislosti na α) pak je

$$f_n = \frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \left(\frac{1-q}{q}\right)^n \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1}.$$

Dosazením tohoto řešení do druhé (okrajové) podmínky $f_N = 0$ stanovíme α :

$$\frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{q\left(\frac{1-q}{q}\right)^N + q - 1}{q\left(\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - 1\right)}.$$

Po dosazení do původního vztahu, tak získáme konkrétní pravděpodobnost zruinování hazardního hráče

$$\frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - \left(\frac{1-q}{q}\right)^n}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - 1}.$$

V případě spravedlivé hry $q = 1/2$ mají obraz řešení a řešení tvary:

$$F(z) = \frac{z^2 + z(\alpha - 2)}{z^2 - 2z + 1} \Leftrightarrow f_n = 1 + n(\alpha - 1) \Leftrightarrow f_n = \frac{N - n}{N}.$$

Toto řešení je možné získat pomocí reziduí, neboť funkce $F(z)$ má pouze pól $z = 1$.

$$f_n = (z^{n+1} + z^n(\alpha - 2))' \Big|_{z=1} = n + 1 + n(\alpha - 2),$$

$$0 = f_N = N + 1 + N(\alpha - 2) \Leftrightarrow \alpha - 2 = -\frac{N+1}{N} \Leftrightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{N}.$$

Situaci budeme ilustrovat pro $n = 5$, $N = 10$ a tři konkrétní možnosti $q_1 = 0, 4$, $q_2 = 0, 5$ a $q_3 = 0, 6$, pro které dostaneme tři různé pravděpodobnosti

$$p_1 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^5}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1} = \frac{243}{275} \doteq 0,884 \quad p_2 = \frac{10 - 5}{10} = \frac{1}{2} \quad p_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1 0 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{2}{3}\right)^1 0 - 1} = \frac{1}{1025}.$$

Pomocí tohoto řešení můžeme provést analýzu popisované situace v návaznosti na volbu parametru q pro „velká očekávání“ tj. $N \rightarrow \infty$:

$$q < \frac{1}{2} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - \left(\frac{1-q}{q}\right)^n}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - 1} = 1, \text{ neboť } \frac{1-q}{q} > 1,$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-n}{N} = 1.$$

Tedy při spravedlivé $q = \frac{1}{2}$ a nevýhodné $q < \frac{1}{2}$ hře je velká pravděpodobnost zruinování hazardního hráče při velkém očekávání N . \square

V posledním příkladě ukážeme jak lze postupovat u nehomogenních diferenčních rovnic tj. u rovnic, které mají nenulovou pravou stranu. Popíšeme řešení diskretizace rovnice z Příkladu 5.24 s obecnou pravou stranou $u(t)$ (tj. diskretizací LR obvodu s obecným napětím).

Příklad 6.26. Nalezněte řešení rovnice

$$i_{n+1} - bi_n = au_n, \text{ kde } i_0 = 0, a, b, u_n \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Obraz dané rovnice má tvar

$$zI - bI = a\mathcal{Z}\{u_n\} \Leftrightarrow I = \frac{a}{z-b}\mathcal{Z}\{u_n\} = \frac{a}{b} \left(\frac{z}{z-b}\mathcal{Z}\{u_n\} - \mathcal{Z}\{u_n\} \right).$$

Zpětnou transformací s využitím věty o konvoluci dostáváme

$$\{i_n\} = \frac{a}{b} (\{b^n\} * \{u_n\} - \{u_n\}) \Leftrightarrow i_n = \frac{a}{b} \left(\sum_{l=0}^n b^{n-l} u_l - u_n \right) = a \sum_{l=1}^n b^{n-l} u_{l-1}.$$

V následujícím Příkladu 6.29 bude posloupnost $\{i_n\}$ konkretizována pro tzv. sinusové buzení $u_n = \sin n\alpha$. \square

Při řešení diferenčních resp. rekurentních rovnic jsme mlčky předpokládali, že hledaná řešení mají obraz v \mathcal{Z} transformaci tj. jsou přípustné. Obecně to neplatí, ale pokud se jedná o rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou ve tvaru konečné lineární kombinace funkcí tvaru $P(n)q^n \cos \alpha n$, resp. $P(n)q^n \sin \alpha n$, kde $P(n)$ je polynom, je každé řešení této rovnice přípustné.

6.4 Konečné součty

Pomocí \mathcal{L} transformace můžeme také odvodit součty některých konečných posloupností celých čísel. Využíváme přitom hlavně větu o částečném součtu a větu o derivaci obrazu. Metodiku výpočtu si osvětlíme na následujících příkladech.

Příklad 6.27. Určete součty druhých a třetích mocnin prvních n přirozených čísel (pro „první“ mocniny $\sum_{i=0}^n i = \binom{n+1}{2}$ je všeobecně známo).

Řešení. V Příkladu 6.14 jsme odvodili \mathcal{L} transformaci posloupností $\{n^2\}$ a $\{n^3\}$, jestliže použijeme větu o částečném součtu pro posloupnost $\{n^2\}$ dostáváme:

$$F(z) = \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=0}^n i^2 \right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{L} \{i^2\} = \frac{z}{z-1} \frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4}.$$

Ve výše uvedeném vztahu jsme použili dříve odvozený obraz (6.3) posloupnosti $\{n^2\}$. Pro nalezení vzoru ve tvaru racionálně lomené funkce použijeme výpočtu pomocí reziduí:

$$\operatorname{rez}_{z=1} F(z)z^{n-1} = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^3 z^{n+2} + z^{n+1}}{\partial z^3} = \frac{1}{6}(n+1)n(n+2+n-1) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6},$$

neboť funkce $F(z)$ má pouze pól čtvrtého řádu pro $z=1$. Analogicky pro posloupnost $\{n^3\}$ využitím (6.4) dostáváme:

$$F(z) = \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=0}^n i^3 \right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{L} \{i^3\} = \frac{z}{z-1} \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}.$$

Analogicky s předchozím případem pro hledání vzoru k funkci $F(z)$ použijeme rezidua, protože funkce $F(z)$ má pouze jeden pól $z=1$ pátého řádu:

$$\begin{aligned} \operatorname{rez}_{z=1} F(z)z^{n-1} &= \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^4 (z^{n+3} + 4z^{n+2} + z^{n+1})}{\partial z^4} = \\ &= \frac{1}{24} \left((n+3)(n+2)(n+1)n + 4((n+2)(n+1)n(n-1) + (n+1)n(n-1)(n-2)) \right) = \\ &= \frac{1}{24} (n+1)n \left((n+3)(n+2) + 4(n+2)(n-1) + (n-1)(n-2) \right) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}. \end{aligned}$$

□

Povšimněte si, že jsme porovnáním se součtem prvních n přirozených čísel odvodili jednu z nejdéle známých číselných identit

$$1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

V dalším příkladu ukážeme jak postupovat v úlohách kdy se nesčítá přes všechna čísla, ale jenom přes vybranou podposloupnost.

Příklad 6.28. Určete součet prvních n lichých čísel a jejich druhých mocnin.

Řešení. Motivování Příkladem 6.12 nalezneme postupně obrazy posloupností $\{(-1)^n n\}$ a $\{(-1)^n n^2\}$ podobně jako v (6.14):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(-1)^n n\} &= -z \left(\frac{z}{z+1} \right)' = \frac{-z}{(z+1)^2}, \\ \mathcal{L}\{(-1)^n n^2\} &= -z \left(\frac{-z}{(z+1)^2} \right)' = \frac{z-z^2}{(z+1)^3}.\end{aligned}$$

Analogicky s předchozím příkladem odvodíme

$$\begin{aligned}F1(z) &= \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^i i \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{-z}{(z+1)^2} = \frac{-z^2}{(z-1)(z+1)^2}, \\ F2(z) &= \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^i i^2 \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{z-z^2}{(z+1)^3} = \frac{-z^2}{(z+1)^3}.\end{aligned}$$

Nyní pomocí reziduí určíme vzory k funkcím $F1(z)$, $F2(z)$:

$$\begin{aligned}f1_n &= \operatorname{rez}_{z=1} F1(z) z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=-1} F1(z) z^{n-1} = -\frac{1}{2^2} - \left(\frac{z^{n+1}}{(z-1)} \right)' \Big|_{z=-1} = \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{z^n((n+1)(z-1)-z)}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{(-1)^n n}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4},\end{aligned}$$

$$f2_n = \operatorname{rez}_{z=-1} F1(z) z^{n-1} = \frac{1}{2} (-z^{n+1})'' \Big|_{z=-1} = \frac{(n+1)n(-1)^n}{2}.$$

Odvodili jsme tedy vztahy pro součty řad se střídavými znaménky

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i i = \frac{(-1)^n n}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4} \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i i^2 = \frac{(n+1)n(-1)^n}{2}.$$

Dosazením těchto vztahů při substituci $n = 2n - 1$ do následujících rovností

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{2n-1} i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i i \right) \quad \text{resp.} \quad \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{2n-1} i^2 - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i i^2 \right)$$

dostáváme výsledek:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{1}{2} \left(\frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)}{2} + \frac{(-1)^{2n-1}}{4} - \frac{1}{4} \right) = n^2$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{(2(2n-1)+1)(2n-1+1)(2n-1)}{6} - \frac{(2n-1+1)(2n-1)(-1)^{2n-1}}{2} \right) = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

□

Poslední příklad bude věnován v praxi využitelným typům sumacím. V návaznosti na Příklad 6.26 se budeme zabývat následující sumou.

Příklad 6.29. Určete součet $1 + q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha$.

Řešení. Nejdříve pomocí věty o podobnosti a Příkladu 6.12 určíme:

$$\mathcal{Z}\{q^n \sin n\alpha\} = \frac{zq \sin \alpha}{z^2 - 2zq \cos \alpha + q^2}.$$

Pro obraz posloupnosti částečných součtů platí

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^n q^i \sin i\alpha\right\} = \frac{z^2 q \sin \alpha}{(z-1)(z^2 - 2zq \cos \alpha + q^2)}.$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má dva komplexně sdružené kořeny $z_{1,2} = q \exp(\pm j\alpha)$. Funkce \mathcal{Z} má tedy tři prosté póly a pomocí reziduí odvodíme

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n q^i \sin i\alpha &= \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=z_2} F(z)z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} = \\ &= \frac{(z_1)^{n+1}}{2j(z_1-1)} - \frac{(z_2)^{n+1}}{2j(z_1-2)} + \frac{q \sin \alpha}{q^2 - 2q \cos \alpha + 1} = \\ &= \frac{q \sin \alpha + q^{n+1}(q \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha)}{q^2 - 2q \cos \alpha + 1}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že tento výsledek je pro $|q| < 1$ v souladu s dříve odvozeným součtem analogické nekonečné řady, neboť pro $n \rightarrow \infty$ dostaneme stejný výsledek. □

Závěrem kapitoly ještě uvedeme přehledně několik obrazů elementárních posloupností, přestože většina vztahů byla již v textu odvozena formou příkladů výše.

Číslo vzorce	$f(n), n = 0, 1, 2, \dots$	$\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$
1.	a^n	$\frac{z}{z-a}$
3.	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
6.	n^2a^n	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
6.	$\frac{a^n}{n+k}, k \geq 1$	$-\frac{1}{a^k} \text{Ln} \left(1 - \frac{a}{z}\right) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{z^i}{a^i}$
7.	$\cos \omega n$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
8.	$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
7.	$\binom{n}{k}$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$
8.	$\{1, 0, a, 0, a^2, 0, a^3, 0, \dots\}$	$\frac{z^2}{z^2 - a}$
9.	$\{0, a, 0, a^2, 0, a^3, 0, a^4, \dots\}$	$\frac{z}{z^2 - a}$

6.5 Příklady na procvičení

Cvičení

1. Nalezněte obraz při \mathcal{Z} transformaci posloupnosti:

- | | |
|---|---|
| a) $\left\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots\right\}$ | b) $\left\{\frac{1 + (-1)^n}{2} 3^n\right\}$ |
| c) $\left\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{32}, 0, \frac{1}{128}, \dots\right\}$ | d) $\left\{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) 2^n\right\}$ |
| e) $\left\{1, 0, \frac{-1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{-1}{729}, 0, \frac{1}{6561}, \dots\right\}$ | f) $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ |
| g) $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}, \frac{2}{243}, \frac{7}{2187}, \dots\right\}$ | h) $\left\{1, 1, \frac{-1}{4}, -1, \frac{1}{16}, 1, \frac{-1}{64}, -1, \dots\right\}$ |

2. Nalezněte vzor k obrazu $F(z)$ při \mathcal{Z} transformaci, tj $\mathcal{Z}^{-1}F(z)$ pro $F(z)$:

- | | |
|--------------------------|----------------------------------|
| a) $\frac{z^2}{z^2 + 4}$ | b) $\frac{6z^2}{(z+1)(z^2 - 4)}$ |
|--------------------------|----------------------------------|

c) $\frac{16z^2}{z^4 - 16}$

e) $\frac{18z}{(z-3)^3}$

g) $\frac{z^3}{(z-3)^2(z^2+1)}$

d) $\frac{26z^2}{(z^4 - 5z^2 - 36)}$

f) $\frac{(2-z)2z}{(z+2)^3}$

h) $\frac{z^3}{(z-3)(z^2-2z-3)}$

3. Určete řešení $y(n)$ zadané rekurentní rovnice, vyhovující uvedeným počátečním podmínkám, přičemž budeme při jejich zápisu používat dvě v literatuře používané formy : y_n je rovnocenné s $y(n)$.

a) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0, y_0 = 2$ a $y_1 = 5,$

b) $y(n+2) + 2y(n+1) + y(n) = 0, y(0) = 0$ a $y(1) = -1,$

c) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0, y_0 = 6$ a $y_1 = 7,$

d) $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 49 \cdot 5^n, y(0) = 2$ a $y(1) = 3,$

e) $y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 2, y(0) = 0$ a $y(1) = 1,$

f) $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = (2n+5)2^{n+1}, y(0) = 0$ a $y(1) = 2,$

g) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0, y_0 = 0$ a $y_1 = \sqrt{3}.$

4. Určete řešení zadané diferenční rovnice, vyhovující uvedeným počátečním podmínkám

a) $\Delta^2 y_n - \Delta y_n = 0, y(0) = 1$ a $\Delta_0 = 1,$

b) $\Delta^2 y_n - 3\Delta y_n + 2y_0 = 0, y(0) = 0$ a $\Delta_0 = -1,$

c) $\Delta^2 y_n - 4\Delta y_n + 4y_0 = 1, y(0) = 1$ a $\Delta_0 = 2,$

d) $\Delta^2 y_n - 8\Delta y_n + 16y_0 = 50 \cdot 5^n, y(0) = 0$ a $\Delta_0 = 5,$

Výsledky

1. Obrazy jsou postupně

a) $\frac{z}{2(z^2-1)}$

c) $\frac{2z}{4z^2-1}$

e) $\frac{9z^2}{9z^2+1}$

g) $\frac{3z}{(3z-1)^2}$

b) $\frac{z^2}{z^2-9}$

d) $\frac{2z}{z^2+4}$

f) $-z \ln(1-z^{-1})$

h) $\frac{z(4z^3+4z+4z^2+1)}{(4z^2+1)(z^2+1)}$

2. Vzory jsou postupně

a) $\{2^n \cos(1/2 \pi n)\}$

b) $\{2^n - 3(-2)^n + 2(-1)^n\}$

c) $\{(-2)^n - 2 \cdot 2^n \cos(1/2 \pi n) + 2^n\}$

d) $\{-2 \cdot 2^n \cos(1/2 \pi n) + 3^n + (-3)^n\}$

e) $\{n(n-1)3^n\}$

f) $\{n^2(-2)^n\}$

g) $\left\{-\frac{3}{50} \cos(1/2 \pi n) - \frac{2}{25} \sin(1/2 \pi n) + \frac{3}{50} 3^n + \frac{3}{10} n 3^n\right\}$

h) $\left\{\frac{15}{16} 3^n + \frac{1}{16} (-1)^n + \frac{3}{4} n 3^n\right\}$

3. a) $y_n = 2^n + 3^n$, b) $y(n) = n(-1)^n$, c) $y(n) = 2^n + 5$, d) $y(n) = (-2)^n + 5^n$, e) $y(n) = n^2$, f) $y(n) = n^2 2^n$, g) $y(n) = 2^n \sin(n\pi/3)$

4. a) $y_n = 2^n$, b) $y_n = 2^n - 3^n$, c) $y_n = n 2^n + 1$, d) $y_n = n^2 5^n$.

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [\$\mathcal{Z}\$ transformace - hledání obrazu číselné posloupnosti či předmětu komplexní funkce.](#)
2. [Řešení lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty pomocí \$\mathcal{Z}\$ transformace.](#)

7 Signály

7.1 Pojem signálu

Problematika modelování má hluboký metodologický a gnoseologický význam a zvládnutí jejích základů je nezbytností v oblasti rozvíjení přírodních i společenských věd včetně z nich čerpajících disciplín. Jeden z fundamentálních pojmů této problematiky — pojem systému v pojetí Ludwiga von Bertalanffyho a rozličné modifikace konceptu systému je jeden z nejrozšířenějších pojmů používaných nejen v různých vědních disciplínách, ale i v běžném životě v rámci popisu rozličných situací. Základní idea, že za systém lze považovat soubor prvků propojených nejrůznějšími vztahy, vedla ke vzniku integrující vědní disciplíny nazývané obecná teorie systémů. Vazby mezi jednotlivými prvky systému, stejně jako vstupy i výstupy systému označujeme jako signály. Signály tedy můžeme z hlediska popisu činnosti systému dělit na vnitřní signály daného systému, dále signály vstupní a signály výstupní. Obecnější pojem než signál je pak pojem procesu. Procesem rozumíme děj probíhající v určitém prostředí v kontinuálním (spojitém) nebo v diskrétním čase, který může být popsán signálními funkcemi nebo posloupnostmi. Teorie systémů prochází prudkým rozvojem, její podstatné části jsou postupně zařazovány do studia na vysokých školách technického zaměření a zejména do obsahu vědecké výchovy studentů doktorských studijních programů. Rovněž zdůrazněme, že existuje rozsáhlá literatura – u nás a zejména v zahraničí bylo vydáno množství monografií věnovaných problematice signálů a systémů a že tedy kapitola 7 a 8 tohoto učebního textu představuje pouze úvod do dané problematiky. Na VUT – zejména na zdejší fakultě byly vydány skvělé učební texty – viz seznam literatury na konci skript.

7.1.1 Zavedení pojmu a klasifikace signálu

Právě uvedené vymezení pojmu signál je velmi obecné. Připusťme, že různí lidé mají různou představu o významu slova signál. Dokonce ani inženýři elektrotechnici nejsou ve výkladu obsahu pojmu signál zcela jednotní. Pohled na slovo signál je závislý na jejich zaměření. Názory se mohou lišit zejména v hodnocení vzájemné vázanosti či nezávislosti signálu a systému. Pro obvodáře či odborníka na automatické řízení je signál nástrojem pro popis systému, jeho stavu a chování vůči okolí. Naopak pro odborníka na zpracování signálů je systém, ve kterém signál vzniká mnohdy vzdálený a neznámý nebo nezajímavý, případně nepopsatelný. Tento odborník se zabývá především hledáním efektivních a realizovatelných algoritmů zpracování signálu, např. s cílem zjistit některé informace nesoucí

parametry užitečné složky signálu. Teprve sekundárně, v případě potřeby, navrhuje systémy algoritmus realizující.

Má se za to, že používání slova signál v dnešním obvyklém slova smyslu začalo v roce 1588, kdy byl použit řetězec výstražných ohňových znamení oznamujících anglickému loďstvu, že se blíží španělské loďstvo.

My budeme pojem signál chápat, že je to veličina, zpravidla fyzikální, nesoucí informaci. Pojem informace bude chápán velmi obecně jako každá zpráva, sdělení nebo údaj.

S případem, kdy signálem bude elektrické napětí nebo elektrický proud, se lze setkávat nejčastěji. To souvisí se skutečností, že jsou k dispozici technické prostředky, které umožňují elektrické signály zpracovávat rychle a levně. Jak již bylo zmíněno, nejčastěji se také vyskytují signály, u kterých se informaci nesoucí veličina mění v závislosti na čase.

Matematické modely signálů jsou vynikajícím a efektivním nástrojem pro studium signálů a hledání nástrojů jejich analýzy a algoritmů jejich zpracování. Umožňují snadno zavést užitečné veličiny a pojmy. Student přitom najde bezprostřední uplatnění části svých znalostí středoškolské a vysokoškolské matematiky.

V této kapitole je zejména uvedeno, jak lze využít znalostí získaných studiem předchozích kapitol tohoto skriptu.

Příklad 7.1. Typickým signálem je například elektrické napětí na svorkách reproduktoru radiopřijímače. Napětí se mění v čase, o čemž je možné se přesvědčit pomocí osciloskopu. Signál je fyzikální veličinou a je také zřejmé, že průběh napětí zobrazuje nějakou informaci.

Příklad 7.2. (Signál EKG). Signál EKG (Electrocardiography signal, ECG) poskytuje lékaři důležité informace o činnosti a stavu lidského srdce. Signál zdravého člověka je přibližně periodický s periodou asi 1s. Nápadným prvkem v časovém průběhu EKG je zpravidla úzký impulz charakteristického tvaru známý pod označením QRS komplex.

V moderních přístrojích se signál EKG vzorkuje, aby pak mohl být vyjádřen posloupností čísel. Standardní rychlosti vzorkování jsou 250 vzorků (samples) za sekundu a 500 vzorků za sekundu (Sa/s).

K vlastnímu signálu EKG se připojují různé rušivé složky. Patří k nim například napětí s kmitočtem 50 Hz naindukované ze síťových rozvodů kapacitními vazbami a magnetickou indukci. Další rušivé signály, které jsou součástí snímaného napětí, jsou vyvolány svalovými stahy. Přítomnost rušivých signálů může být nepříjemná, protože užitečná složka signálu má rozkmit jen asi 1 mV.

Příklad 7.3. (Signál EEG). Signály EEG (Encephalogram Signal) jsou snímány z několika míst povrchu hlavy. Jedná se o součtová napětí vyvolaná činností milionů neuronů v mozku. Typický rozkmit napětí se pohybuje v rozmezí od 2 do 100 mV. Výkon signálů je převážně rozložen v kmitočtovém pásmu od 0,5 Hz do 100 Hz. Signály EEG umožňují zjišťovat epilepsii, poruchy spánku aj.

Příklad 7.4. (Řečový signál). Řečový signál je akustickým signálem. Má celou řadu specifických vlastností a nese rozličné informace. Především má nějaký obecný věcný obsah, sdělení, které by bylo možné vyjádřit písmem. Z řečového signálu jsme zpravidla schopni rozpoznat, zda mluví muž, žena nebo dítě, jakým jazykem mluví, jakou má

náladu a pod. Také jsme schopni na základě hlasového projevu rozpoznat nám známou osobu, což je využíváno v bezpečnostních systémech.

Při přenosu řeči na velkou vzdálenost můžeme klást různé nároky na kvalitu přenosu podle toho, jaké informace chceme z přijatého signálu získat. Jakost řečového signálu je dána především kmitočtovým pásmem propustnosti sdělovacího systému. V praxi se ustálila telefonní kvalita (telephone speech) s pásmem 300 Hz až 3 400 Hz, v USA 200 Hz až 3 200 Hz, rozhlasová kvalita (wideband speech) s pásmem 50 Hz až 7 kHz a konečně CD kvalita (wideband audio) s pásmem 10 Hz až 20kHz stereo.

Ukazuje se, že při řešení řady úloh v elektrotechnice lze pominout náhodnost v chování signálu. Proto často skutečné, v podstatě náhodné, stochastické signály nahrazujeme pravidelnými signály s jednoznačně definovanými hodnotami v jejich definičním oboru. Někam mezi náhodné signály a pravidelné signály můžeme zařadit tzv. chaotické signály.

Je vhodné připomenout, že při řešení některých úloh náhodný charakter signálu pominout nelze.

Obecnějším termínem, než pojem signál, je termín proces – nezaměňujte prosím s náhodným procesem. Procesem je každý fyzikální, společenský, biologický nebo jiný jev či děj, probíhající v určitém prostředí, zpravidla relativně uzavřeném. Proces může být více či méně dokonale popsán několika signály.

Příklad 7.5. Příkladem procesu v uvažovaném slova smyslu může být činnost nebo chování motoru při rozjezdu automobilu. Tento proces může být popsán celou řadou signálů, např. závislostí otáček na čase, závislostí krouťícího momentu na čase, závislostí teploty chladicí kapaliny na čase, závislostí úhlu otevření škrticí klapky na čase, atd. V automobilu Felicia s řídicí jednotkou Siemens je uvedený proces sledován osmi čidly.

Abychom mohli úspěšně řešit technické problémy, nutně potřebujeme skutečné signály matematicky popsat, vyjádřit. Vytváříme proto matematické modely signálů.

Signály můžeme členit podle různých hledisek. Uvedeme několik z nich a současně vymezíme typy signálů, které nás budou dále zajímat.

1) Členění podle počtu nezávisle proměnných.

- **Jednorozměrné signály** (někdy označované krátce 1D signály); příkladem může být průběh napětí $u(t)$, s jedinou nezávisle proměnnou t (časem).
- **Dvourozměrné signály** (2D signály); např. průběh úrovně šedi (šedotónového) obrazu $p(x, y)$, kde jsou nezávisle proměnnými prostorové souřadnice x a y .
- **Vícerozměrné signály** (např. 3D objekty).

Dále se omezíme pouze na jednorozměrné signály, které jsou funkcemi času, resp. časovými posloupnostmi.

2) Nezávisle proměnná může být spojitá (souvislá) nebo diskrétní. Je-li nezávisle proměnnou čas, můžeme signály dělit na:

- **signály se spojitým časem** (nazývané též jako *signály se souvislým časem* nebo zjednodušeně *spojité signály*), které jsou (po částech) spojitě funkce spojitě proměnného času; spojitě signály nabývající reálných hodnot bývají nazývány jako *analogové*.

- **signály s diskretním časem** (zjednodušeně *diskrétní signály*), které jsou uspořádanými posloupnostmi hodnot; tyto jsou např. výsledkem rovnoměrného vzorkování spojitého signálu v okamžicích $t_n = nT$, kde n je celé číslo a T vzorkovací perioda; takové signály budeme označovat jako posloupnosti $s(nT)$, nebo zjednodušeně jako $s(n)$, popř. s_n . Zvláštním případem diskretních signálů jsou *číslicové signály*, které jsou diskretizovány nejen v čase, ale i v úrovni — jejich vzorky jsou vyjádřeny s omezenou přesností, vymezenou obvykle počtem bitů, které máme k dispozici pro jejich reprezentaci.

3) Členění podle matematických modelů signálů.

- **Deterministické signály** (někdy označované jako *regulární* signály nebo také *determinované* signály) jsou signály, které jsou reprezentovány konkrétními (známými) analytickými funkcemi nebo posloupnostmi. Díky tomu umíme určit jejich hodnotu v kterémkoliv, tedy i budoucím čase. V realitě se s (idealizovanými) čistě deterministickými signály prakticky nesetkáváme, ale velmi důležité je jejich uplatnění při analýze vlastností systémů.
- **Náhodné procesy** (zjednodušeně *náhodné* nebo *stochastické* signály) jsou na rozdíl od deterministických signálů nepředvídatelné. K jejich popisu slouží *stochastické modely*. I zde existují idealizované modely, např. bílý šum, se kterými se v praxi v čisté podobě nesetkáváme, ale můžeme je využít např. při návrhu některých speciálních systémů.

7.2 Deterministické signály využívané při analýze lineárních systémů

Dříve než se budeme věnovat odděleně signálům spojitým a diskretním, zaměříme se na základní typy deterministických signálů, které se využívají při analýze spojitých i diskretních lineárních systémů. Všimneme si jednak dvou důležitých aperiodických (či jednorázových) signálů, jednotkového impulsu a jednotkového skoku, jednak velmi důležitého signálu periodického, kterým je signál harmonický.

7.2.1 Jednotkový impuls

Připomeňme si **Spojitý jednotkový impuls** (tj. Diracův impuls či Diracova distribuce) lze definovat jako

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty; & \text{pro } t = 0, \\ 0; & \text{pro } t \neq 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

se spojitou nezávisle proměnnou t (resp. se souvislým časem). Jak jsme již viděli, Diracův impuls můžeme interpretovat jako limitní případ spojitého (velmi úzkého a vysokého) obdélníkového impulsu

$$d(t) = \begin{cases} \frac{1}{\xi}; & \text{pro } t \in \langle \frac{-\xi}{2}, \frac{\xi}{2} \rangle \\ 0; & \text{pro } t \notin \langle \frac{-\xi}{2}, \frac{\xi}{2} \rangle \end{cases} \quad (7.2)$$

tj. jako

$$\delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} d(t).$$

Další vlastnosti byly uvedeny v Kapitole 4.1.

Je zřejmé, že přesná realizace Diracova impulsu je nemožná, v případě potřeby zobrazení odezvy spojitého systému na jednotkový impuls můžeme jednotkový impuls realizovat jen přibližně pomocí velmi krátkých impulsů, jejichž délka je zanedbatelná vůči časovým konstantám systému.

Diskrétní jednotkový impuls byl definován jako posloupnost

$$\delta(n) = \begin{cases} 1; & \text{pro } n = 0 \\ 0; & \text{pro } n \neq 0 \end{cases}, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Z hlediska analýzy lineárních systémů jsou jednotkové impulsy zajímavé především díky jejich spektrálním vlastnostem, o kterých se zmíníme později v souvislosti s Fourierovou transformací (popř. s diskretní Fourierovou transformací). Odezvu lineárního systému na jednotkový impuls nazýváme impulsní charakteristikou.

7.2.2 Jednotkový skok

Spojité jednotkové skok (Heavisidova funkce) byl definován jako

$$\eta(t) = \begin{cases} 0; & \text{pro } t < 0; \\ \frac{1}{2}; & \text{pro } t = 0; \\ 1; & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$

se spojitou nezávisle proměnnou t .

Vztah mezi jednotkovým skokem $\eta(t)$ a jednotkovým impulsem $\delta(t)$ je vyjádřen jako

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau,$$

neboť:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 0 \text{ pro } t < 0, \text{ jelikož } \delta(t) = 0 \forall t < 0 \text{ a } \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1 \text{ pro } t > 0.$$

Diskrétní jednotkový skok je posloupnost definovaná obvykle jako

$$\eta(n) = \begin{cases} 0; & \text{pro } n < 0; \\ 1; & \text{pro } n \geq 0. \end{cases}$$

Odezvu lineárního systému na jednotkový skok (tj. na jednotkovou skokovou změnu vstupní veličiny) nazýváme přechodovou charakteristikou. Souvislost mezi diskrétním a jednotkovým skokem a diskrétním jednotkovým impulsem je dána vztahem

$$\delta(n) = \eta(n) - \eta(n - 1),$$

jde o rozdíl jednotkového impulsu a jednotkového impulzu zpožděného.

V tomto textu se zaměříme na spojité a diskrétní deterministické signály, důležité při analýze lineárních spojitých a číslicových systémů.

Poznamenejme ještě, že signály $s(t)$, pro které platí $s(t) \neq 0$ pro libovolné $t < 0$, nazýváme **nekauzálními**. Naopak signály, pro které platí $s(t) = 0$ pro libovolné $t < 0$ jsou **kauzální**.

7.3 Signály se spojitým časem

Signály se spojitým časem nazýváme také spojitými (jednorozměrnými) signály nebo signály se souvislým časem, obvykle představují (po částech) spojitě reálné nebo komplexní funkce $u = f(x)$ jedné reálné proměnné; x je nejčastěji čas probíhající časovou množinou (časovou osu), což je interval $\langle t_0, \infty \rangle \subset \mathbb{R}$ nebo jeho vhodný podinterval $\langle t_0, t_1 \rangle \subset \subset \langle t_0, \infty \rangle$. Zde \mathbb{R} – jakožto i dříve – označuje množinu všech reálných čísel, kterou můžeme také označit jako interval $(-\infty, \infty)$. Připomeňme, že intervalem reálných čísel se rozumí každá alespoň dvouprvková lineárně uspořádaná množina $I \subset \mathbb{R}$ s touto vlastností: Jestliže $x, y \in I$, $x < y$ a $z \in \mathbb{R}$ je číslo s vlastností $x < z < y$, pak $z \in I$.

Obecněji lze spojitým (jednorozměrným) signálem nazývat funkci $u = f(x)$, kde x je prostorová vzdálenost nebo jiná veličina. Dále, počet nezávisle proměnných není principiálně omezen; pak hovoříme o dvojrozměrných nebo vícerozměrných signálech (např. obraz je jasový signál závislý na dvou prostorových souřadnicích). Signály spojitě v uvedeném smyslu se také označují jako analogové, neboť bývají reprezentovány průběhy fyzikálních analogových veličin.

7.4 Periodické signály, harmonické signály a jejich spektra

V technické praxi se často setkáváme se signály, jejichž průběh se periodicky opakuje. Příkladem takového signálu může být datový signál vyjádřený periodickou posloupností čísel 0, 1, tj. ku příkladu posloupností 01010101... Také signál vyjádřený posloupností

0011001100110011 . . . atd. je signálem periodickým, ale s dvojnásobnou periodou. Funkce $y = s(t)$ je periodická, existuje-li kladné číslo T_s takové, že pro všechna reálná čísla t platí:

$$s(t + T_s) = s(t)$$

Nejmenší hodnota T_s s výše uvedenou vlastností se nazývá základní perioda.

Při řešení některých fyzikálních problémů, ve kterých se vyskytují periodické děje, je výhodné vyjádřit příslušné funkce pomocí nekonečných Fourierových (trigonometrických) řad. Jako příklady uveďme elektrické, akustické či mechanické kmity nebo teorii pružnosti.

Periodická funkce modelující spojitý signál s periodou T_s , $s(t) = s(t + mT_s)$, m celé, která splňuje Dirichletovy podmínky (funkce musí být absolutně integrovatelná, musí mít v periodě konečný počet nespojitostí a konečný počet extrémů – lze říci, že každý „rozumný“ signál uvedené podmínky splňuje; viz definice 4.9), může být reprezentována součtem komplexních harmonických funkcí o kmitočtech $k\Omega$ (když $\Omega = 2\pi/T_s$ je základní úhlový kmitočet signálu a k je celé číslo),

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}, \quad (7.3)$$

kde c_k jsou komplexní koeficienty Fourierovy řady, které lze vypočítat, jak již bylo uvedeno v Kapitole 4.1,

$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} s(t) e^{-jk\Omega t} dt. \quad (7.4)$$

Koeficienty Fourierovy řady $c_k = |c_k| \cdot e^{j \cdot \arg(c)}$ lze považovat za komplexní amplitudy komplexních harmonických signálů $e^{jk\Omega t}$, které tvoří analyzovaný periodický signál. Situace se na pohled zjednoduší pro reálný signál $s(t)$, kdy musí být koeficienty Fourierovy řady v komplexně sdružených párech $c_k = c_{-k}^*$. Vztah (7.3) lze pak přepsat do podoby

$$\begin{aligned} s(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|c_k| e^{-j \arg c_k} e^{-jk\Omega t} + |c_k| e^{j \arg c_k} e^{jk\Omega t} \right] = \\ &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(k\Omega t + \arg c_k), \end{aligned} \quad (7.5)$$

tedy vyjádřit signál jako lineární kombinaci stejnosměrné složky c_0 a reálných harmonických signálů o amplitudách $2|c_k|$ a počátečních fázích $\arg(c_k)$.

Tzv. *dvoustranná spektra* jsou velmi užitečná. Jedná se reprezentaci spojitého periodického signálu $s(t)$ lineární kombinací komplexních (vzájemně nezávislých) harmonických signálů. Využitím vztahu (7.4) je zřejmě spektrální analýza spojitého periodického signálu; komplexní koeficienty Fourierovy řady představují diskrétní spektrum. Interpretace koeficientu c_k je při spektrální analýze reálného signálu jednoduchá: jeho modul $|c_k|$ je polovinou amplitudy a argument $\arg c_k$ fázovým posunutím (počáteční fází) k -té reálné harmonické složky, která je v analyzovaném signálu obsažena; k -tou harmonickou složkou míníme harmonický signál o frekvenci $k\Omega$, Ω je základní úhlová frekvence signálu.

Zdůrazněme nejdůležitější vlastnosti spekter periodických signálů. **Spektrum spojitého periodického signálu** je vždy diskrétní (čárové). **Spektrum reálného signálu** obsahuje kromě stejnosměrné složky c_0 komplexní harmonické složky v komplexně sdružených párech: $|c_k| = |c_{-k}|$, $\arg c_k = -\arg c_{-k}$. Je-li signál sudý (symetrický kolem nuly), je jeho spektrum reálné. Vypočteme integrál

$$I(x) = \int_{-b}^b \exp(\pm jxy) dy.$$

Pro $x = 0$ je

$$I(0) = 2b. \quad (7.6)$$

Pro případ $x \neq 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} I(x) &= \left[\frac{\exp(\pm jxy)}{\pm jx} \right]_{-b}^b = \frac{\exp(jxb) - \exp(-jxb)}{jx} = \\ &= \frac{2 \exp(jxb) - \exp(-jxb)}{2j} = 2b \frac{\sin bx}{bx}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Dílčí výsledky (7.6) a (7.7) lze společně zapsat vztahem

$$\int_{-b}^b \exp(\pm jxy) dy = 2b \sin c(bx).$$

Tím je odvození vzorce skončeno.

Poučky o spektrech mohou usnadnit výpočet koeficientů Fourierovy řady. Nám však jde spíše o to zjistit, jak se změny časového průběhu signálu projeví ve spektru signálu. Poučky zde uvedeme bez odvození, které ostatně není příliš obtížné. U všech signálů budeme předpokládat, že jsou periodické s periodou T_1 a že modelují signály s konečnou střední hodnotou výkonu.

Spektrum součtu signálů Nechť je signál $s(t)$ tvořen součtem signálů $s_a(t)$ a $s_b(t)$:

$$s(t) = s_a(t) + s_b(t).$$

Koeficienty Fourierovy řady signálů $s(t)$ označíme c_k , koeficienty signálu $s_a(t)$ označíme c_{ak} a koeficienty signálu $s_b(t)$ označíme c_{bk} . Pak pro všechna $k \in \mathbf{Z}$ platí:

$$c_k = c_{ak} + c_{bk}.$$

Spektrum signálu násobeného konstantou Nechť jsou koeficienty Fourierovy řady signálu $s(t)$ označeny c_k a nechť a je libovolná konstanta. Pak platí, že koeficienty Fourierovy řady signálu $as(t)$ jsou dány hodnotami výraz ac_k .

Spektrum signálu posunutého v čase Pro posunutý signál zavedeme označení

$$s_\tau(t) = s(t - \tau),$$

τ je reálná konstanta.

Nyní se budeme zabývat harmonickým signálem.

Harmonický signál je zvláštním případem periodického signálu, pro který platí

$$s(t) = s(t + iT_s), \quad \text{kde } T_s \text{ je perioda signálu, } i \dots \text{ celé.}$$

Spojité harmonický signál lze vyjádřit pomocí této spojité funkce:

$$s(t) = A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) = A_s \cos(2\pi f_s t + \varphi_s) = A_s \cos\left(2\pi \frac{1}{T_s}(t + iT_s) + \varphi_s\right).$$

Je jednoznačně určen třemi parametry: amplitudou A_s , úhlovou frekvencí ω_s [rad/s] a počáteční fází φ_s [rad]. Tento spojitý harmonický signál může být reprezentován ve frekvenční oblasti *frekvenčním amplitudovým spektrem* (spektrální čarou o velikosti A_s na frekvenci ω_s) a *fázovým frekvenčním spektrem* (čarou o velikosti φ_s na frekvenci ω_s). Aditivní směs harmonických signálů různých kmitočtů a počáteční fází pak může být poměrně přehledně reprezentována příslušnými spektrálními čarami. Jedná se o reprezentaci harmonických signálů tzv. *jednostrannými frekvenčními spektry*. Běžná je však reprezentace *frekvenčními spektry dvoustrannými*. Důvodem je „nepříjemná“ goniometrická funkce, se kterou se „špatně počítá“, protože se při analýze signálů i systémů objevuje uvnitř integrálu nebo sumy.

Z hlediska analýzy je vhodnější reprezentace harmonického signálu (po aplikaci Eulerova vzorce)

$$s(t) = A_s \frac{e^{j(\omega_s t + \varphi_s)} + e^{-j(\omega_s t + \varphi_s)}}{2} = \frac{A_s}{2} e^{j(\omega_s t + \varphi_s)} + \frac{A_s}{2} e^{-j(\omega_s t + \varphi_s)},$$

odkud vyplývá následující popis ve frekvenční oblasti: **frekvenční modulové spektrum** v podobě dvojice spektrálních čar o velikosti $A_s/2$ na frekvencích ω_s a $-\omega_s$ a **frekvenční argumentové spektrum** v podobě čar φ_s na frekvenci ω_s a $-\varphi_s$ na frekvenci $-\omega_s$. Ukázka dvoustranného spektra je na Obrázku 7.1. Reprezentaci harmonického signálu dvojicí komplexních (komplexně sdružených) signálů o kmitočtech ω_s a $-\omega_s$ je nutno chápat abstraktně, jako matematický model.

Spektrum harmonického signálu

$$s(t) = a \cos(\omega_s t + \varphi_s) = \frac{A}{2} e^{-j\omega_s t} e^{j\varphi_s} + \frac{A}{2} e^{j\omega_s t} e^{-j\varphi_s}$$

je součtem spekter jeho komplexních složek, protože Fourierova transformace je lineární.

Jak jsme již nahlédli velmi užitečným signálem pro teoretické úvahy je Diracova distribuce (označovaná také jako jednotkový impuls)

$$\delta(t) \rightarrow \infty \text{ pro } t = 0, \delta(t) = 0 \text{ pro } t \neq 0, \text{ přičemž } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Jedná se zřejmě o signál se spojitou proměnou, nikoli však v našem smyslu spojitý. Můžeme jej však interpretovat jako limitní případ spojitého signálu $d(t)$,

$$d(t) = h \text{ pro } t \in \langle 0, \frac{1}{h} \rangle, d(t) = 0 \text{ pro } t \notin \langle 0, \frac{1}{h} \rangle,$$

(který podmínku jednotkového integrálu splňuje), pro $h \rightarrow \infty$. Interpretace Diracova impulsu jako limitního případu uvedené funkce jej umožňuje chápat jako "kvazispojitý" signál a přesně s ním pracovat v dalších vztazích, např. definovat jako limitu jeho Fourierovu transformaci, která v obvyklém smyslu bezprostředně definovaná není.

Vlastnosti Diracovy distribuce jsou uvedeny v Kapitole 4.

Spektrum stejnosměrného signálu (konstanty) $s(t) = A$, pro $t \in (-\infty, \infty)$, zřejmě nebude obsahovat frekvenční složky o kmitočtech $\omega \neq 0$. Jeho přímý výpočet je ovšem problematický, neboť taková funkce $s(t)$ není absolutně integrovatelná. Zkusme jít na řešení z druhé strany, přes zpětnou transformaci Diracova impulsu

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}.$$

Odtud zřejmě

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi}\right\} = \delta(\omega)$$

a

$$\mathcal{F}\{A\} = \mathcal{F}\left\{A2\pi\frac{1}{2\pi}\right\} = 2\pi A\delta(\omega).$$

Spektrum stejnosměrného signálu $s(t) = A$ je Diracův impuls s mohutností $2\pi A$.

Jak již bylo uvedeno, **spektrum harmonického signálu**

$$s(t) = A \cos(\omega_s t + \varphi_s) = \frac{A}{2} e^{-j\varphi_s} e^{j\omega_s t} + \frac{A}{2} e^{j\varphi_s} e^{-j\omega_s t}$$

je součtem spekter jeho komplexních složek, protože je Fourierova transformace lineární (neboť vyhovuje principu superpozice). Také při výpočtu Fourierova obrazu komplexní složky harmonického signálu si pomůžeme zpětnou transformací Diracova impulsu, ale posunutého,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_s)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_s) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_s t} \Rightarrow \mathcal{F}\{e^{-j\omega_s t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_s), \end{aligned}$$

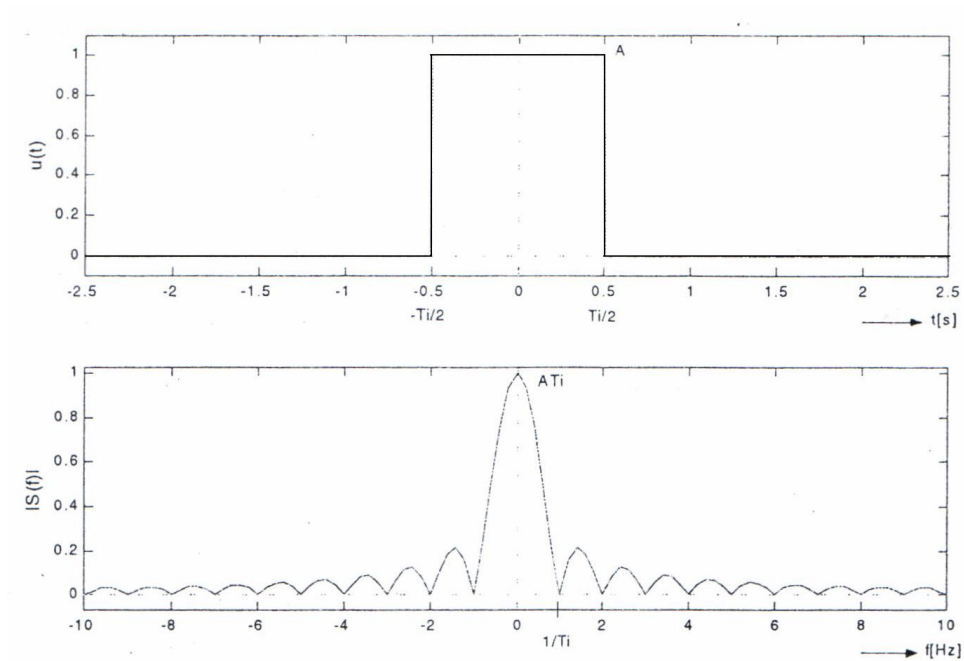
podobně

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega + \omega_s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_s) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_s t} \Rightarrow \mathcal{F}\{e^{j\omega_s t}\} = 2\pi\delta(\omega + \omega_s).$$

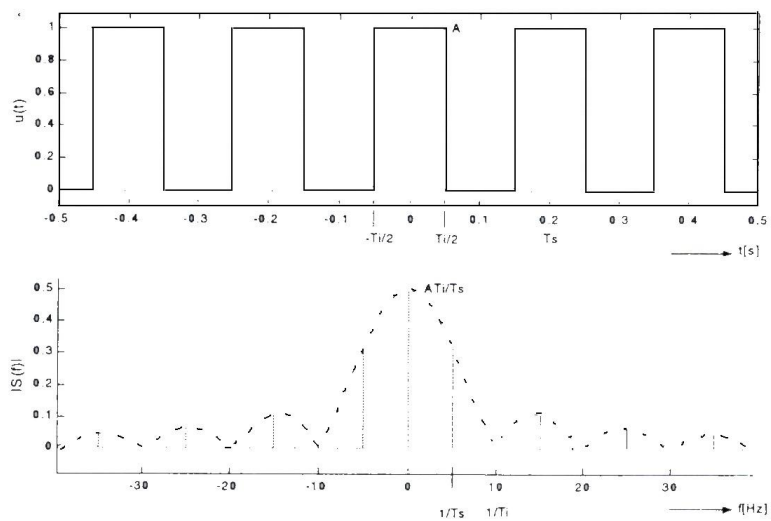
Výsledné spektrum harmonického signálu je

$$S(\omega) = \mathcal{F}\{A \cos(\omega_s t + \varphi_s)\} = 2\pi \frac{A}{2} \delta(\omega - \omega_s) e^{-j\varphi_s} + 2\pi \frac{A}{2} \delta(\omega + \omega_s) e^{j\varphi_s}.$$

Modulové spektrum je v podobě dvou symetrických Diracových impulsů na kmitočtech ω_s a $-\omega_s$ o mohutnostech πA , argumentové spektrum tvoří antisymetrické spektrální čáry φ_s na ω_s a $-\varphi_s$ na $-\omega_s$.



Obr. 7.1: Jednorázový obdélníkový signál (nahore) a jeho modulové spektrum (dole).



Obr. 7.2: Úsek 1speriodického signálu (nahore) a jeho modulové spektrum (dole)

Jak vyplývá z definice **spektrum Diracova impulsu** s ohledem na filtrační vlastnost Diracova impulsu

$$\mathcal{F}\{\delta(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{-j\omega t}d\omega = 1.$$

Ze spektra vyplývá zajímavost Diracova impulsu z hlediska analýzy vlastností lineárních systémů: v Diracově impulsu jsou totiž zastoupeny rovnoměrně všechny harmonické složky s nulovým fázovým posunem. Odezva lineárního systému, na Diracův impuls se nazývá **impulsní charakteristika** systému. Jestliže spektrum vstupu, kterým je jednotkový impuls, je konstanta, pak spektrum výstupu nás bude informovat o frekvenčních vlastnostech systému – jeho spektrem je **frekvenční charakteristika** lineárního systému, která nás informuje, s jakou korekcí amplitudy a fáze "propustil" systém tu kterou (ve vstupu obsaženou) harmonickou složku na výstup.

7.4.1 Diskrétní signály

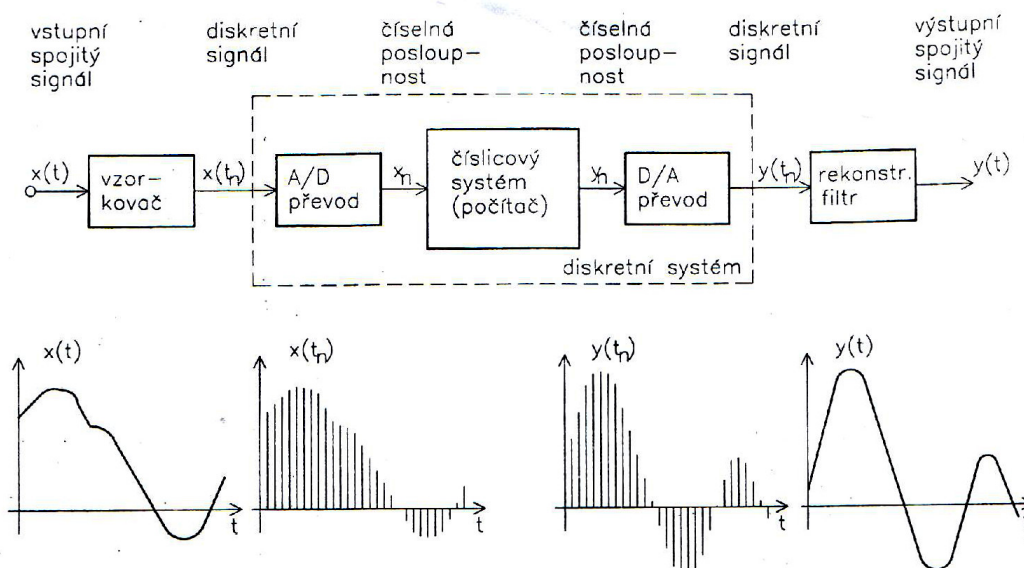
Spojitém (jednosměrným) signálem nazýváme (po částech) spojitou reálnou nebo komplexní funkci $f(x)$ jedné reálné proměnné x , kterou je nejčastěji čas, může jí však být i prostorová vzdálenost nebo jiná veličina. Vyznačení, že jde o jednorozměrný signál, budeme zpravidla vynechávat, neboť s nepatrnými výjimkami se budeme zabývat výhradně jednorozměrnými signály. Poznamenejme, že počet nezávislých proměnných není principiálně omezen; pak mluvíme o dvoj- nebo *vícerozměrných signálech* (např. obraz je jasový signál závislý na dvou prostorových souřadnicích). Signály spojitě v uvedeném smyslu se také označují jako analogové, neboť bývají reprezentovány průběhy fyzikálních ("analogových") veličin; v našem pojetí je ovšem fyzikální veličina, jež svými hodnotami signál vyjadřuje (např. elektrické napětí), bez významu.

Fyzikálně znamená nezávisle proměnná zpravidla čas, a proto se odpovídající signály někdy označují jako *signály se spojitým časem*; toto označení je ovšem zužující, na druhé straně však zahrnuje i funkce, které nejsou po částech spojitě. Pro srozumitelnost výkladu se v tomto úvodním kursu omezíme na funkce po částech spojitě a některé důležité signály, které tuto vlastnost nemají, budeme interpretovat jako jejich limitní případy.

Diskrétní signál je uspořádaná posloupnost hodnot $f_i = f(i)$, která je funkcí celočíselného indexu i . Z teoretického hlediska je lhostejné, jak posloupnost vznikla; nejčastěji jde o sérii hodnot nějakých postupných měření nebo vzorků signálu se spojitým časem; pak index odpovídá nějakým způsobem konkrétním hodnotám času a lze užít názvu *signál s diskretním časem*

Poznámka 7.6. Poznámka o vzorkování: Velmi často jde v případě diskretního signálu o hodnoty nějaké funkce $f(t)$ spojitě proměnné v čase, kterou vzorkujeme v časových okamžicích $t_i, i = 0, 1, \dots, n, \dots$, přičemž nejčastěji je vzorkování rovnoměrné, tedy s vzorkovací periodou T , takže $f_n = f(t_n) = f(nT)$. V tom případě hovoříme o vzorkovacím kmitočtu f_v nebo f_s resp. p odpovídajícím úhlovém vzorkovacím kmitočtu ω_v, ω_s . Je často užitečné vztahovat skutečný úhlový kmitočet ω složek signálu ke vzorkovacímu kmitočtu; příslušný bezrozměrný podíl v rozsahu $\langle 0, 2\pi \rangle$ se pak označuje jako *normovaný kmitočet*

Číslicový signál je signál diskretní, jehož hodnoty jsou vyjádřeny pomocí čísel z nějaké konečné číselné množiny (např. z množiny čísel $-32767 \dots +32767$ při šestnácti bitovém



Obr. 7.3: Řetězec číslicového zpracování analogového signálu

binárním vyjádření). Poznamenejme, že diskretizace nejen co do času, ale také co do hodnot je podstatou vlastností číslicových signálů, která v některých situacích významně ovlivňuje výsledky zpracování.

Poznámka 7.7. Poznámka o přesnosti vyjádření vzorků Je zřejmé, že číslicový signál může vyjádřit vzorky spojitého signálu obecně jen přibližně; odchylky mezi přesnými hodnotami vzorků a (nejbližšími) hodnotami, vyjádřenými čísly z dané množiny, tvořící posloupnost, nazývanou *kvantovací šum*. V současné době lze díky rozvoji číslicové techniky zpravidla již použít vyjádření čísel s tak vysokou přesností, aby kvantovací šum byl v dané aplikaci zanedbatelný; proto se problémy týkajícími se kvantového šumu nebudeme v tomto úvodním kursu zabývat. Hodnoty diskrétního signálu mohou ovšem být reprezentovány i jinak než čísly, např. šířkou nebo výškou impulzu elektrického napětí nebo velikostí elektrického náboje. V tom případě je (odhlédneme-li od kvantového charakteru elektřiny) množina hodnot spojitá, přesnost vzorků je však omezena jinými vlivy (např. termickým šumem) a za dnešního stavu techniky je zpravidla nižší než u číslicového vyjádření.

Diskrétní zpracování signálů lze charakterizovat jako přepočítání vstupní posloupnosti hodnot na posloupnost výstupní. Soustavy, které takový výpočet realizují, jsou dynamické diskrétní systémy; matematicky jsou popsány diferenčními rovnicemi, jejichž analýzou lze obdržet informace o vlastnostech soustavy vzhledem ke zpracování signálů. Výpočet může být realizován analogově (např. obvody se spínanými kapacitami) nebo (dnes převážně) číslicově pomocí vhodně programovatelného počítače.

Pokud zpracováváme diskrétní spojité signál $x(t)$ se záměrem získat opět spojité výstupní signál $y(t)$, je prvním článkem zpracování vzorkovač, který v zadaných časových okamžicích t_n , tvoří vstupní posloupnost diskrétního systému. Na základě diskrétní posloupnosti $y(n)$, kterou poskytuje diskrétní systém, je pak nutno vytvořit spojitou funkci $y(t)$ pomocí *rekonstrukčního interpolátoru* (viz Obrázek 7.3, v němž je diskrétní systém ohraničen čárkovaným rámečkem). Jak už bylo uvedeno, diskrétní systém může být realizován také číslicově; má-li akceptovat vstup tvořený vzorky analogového signálu, resp. poskytovat obdobný výstup, musí vlastnímu číslicovému systému předcházet *analogově-číslíkový (digitální) převodník* a následovat *převodník číslicově-analogový*.

8 Systémy

8.1 Zavedení pojmu a klasifikace

Slovo **system** je jedním z nejčastěji používaných pojmů ve všech odvětvích vědy. Používá se pro označení jevů abstraktních i konkrétních. Teorie systémů, která zaznamenala nebývalý rozvoj zejména v posledních padesáti letech, zkoumá objekty a jevy ve vzájemných souvislostech ať vnitřních či vnějších. Pro tento kurz jsou zejména podstatné dynamické vlastnosti systémů, čili jejich chování vzhledem k času. Podle toho se mění i vlastnosti signálu, který se podílí na vytváření příslušného systému. Různé typy systémů, o kterých zde budeme mluvit, se vyskytují jak ve sdělovací technice, tak v automatizaci i v pohonařské technice či energetice. Rozdíly jsou jistě v pásmu a rozsahu používaných frekvencí a v tom, zda jde spíše o signály periodické či jednorázové, spojité či diskrétní. Pochopit vzájemné souvislosti v celé jejich šíři je hlavním cílem této publikace a současně základním znakem tzv. **systemového** přístupu či řešení.

Pojem systém je skutečně používán v nejrůznějších souvislostech a proto existuje také celá řada různých definic. Uvedme některé z nich.

1. Systém je daná množina veličin uvažovaných na určité (dané) rozlišovací úrovni.
2. Systém je soubor variací daných veličin uvažovaných v čase.
3. Systém je daná množina stavů, spojených množinou přechodů mezi nimi.
4. **Systém tvoří množina prvků a množina vazeb mezi prvky navzájem i s okolím.**
5. **Systém je určitý časově neměnný vztah mezi okamžitými a nebo budoucími hodnotami daných veličin.**

Zejména dvě posledně uvedené definice jsou s ohledem na náš zájem o dynamické systémy důležité. Pro jasnější orientaci v celém spektru použití pojmu systém, bude účelné se zmínit o hlavních skupinách, do kterých se systémy dělí. Omezíme-li se převážně na technické systémy, jsou to zejména tato oddělení:

1) Podle typu veličin, definovaných na systému

- fyzikální systémy, jejichž veličiny jsou měřitelné, nebo alespoň reálně existují
- abstraktní systémy.

2) Podle počtu veličin systému

- ohraničené, na kterých je definován konečný počet veličin
- neohraničené s nekonečným počtem veličin.

3) **Vzhledem na vazby s okolím**

- uzavřené, které nemají žádné spojení s okolím
- otevřené, které jsou s okolím nějakým způsobem spojeny.

4) **Podle typu definovaných veličin v čase**

- spojité systémy, u kterých veličiny existují v každém okamžiku a mohou nabývat všech hodnot
- diskrétní (nespojité), přičemž nespojitost může být buď časová nebo amplitudová
- hybridní systémy, ve kterých se vyskytují veličiny obou typů.

5) **Podle typu signálů, působících na systém**

- deterministické, kdy signály i hodnoty všech parametrů systému jsou jednoznačně určeny
- stochastické, u kterých buď parametry nebo signály jsou určeny jen s určitou pravděpodobností.

6) **Podle přítomnosti setrvačnosti dělíme systémy na:**

- proporcionální, u kterých výstupní veličiny reagují na současné vstupní signály
- dynamické, u nichž ve výstupním signálu je vazba na minulé vstupy či stavy systému.

7) **Podle reakce na současné, minulé i budoucí signály**

- systémy **anticipativní**, které reagují i na budoucí signály (zřejmě nerealizovatelné systémy)
- **neanticipativní**, tj. takové, které vyjadřují reakce na současné a minulé budící signály.

8) **Podle časové závislosti vlastností systému rozlišujeme**

- časově neměnné systémy (t -invariantní)
- systémy, jejichž struktura nebo parametry se s časem mění.

9) **Podle funkčních závislostí mezi veličinami dělíme systémy na:**

- lineární, mezi všemi veličinami systému platí lineární vztahy
- nelineární, kde rovnice, popisující vzájemné vztahy jednotlivých veličin jsou nelineární.

Podrobněji se seznámíme s pojmem obecného časového systému v pojetí monografie [?]. Uvedeme nejprve základní pojmy jako jsou globální stavy a globální reakce systému.

Obecným systémem se nazývá relace na neprázdných abstraktních množinách, přesněji — podmnožina S jejich kartézského součinu $\times_{k \in K} V_k$, tj. $S \subset \times_{k \in K} V_k$, kde K je neprázdná množina indexů a V_k je neprázdná (abstraktní) množina pro každý index $k \in K$, která se

nazývá objektem systému. Je-li množina indexů K konečná, pak výše uvedenou inkluzi lze zapsat ve tvaru

$$S \subset V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n.$$

Nechť dvouprvková soustava množin $\{K_x, K_y\}$ je rozkladem indexové množiny K , což znamená, že $\emptyset \neq K_x \subset K$, $\emptyset \neq K_y \subset K$, $K_x \cap K_y = \emptyset$ a $K_x \cup K_y = K$. Množina $X = \prod_{k \in K_x} V_k$ se pak nazývá vstupním objektem a množina $Y = \prod_{k \in K_y} V_k$ se nazývá výstupním objektem systému (X, Y, S) , kde $S \subset X \times Y$ (tedy S je binární relace ze vstupního objektu do výstupního objektu — nazývaná relací přechodu případně přenosu, tedy také tranzitivní relací). Systém (X, Y, S) se také nazývá systémem typu „vstup – výstup“. Poznamenejme, že v případě, že $S: X \rightarrow Y$ je funkce tedy relace $S \subset X \times Y$, která kromě vlastnosti $\text{dom} S = X$ má také vlastnost $[x, y_1] \in S$, $[x, y_2] \in S$ ($x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$) implikuje $y_1 = y_2$, systém (X, Y, S) se nazývá funkcionální.

Následující definicí zavedeme pojem **globální reakce systému**.

Definice 8.1. Nechť (X, Y, S) je obecný systém „vstup – výstup“, C je libovolná neprázdná množina a $R: C \times X \rightarrow Y$ je funkce, pro kterou platí:

$$[x, y] \in S \text{ právě tehdy, když existuje prvek } c \in C \text{ s vlastností } R(c, x) = y.$$

Potom množina C se nazývá množinou nebo objektem globálních stavů daného systému (prvky množiny C se nazývají globálními stavy systému) a funkce R se nazývá globální reakcí systému (X, Y, S) .

Příklad 8.2. Rychlost rozpadu radia v každém časovém okamžiku je úměrná jeho množství. Odvoďme zákon rozpadu radia, jestliže jeho počáteční množství je $M_0 > 0$ a jestliže je známo, že po 1600 letech by zbyla jenom polovina tohoto množství.

Popíšeme stručně řešení zformulovaného problému:

Nechť $M(t)$ je množství radia v okamžiku $t > 0$; rychlost rozpadu tohoto prvku je rovna derivaci $\frac{dM(t)}{dt}$. Podle podmínky vyslovené v úloze platí

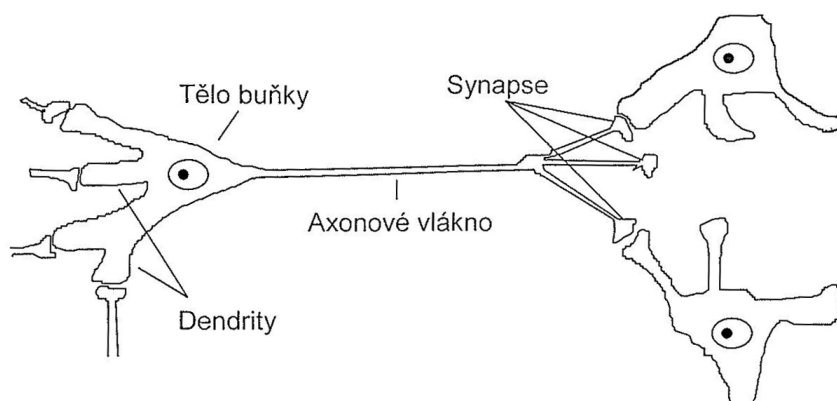
$$\frac{dM(t)}{dt} = kM(t),$$

kde k je součinitel úměrnosti a z charakteru úlohy vyplývá $t > 0$. Výše uvedená diferenciální rovnice je rovnicí se separovatelnými proměnnými, takže $\frac{dM(t)}{M(t)} = k dt$, odkud $\ln M(t) = kt + \ln c$, $c > 0$, takže jednoparametrický systém funkcí $M(t) = ce^{kt}$ je obecným řešením uvedené diferenciální rovnice. Z počátečních podmínek vyplývá

$$M_0 = M(0) = ce^0 = c$$

a dále $M(1600) = \frac{1}{2}M_0 = M_0e^{1600k}$, takže $k = \frac{-\ln 2}{1600}$ a

$$M(t) = M_0 2^{-\frac{t}{1600}}.$$



1. *Dendrity* reprezentují místo vstupu signálů do těla neuronu.
2. *Tělo buňky* sčítá signály dané okolními neurony. Takto stanovený vnitřní potenciál vede k excitaci (vybuzení) neuronu.
3. *Axonové vlákno* přenáší signál daný stupněm excitace k synapsím.
4. *Synapse* tvoří výstupní zařízení neuronů, které signál zesilují či zeslabují a předávají dalším neuronům.

Obr. 8.1: Náčrt biologického neuronu

Označíme-li nyní $X = \langle 0, \infty \rangle \subset \mathbb{R}$, $Y = \{M_0 2^{-\frac{t}{1600}}; t \in X\}$ pak $S = [t, M_0 2^{-\frac{t}{1600}}] \subset X \times Y$ je přechodová relace vstup–výstup. Za množinu C globálních stavů lze považovat soubor různých počátečních množství M_0 uvažovaného radia. Globální reakce systému (X, Y, S) (s výše uvedenými specifikacemi) je tvaru

$$R(M_0, t) = M_0 2^{-\frac{t}{1600}} .$$

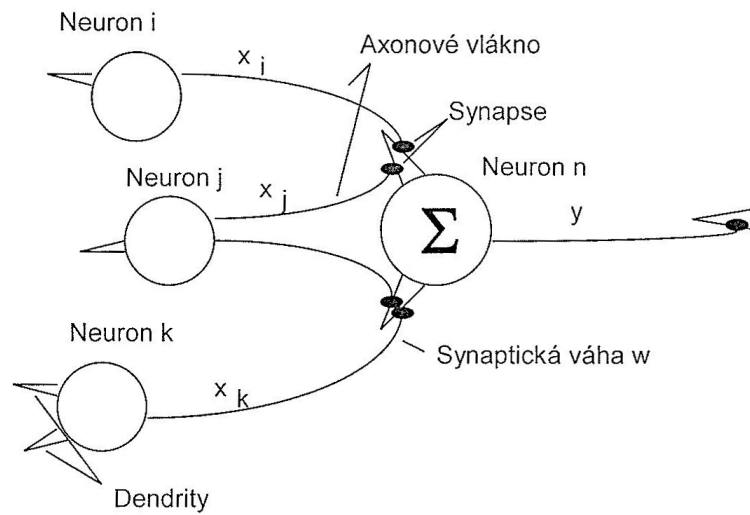
Příklad 8.3. Jako další příklady obecného systému vstup–výstup použijeme modely umělého neuronu a neuronové sítě. Připomeňme, že termínem neuronová síť, celým názvem umělá neuronová síť -ANN (Artificial Neural Network) se nazývá jeden z výpočetních systémů používaných v oblasti umělé inteligence, vytvořený na základě podobnosti se stejnojmenným (neuronová síť) biologickým systémem. Skládá se z umělých neuronů, nazývaných také formální neurony, které tvoří jakési základní „výpočetní“ jednotky, jejichž předobrazem je biologický neuron. Zjednodušeně lze biologický neuron znázornit a popsat dle Obrázku 8.1

Uvedený model pak lze vyjádřit schématicky na Obrázku 8.2.

Neurony mohou být konstruovány, nebo simulovány digitálním počítačem.

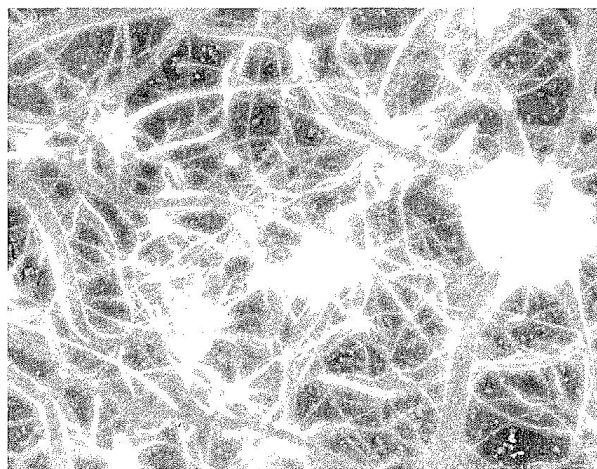
Na Obrázku 8.3 je znázornění biologické neuronové sítě:

Právě v lékařství slouží umělé neuronové sítě – jejichž schéma si níže přiblížíme na příkladu perceptronu - k prohlubování znalostí o fungování nervových soustav živých organismů. Dále se používají i pro rozpoznávání a kompresi obrazů nebo signálů, předvídaní vývoje časových řad (např. burzovních indexů), v komunikačních systémech a v řadě dalších oborů. Pracují s komplexními, často neúplnými soubory dat. Umělé neuronové sítě mohou být také „školeny“ na řešení konkrétních problémů. Jistou zajímavostí může být informace, že personální oddělení chicagské policie používá ANN k odhalení

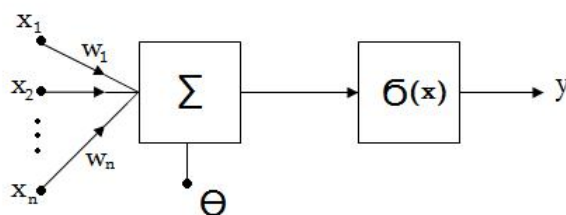


kde $x_{i,j,k}$ výstupní signál neuronů i,j,k
 $w_{i,j,k}$ synaptické váhy upravující výstupní signál neuronů i,j,k
 Σ výstupní excitační signál neuronů n
 y

Obr. 8.2: Schéma neuronu



Obr. 8.3: Biologická neuronová síť



Obr. 8.4: Umělý neuron

korupce mezi policejními úředníky. První umělou neuronovou síť vytvořil v roce 1958 psycholog Frank Rosenblatt (1928 – 1971), zatímco s prvním modelem umělého neutronu přišli neurofyzikolog Warren McCulloch (1899-1969) a logik Walter Pitts (1923-1969) již v roce 1943. V roce 2011 vyvinula firma IBM speciální kognitivní čip pro technickou realizaci neuronové sítě. V současné době existuje velmi rozsáhlá literatura v anglickém i v českém jazyce věnovaná výše zmíněné problematice – viz např. [?, 21].

Příklad 8.4. Je známa celá řada modelů neuronů, z nichž jeden z nejpoužívanějších je právě model předložený výše zmíněnými W. Mccllochem a W. Pittsem: Nechť $\varsigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce jedné proměnné, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ jsou n -rozměrné vektory. Akce neuronu je popsána funkční závislostí

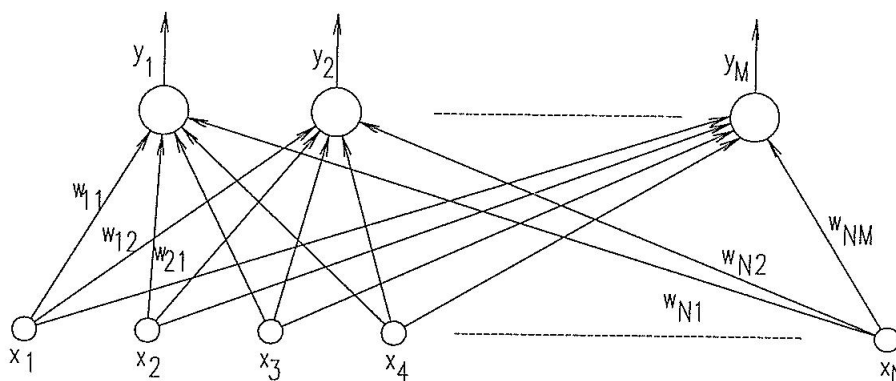
$$y = \varsigma\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + \Theta\right),$$

kde hodnoty $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ se nazývají vstupy neuronu, $w_i, i = 1, 2, \dots, n$ se nazývají synaptické váhy, hodnota Θ je práh a funkce ς se nazývá přenosová funkce neuronu nebo také aktivační funkce. Jako tyto přenosové funkce se nejčastěji používají funkce jednotkového skoku $\varsigma(x) = \mu(x)$, signální funkce $\varsigma(x) = (1 + e^{-kx})^{-1}$, přenosová funkce, radiální báze $\varsigma(x) = \exp(-kx^2)$, hyperbolický tangens a další funkce. Model umělého neutronu Mcclloche a Pittse na Obrázku 8.4.

Velikost vah w vyjadřuje uložení zkušeností do neuronu. Čím je vyšší jejich hodnota, tím je daný vstup významnější. Uvedený model neuronu tedy představuje funkcionální systém vstup-výstup (přechodová relace je funkce n -proměnných) se vstupním objektem R (n -rozměrný vektorový prostor) a s výstupním objektem R (což je množina všech reálných čísel). V diskrétním případě, tj. v případě modelování diskrétních procesů jsou vstupní a výstupní hodnoty zadány ve tvaru booleovských binárních kódů (zapsaných číslicemi 0,1).

Příklad 8.5. Konceptně nejjednodušší neuronovou sítí je jednovrstvý perceptron Obrázku 8.5.

Z uvedeného schématu Obrázku 8.5 je patrné, že jde o M paralelně pracujících neuronů, z nichž každý nezávisle realizuje transformaci vstupního vektoru $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$ podle svého vektoru vah $\vec{w}_k = (w_{1k}, \dots, w_{Nk}), k \in \{1, 2, \dots, M\}$ na výstupní hodnotu y_k , čímž



Obr. 8.5: Jednovrstvý perceptron

perceptron vytváří výstupní vektor $\vec{y} = (y_1, \dots, y_M)$ na základě funkčních vztahů

$$y_1 = \varsigma\left(\sum_{k=1}^N w_{k1}x_k + \Theta_1\right), \quad y_2 = \varsigma\left(\sum_{k=1}^N w_{k2}x_k + \Theta_2\right), \dots, \quad y_M = \varsigma\left(\sum_{k=1}^N w_{kM}x_k + \Theta_M\right).$$

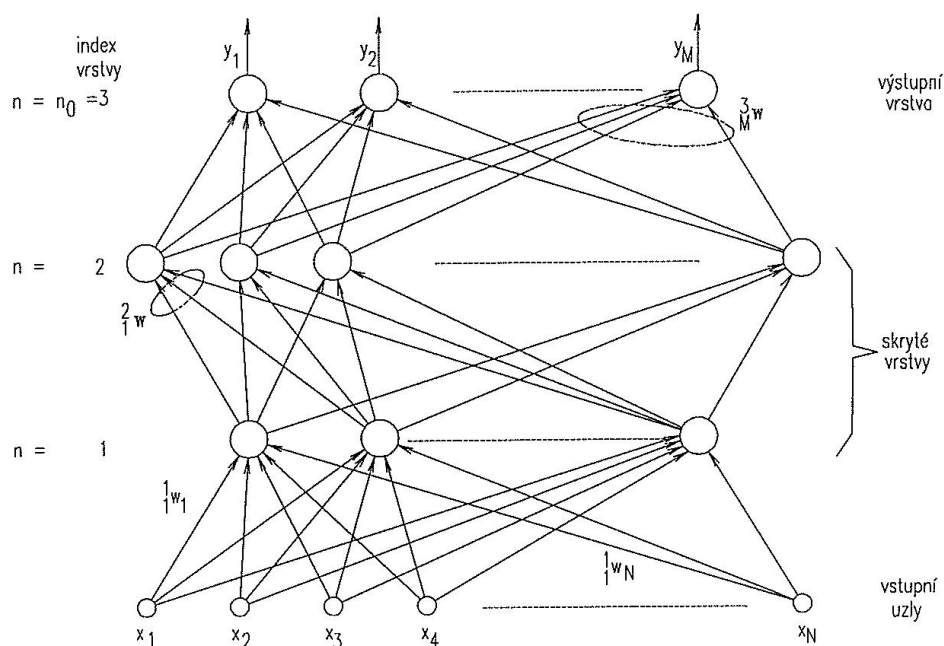
Poznamenejme, že z důvodů stručnosti a přehlednosti zápisu se ς_k obvykle označuje (a to i v zápise akce neuronu) jako x_a souřadnice s vahou $w_{0k} = 1$ a sčítací index probíhá množiny $\{0, 1, \dots, M\}$. Charakteristika ς je u neuronů daného perceptronu stejná. Je zřejmé, že popsaný perceptron lze interpretovat jako konkrétní obecný systém vstup–výstup $(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M, R)$, kde $\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M$ jsou vektorové prostory dimenze N, M v daném pořadí a binární relace R je zobrazení $R : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ dané matice vah

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \dots & w_{N1} \\ w_{12} & w_{22} & \dots & w_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{1M} & w_{2M} & \dots & w_{NM} \end{pmatrix}$$

vektorem prahových hodnot $(\Theta_1, \dots, \Theta_M) \in \mathbb{R}^M$ a charakteristika ς všech neuronů daného perceptronu.

Příklad 8.6. V uvedeném Obrázku 8.5 byl popsán jednovrstvý perceptron, který je zvláštním případem vícevrstvého perceptronu, jehož obecnou podobu zachycuje schéma Obrázku 8.6

Na Obrázku 8.6 je rozlišitelná nejvyšší – výstupní vrstva neuronů, pod ní – z vnějšku nepřístupné – tzv. skryté vrstvy a nejnižší rozpoznáme vrstvu N vstupních uzlů. Síť je obecně úplně propojená, tedy výstup kteréhokoli neuronu (s výjimkou vstupních) je spojen se vstupy všech neuronů následující vrstvy; tento předpoklad není na újmu obecnosti – případná neexistence spojů je vyjádřena nulovými vahami. Tato architektura, která se označuje jako dopředná síť, je v praxi nejpoužívanějším typem neuronové sítě. Název názorně vyplývá z faktu, že signály postupují v síti pouze jedním směrem – od



Obr. 8.6: Obecná dopředná neuronová síť

vstupní k výstupní vrstvě. Z uvedeného schématu je rovněž patrné, že se jedná o realizaci obecného funkcionálního systému vstup–výstup transformující vstupního objekt, kterým je (ve spojitém pojetí) N -dimenzionální vektorový prostor ve výstupní objekt, což je M -dimenzionální vektorový prostor.

Ukážeme, že ke každému obecnému systému (X, Y, S) přísluší globální relace $R: C \times X \rightarrow Y$, tedy, že ke každému obecnému systému (X, Y, S) existuje objekt C globálních stavů a funkce R s výše uvedenou vlastností: Označme F množinu všech zobrazení množiny X do množiny Y , tj.

$$F = Y^X = \{f; f: X \rightarrow Y\}.$$

Označme G podmnožinu množiny F tvořenou těmi funkcemi $f \in F$ jejichž grafy jsou částí relace S , tedy $f \subseteq S$, což znamená, že pro každou dvojici prvků $[x, y] \in X \times Y$ s vlastností $y = f(x)$, platí $[x, y] \in S$. Nechť C je indexová množina funkcí tvořících množinu G ; $G = \{f_c; c \in C\}$. (Formálně lze za množinu C vzít ku příkladu množinu $G \times \{0\}$.) Definujme nyní funkci $R: C \times X \rightarrow Y$ předpisem

$$R(c, x) = f_c(x), \quad [c, x] \in C \times X.$$

Nyní ukážeme, že platí

$$S = \{[x, y]; \exists c \in C : y = R(c, x)\},$$

neboť bude-li transitivní relace S systému (X, Y, S) tvořena přesně dvojicemi $[x, y] \in X \times Y$ s právě uvedenou vlastností, bude funkce R globální reakcí systému (X, Y, S) . Nechť tedy

$$S' = \{[x, y]; \exists c \in C : y = R(c, x)\}$$

a nechť $[x, y] \in S'$ je libovolná dvojice prvků v relaci S' . Pak $y = R(c, x) = f_c(x)$ pro vhodný prvek $c \in C$, odkud vyplývá, že $[x, y] \in S$, neboť $f_c \subseteq S$. Tím jsme obdrželi inkluzi $S' \subseteq S$. K ověření platnosti opačné inkluze uvažujme libovolnou dvojici $[x, y] \in S$. Jelikož $\text{dom } S = X$ a $x \in X$ je $S \neq \emptyset$. Vyberme některou funkci $f_c \in G$ a označme

$$\hat{f} = (f_c \setminus \{[x, f_c(x)]\}) \cup \{[x, y]\}.$$

Platí $\hat{f} \in F$ a $\hat{f} \subseteq S$. Proto existuje prvek $c' \in C$ s vlastností $\hat{f} = f_{c'}$, tedy $[x, y] \in S'$, takže $S \subseteq S'$. Tato inkluze s výše dokázanou opačnou inkluzí nám dává rovnost $S = S'$. Právě provedenou úvahou jsme dokázali tuto větu:

Věta 8.7. *Každý obecný systém $S = (X, Y, S)$ má globální reakci $R: C \times X \rightarrow Y$.*

Poznamenejme, že ve výše dokázané větě se na objekt globálních stavů C ani na globální reakci R nekladou žádné doplňující podmínky. Kdybychom požadovali, aby funkce R měla nějaké další speciální vlastnosti, může se stát, že funkci R nelze definovat na celém kartézském součinu $C \times X$, ale pouze na jisté podmnožině tohoto součinu — funkce R se tedy stává funkcí parciální z $C \times X$. Do podobné situace se dostáváme, když vstupní objekt X , výstupní objekt Y a objekt C globálních stavů opatřený nějakou strukturou, např. metrického nebo obecněji topologického prostoru, a po reakci R požadujeme určitý druh kompatibility (slučitelnosti) s danými strukturami (např. spojitost, uzavřenost, spojitost a další požadavky). Existence globální reakce je ekvivalentní s tzv. parametrizací systému nebo tranzitní relace „vstup — výstup“, což si ve skutečnosti přiblížíme:

Nechť (X, Y, S) je obecný systém „vstup — výstup“, C je objekt globálních stavů systému a $R: C \times X \rightarrow Y$ globální reakce systému. Jestliže ke každému stavu $c \in C$ definujeme funkci $f_c: X \rightarrow Y$ předpisem $f_c(x) = R(c, x)$, pak množina $\{f_c; c \in C\}$ je souborem funkcí s touto vlastností: Uspořádaná dvojice $[x, y] \in X \times Y$ patří do relace S (tj. $[x, y] \in S$) právě tehdy, když existuje stav $c \in C$ s vlastností $y = f_c(x)$. Tuto vlastnost lze vyjádřit ekvivalentní podmínkou $S = \bigcup_{c \in C} f_c$, kde symboly f_c funkcí na pravé

straně rovnosti chápeme současně jako označení jejich grafů, tj. $f_c = \{[x, y]; y = f_c(x)\}$ — z důvodu zjednodušení příslušného zápisu. Vyjádření tranzitní relace $S \subset X \times Y$ ve tvaru sjednocení grafů funkcí se nazývá funkcionální parametrizace relace S (nebo funkcionální parametrizace systému (X, Y, S)) a v případě obecné relace mezi abstraktními množinami existence funkcionální parametrizace pro každou trojici (X, Y, S) , $S \subseteq X \times Y$ (s neprázdnými uvažovanými objekty) vyjadřuje relační formu axiomu výběru.

K vysvětlení této poznámky si na tomto místě připomeňme základní formulaci axiomu výběru: Nechť φ je neprázdna soustava neprázdnych množin. (Použitý pojem „soustava množin“ nahrazuje méně vhodný termín „množina množin“.) Pak existuje množina M pro niž množina $M \cap X$ je přesně jednoprvková při každé množině $X \in \varphi$. Stručně formulována: Z každé množiny libovolné neprázdne soustavy neprázdnych množin lze vybrat po jednom prvku.

Ke klasifikaci systému ještě uvedme, že podle části objektivní reality, kterou zkoumáme, můžeme rozlišovat nejrůznější typy systémů, např. ekonomické, ekologické, politické, biologické, fyzikální, atd. Cílem tohoto textu není „všeobjímající“ obecná (abstraktní) teorie systémů, ale pouze vybrané kapitoly, které čtenáři umožní orientaci v problematice analýzy (v menší míře i syntézy) některých technických (elektrických, fyzikálních)

systémů. Uvedeme některá hlediska, podle kterých můžeme systémy třídit a současně vybereme typy systémů, o kterých se stručně zmíníme. Poznamenejme, že níže uvedené typy systémů jsou studovány ve speciální rozsáhlé literatuře.

1) Podle interakce systému s okolím rozlišujeme:

- (a) **uzavřený systém**, u kterých nedochází k interakci s okolím;
- (b) **otevřený**, u kterých k interakci s okolím dochází.

Nás budou dále zajímat otevřené systémy jednorozměrné, tj. s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou. Přitom se omezíme na případy vstupních a výstupních signálů, jejichž nezávisle proměnnou je čas.

2) Členění podle typu signálů v čase:

- (a) **Systémy se spojitým časem**, nazývané také jako *systémy se souvislým časem* nebo zjednodušeně *spojité systémy*) — jejich veličiny jsou signály se spojitým časem. Veličinami *analogových systémů* jsou analogové signály;
- (b) **Systémy s diskretním časem**, zjednodušeně *diskrétní systémy*) — jejich veličiny jsou signály s diskretním časem. Zvláštním případem jsou *číslicové systémy*, jejichž veličinami jsou číslicové signály;
- (c) **Hybridní systémy** — jejich některé veličiny jsou spojité, jiné diskrétní.

V dalším textu nás budou zajímat spojité (analogové) systémy.

3) Podle setrvačnosti (přítomnosti paměti) rozlišujeme:

- (a) **systémy nesetrvačné**, (*statické*) jsou systémy bez paměti, tj. bez setrvačných prvků — chovají se jako funkční měniče, jejich výstup v určitém okamžiku závisí pouze na hodnotě vstupu v daném okamžiku;
- (b) **systémy setrvačné**, (*dynamické*) jsou systémy s pamětí, obsahují setrvačné (paměťové) prvky. U takových systémů musíme počítat s přechodovými ději. Matematické modely setrvačných systémů jsou diferenciální rovnice (pro spojité systémy) nebo diferenční rovnice (pro diskretní systémy).

4) Podle časové stálosti vlastnosti systému rozlišujeme:

- (a) **časově proměnné systémy**, (též *nestacionární* či *variantní*), jejichž vlastnosti nebo struktura se s časem mění;
- (b) **časově neměnné systémy**, (též *stacionární* či *invariantní*) se stálou strukturou a vlastnostmi.

Matematickými modely setrvačných časově invariantních systémů jsou diferenciální (nebo diferenční) rovnice, jejichž konstanty jsou časově neměnné.

5) Členění systémů z hlediska kauzality:

- (a) **kauzální systémy**, (*neanticipativní*, bez předvídání) reagují jen na přítomné a minulé podněty (hodnoty vstupu). Reálné fyzikální systémy samozřejmě zachovávají princip kauzality, příčina nemůže přijít dříve než podnět;
- (b) **nekauzální systémy**, (*anticipativní*, s předvídáním) reagují i na budoucí podněty.

6) Členění systémů z hlediska platnosti superpozice je toto:

- (a) Lineární systémy, pro které platí princip superpozice vyjádřený rovností

$$H\left(\sum_i K_i s_i(t)\right) = \sum_i K_i H(s_i(t)),$$

kde H je operátor realizovaný systémem a $\{s_i(t)\}$ je množina signálů násobených konstantami K_i . Uvedený vztah lze slovně stručně formulovat tak, že odezva lineárního systému na součet příčin je rovna součtu odezev na jednotlivě samostatně působící příčiny. Vzhledem k platnosti principu superpozice lze lineární systémy poměrně snadno modelovat a analyzovat.

- (b) Nelineární systémy, což jsou všechny systémy, pro které princip superpozice neplatí. Dodejme, že každý typ konkrétního nelineárního systému vyžaduje specifický přístup.

Nyní zavedeme pojem systému v pojetí, s nímž se důsledně pracuje v monografii [2] a seznámíme se s některými jeho základními vlastnostmi. Z hlediska prvku intuitivního přístupu velmi obecně řečeno *system* rozumíme *soubor prvků mezi nimiž existují vzájemné vztahy a jako celek má určité vztahy ke svému okolí*.

Z toho, co již bylo uvedeno víme, každý systém je charakterizován dvěma základními vlastnostmi:

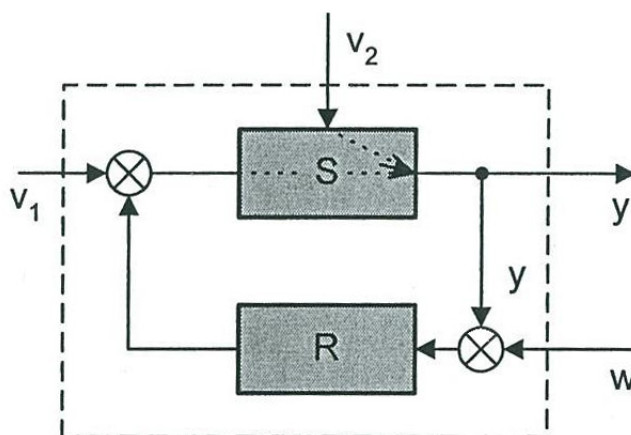
1. chování systému, charakterizujícím jeho vnější vztahy k okolí; chování systému je závislost mezi podněty okolí systému, působícími na jeho vstup, a příslušnými odezvami, objevujícími se na jeho výstupu;
2. strukturou systému, charakterizující jeho vnitřní funkční vztahy; strukturou systému rozumíme jednak způsob uspořádání (organizace) vzájemných vazeb mezi prvky systému a jednak chování těchto prvků.

Obě tyto vlastnosti systému jsou ve velmi úzkém vztahu, který lze charakterizovat jinak, že určitému chování odpovídá třída struktur, definovaná tímto chováním.

Pro ilustraci uvedeného uvažujeme, že objektem našeho zkoumání je spalovací turbína. Budeme-li vyšetřovat závislosti mezi její úhlovou rychlostí a množstvím dodávaného paliva, systémem budou rotační hmoty turbíny spolu s příslušnými momentovými účinky na hřídel. Budeme-li se ale zajímat o její účinnost na úhlové rychlosti, systémem bude spalovací prostor a palivo.

Jako další příklad systému uvedme krokový motor z Obrázku 8.7, což je synchronní točivý stroj, většinou napájený impulzy stejnosměrného proudu. Magnetické pole je generováno postupným napájením jednotlivých pólových dvojic. Pohyb rotoru (což je váleček buď magneticky měkkého, nebo tvrdého materiálu) krokového motoru je při nízkých rychlostech nespojitý, rotor se pohybuje mezi stabilními polohami vždy v určitém úhlu – hovoříme o pohybu v krocích. Ovládání motoru je zajišťováno tzv. ovladačem krokového motoru, což je speciální elektronický obvod generující impulzy v určitém sledu a délce. tyto impulzy následně přes výkonovou část budí v přesném pořadí jednotlivá vinutí rotoru. Zde za systém (přesněji univerzum systému) považujeme stator motoru (skládá se z několika dvojic cívek – obvykle čtyři dvojice – které mohou být různě zapojeny) a rotor. Frekvenci, pořadí a délku impulzů řídicího obvodu lze interpretovat jako vstupní veličiny, zatímco počet smysl otáček rotoru a točivý moment představují výstupní data.

Regulační obvod na Obrázku 8.7 je systém, jehož prvky jsou jeho jednotlivé členy (S – regulovaná soustava, R – regulátor), podněty vnějšího prostředí tvoří vzruchy (v_1, v_2) a řídicí veličina w a její odezvou je regulovaná veličina y , měřitelná na výstupu.



Obr. 8.7: Regulační obvod jako systém

Matematický model je systém, jehož prvky jsou příslušné početní operace, např. u rovnice

$$\frac{dy(t)}{dt} + z(t) = 2u_1(t) + \int_{t_0}^t u_2(s)ds$$

jsou jimi prvek pro násobení dvěma, prvek pro integrování, prvek pro derivování a prvek pro součet. Funkce u_1 a u_2 jsou vstupními veličinami, výstupní veličinou je závisle proměnná y , (funkce $y(t)$). Podaří-li se nám definovat (vyčlenit) na zvoleném objektu jeho části a vztahy mezi nimi, pak jsme definovali na daném objektu systém (Obrázek 8.7). Uvažované části objektu nazýváme *prvky* a vzájemné působení mezi těmito částmi – *vazbami*. Je zřejmé, že při definování systému dochází obvykle ke zjednodušení, tzv. *redukci*, která spočívá v *eliminaci* nebo *agregaci*. Při eliminaci neuvažujeme některé prvky nebo vztahy, při agregaci některé prvky nebo vazby slučujeme. Každý definovaný systém může být prvkem systému vyššího řádu – *nadsystému* (*supersystému*). Právě tak každý prvek systému může být systémem nižšího řádu – (*podstým*). Tyto vlastnosti souvisejí s *rozlišovací úrovní*.

Snížení rozlišovací úrovně dosáhneme spojením prvků do systémů. Tento proces nazýváme *integrací*. Za systém s nejnižší rozlišovací úrovní považujeme takový, u kterého nerozlišujeme žádné prvky tj. zkoumáme ho jako celek. Zvýšení rozlišovací úrovně dosáhneme rozkladem systému na jednodušší prvky. Tento proces nazýváme *diferenciací*. Systém s nejvyšší rozlišovací úrovní je takový, který je rozložen ne nejjednodušší, dále již z funkčního hlediska nerozložitelné prvky, u kterého lze poznat všechny jeho vnitřní vazby.

Systémem v pojetí monografie [2] rozumíme množinu $S = \{A, W, K, Q\}$,

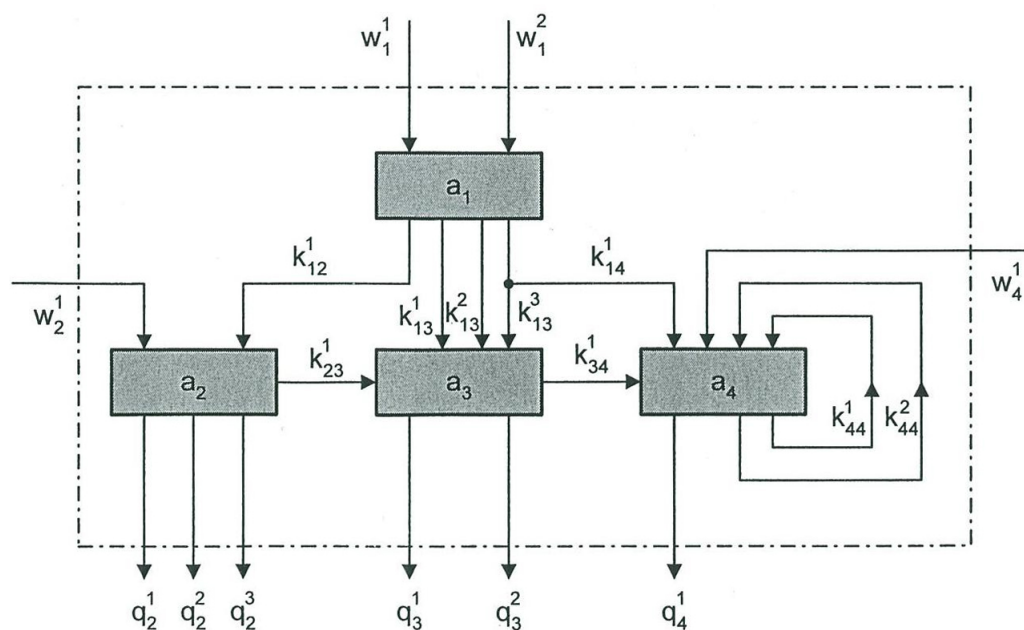
A – množina prvků $a_i (i = 1, 2, \dots, p)$ systému S , tj. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$

W – množina vstupních veličin w_j , $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$,

Q – množina výstupních veličin q_n , $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ a

K – množina vazebních závislostí k_{sr} výstupních a vstupních veličin prvků systému.

Indexem s je značen výstupní prvek a indexem r vstupní prvek vazební závislosti.



Obr. 8.8: Model systému

Jestliže množiny W i Q jsou prázdnými množinami, tj., všechny prvky $w_j = 0$, $q_h = 0$ (všechny vstupní a výstupní veličiny jsou rovny nule), jde o absolutně uzavřený systém. V ostatních případech jde o relativně uzavřený systém, což vyjadřuje, že systém jako celek komunikuje se svým okolím prostřednictvím vstupů a výstupů. příklad obecného vyjádření systému s prvky systému, vstupními a výstupními veličinami i vazebními závislostmi mezi prvky systému je znázorněn na Obrázku 8.8.

Množina A je nazývána jako universum. Soubor množin W, K, Q nazýváme charakteristikou systému.

8.2 Matematický model systému se spojitým časem

Mnohé pojmy teorie systémů lze definovat na základě koncepce obecného systému, přesto v konkrétních aplikacích je zapotřebí uvažovat vstupní a výstupní objekty opatřené některou speciálnější strukturou např. strukturou vektorového prostoru. Následně pak přechodová relace systému by měla být kompatibilnější s těmito strukturovanými objekty. Tak přicházíme k pojetí (abstraktního) úplného lineárního systému. Konkrétně, nechť \mathbb{C} je těleso komplexních čísel $X = U$, $Y = V$ vektorové prostory nad \mathbb{C} a $S \subseteq U \times V$ neprázdňá binární relace mezi prostory U, V . Zde $U \times V$ označuje přímý součin vektorových prostorů U, V , tedy opět množinu uspořádaných dvojic vektorů $[\vec{u}, \vec{v}]$, $[\vec{u} \in U]$, $[\vec{v} \in V$ na níž je definována operace sčítání a násobení skaláry $\alpha \in \mathbb{C}$ předpisem

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}] + [\vec{u}', \vec{v}'] &= [\vec{u} + \vec{u}', \vec{v} + \vec{v}'], \\ \alpha[\vec{u}, \vec{v}] &= [\alpha\vec{u}, \alpha\vec{v}] \end{aligned}$$

pro každé dvě dvojice $[\vec{u}, \vec{v}], [\vec{u}', \vec{v}'] \in U \times V$. Snadno se ověří, že množina $U \times V$ s takto definovaným sčítáním a násobením skaláry splňuje axiomy vektorového prostoru s nulovým vektorem $[\vec{o}_u, \vec{o}_v] \in U \times V$, kde \vec{o}_u, \vec{o}_v jsou nulové vektory prostorů U, V (v daném pořadí).

Nyní uvedeme definici lineárního systému:

Definice 8.8. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem komplexních čísel \mathbb{C} a $S \subseteq U \times V$ neprázdná binární relace s těmito vlastnostmi:

1. Pro každé dvojice vektorů $[\vec{u}, \vec{v}] \in S, [\vec{u}', \vec{v}'] \in S$ platí $[\vec{u}, \vec{v}] + [\vec{u}', \vec{v}'] = [\vec{u} + \vec{u}', \vec{v} + \vec{v}'] \in S$,
 2. pro každou dvojici $[\vec{u}, \vec{v}] \in S$ a každé komplexní číslo $y \in \mathbb{C}$ platí $z[\vec{u}, \vec{v}] = [y\vec{u}, z\vec{v}] \in S$.
- Obecný systém (U, V, S) se nazývá úplný lineární systém.

Následující věta hraje fundamentální úlohu v teorii lineárních systémů. Uvedeme ji bez důkazu (důkaz je obsažen např. v monografii [?], kap. II, § 1 a využívá některé speciální matematické prostředky jako je Zornovo lemma).

Věta 8.9. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem komplexních čísel \mathbb{C} a $S \subseteq U \times V$ je neprázdná relace. Systém (U, V, S) je lineární právě tehdy, když existuje globální reakce $R: C \times U \rightarrow V$ s těmito vlastnostmi:

1. Objekt C je vektorový prostor nad \mathbb{C} ,
2. existuje dvojice lineárních zobrazení (tedy homomorfismů vektorových prostorů) $R_1: C \rightarrow V, R_2: U \rightarrow V$ takových, že pro každou dvojici $[\vec{c}, \vec{u}] \in C \times U$ platí

$$R(\vec{c}, \vec{u}) = R_1(\vec{c}) + R_2(\vec{u}).$$

Poznamenejme, že globální reakce $R: C \times U \rightarrow V$ z výše uvedené věty se obvykle nazývá lineární globální reakcí, prostor C se nazývá lineárním objektem globálních stavů a funkce $R_1: C \rightarrow V, R_2: U \rightarrow V$ (pro které platí $R(\vec{c}, \vec{u}) = R_1(\vec{c}) + R_2(\vec{u})$) se nazývají globální reakcí na stavy, globální reakcí na vstupy (v daném pořadí).

Příklady lineárních systémů vytvářejí některé časové (diskrétní i kontinuální) systémy. Za účelem definice obecného časového systému, jehož vstupní a výstupní objekty jsou tvořeny vstupními a výstupními signály zavedeme pojem časové stupnice.

Připomeňme, že lineárně uspořádanou množinou nebo-li řetězcem rozumíme neprázdnou množinu M , na níž je definována binární relace \leq ($\leq \subseteq M \times M$) s těmito vlastnostmi. Relace \leq je reflexivní ($x \leq x$ pro každý prvek $x \in M$), antisymetrická ($x, y \in M, x \leq y, y \leq x$ implikuje $x = y$), transitivní ($x, y, z \in M, x \leq y, y \leq z$ implikuje $x \leq z$) a úplná (pro libovolnou dvojici prvků $x, y \in M$ buďto $x \leq y$ nebo $y < x$). Zde $y < x$ znamená $y \leq x$ a $y \neq x$. Prvek $x_0 \in M$ se nazývá nejmenší prvek uspořádané množiny (M, \leq) , jestliže platí $x_0 \leq x$ pro každý prvek $x \in M$. Dále, intervalem I v uspořádané množině (M, \leq) se rozumí každá její, alespoň dvouprvková, podmnožina I s touto vlastností:

Pro každou dvojici prvků $x, y \in I$, pro níž $x < y$ a pro každý prvek $z \in M$ takový, že $x \leq z \leq y$, platí $z \in I$. Je zřejmé, že toto zavedení pojmu interval zobecňuje (a tedy zahrnuje) všechny speciální případy intervalů v kurzu základů matematické analýzy v I. semestru v předmětu BMAI. Nyní časovou množinou — nebo lépe — časovou stupnicí T (v obecném pojetí) nazýváme každou lineárně uspořádanou množinou s nejmenším

prvkem $t_0 \in T$. V uvažovaných případech tento pojem poněkud zúžíme a budeme za časovou stupnici považovat interval T buďto v řetězci \mathbb{R}_0^+ všech nezáporných reálných čísel (kontinuální časová stupnice) s nejmenším prvkem $t_0 \geq 0$ nebo v řetězci \mathbb{N}_0 všech nezáporných celých čísel (diskrétní časová stupnice) s nejmenším prvkem $t_0 \geq 0$ v (\mathbb{N}_0, \leq) . Zde \mathbb{N}_0 označuje množinu všech přirozených čísel rozšířenou o číslo 0 — tuto množinu — rovněž jako množinu reálných čísel uvažujeme s přirozeným uspořádáním čísel.

Nyní přistoupíme k definici obecného časového systému.

Definice 8.10. Nechť A, B jsou libovolné (neprázdné) množiny, T je časová stupnice a A^T, B^T jsou množinu všech zobrazení časové stupnice T do A a do B nazývané množinami signálů. Nechť $X \subseteq A^T, Y \subseteq B^T$. Pak systém (X, Y, S) , kde $S \subseteq X \times Y$ je transitní relace, se nazývá obecný časový systém s abecedou vstupů A , abecedou výstupů B . Množina X se nazývá časovým objektem vstupních signálů $x: T \rightarrow A$, množina Y se nazývá časovým objektem výstupních signálů $y: T \rightarrow B$.

Příklad 8.11. Přejížděcí relace vstup – výstup může být zadána diferenciální rovnicí vstup – výstup tvaru $\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$, kde $t \in T = (-\infty, \infty)$ a funkce u patří do množiny spojitých časových funkcí definovaných na intervalu $T = (-\infty, \infty)$. V tomto případě přechodová relace vstup – výstup $r\langle t_0, t_1 \rangle$ tvořená dvojicemi vstup – výstup, kde uvažované funkce jsou restringovány na interval $\langle t_0, t_1 \rangle$ je tvořena dvojicemi časových funkcí tvaru $[u(t), \alpha + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau]$, $t_0 \leq t \leq t_1$, kde α je libovolná reálná konstanta. Konkrétními dvojicemi mohou být dvojice $[1, t]$, $[1, 1+t]$, $[t, \frac{t^2}{2} + 1]$, $t_0 \leq t \leq t_1$ a další. Jestliže v uvedeném příkladě rovnici vstup výstup zaměníme na rovnici

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t), \quad (8.1)$$

pak dvojice vstup – výstup tvořící přechodovou relaci daného systému jsou tvaru

$$[u(t), \alpha e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau], \quad (8.2)$$

$t_0 \leq t \leq t_1$, kde časová funkce u náleží do množiny časových funkcí, pro které integrál $\int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau$ je definován pro všechny hodnoty proměnné $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ a α je libovolné reálné číslo. Poznamenejme, že každému vstupu $u(t)$, $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ je přiřazena množina výstupů $y(t)$, $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$, které jsou druhými složkami dvojic (8.2), tedy řešeními diferenciální rovnice (8.1) s konstantou α , která má úlohu parametru.

Nyní přistoupíme k vnějšímu popisu.

Vnější popis používá pro vyjádření dynamických vlastností systémů vztahy mezi výstupními a vstupními veličinami. Systém zde chápeme jako tzv. černou skříňku, kterou lze zkoumat pouze pomocí reakcí výstupů na vstupní signály. Pro tuto analýzu není podstatné, jaké děje probíhají uvnitř systému, a podstatná není ani fyzikální realizace systému. Tento přístup je proto výhodný z hlediska analogie mezi systémy z různých oblastí,

neboť umožňuje sledovat chování zkoumaného systému na analogickém modelu, na kterém lze vstupy i výstupy snadno měřit. Metody analýzy a syntézy systémů, založené na vnějším popisu, byly podrobně rozpracovány a hojně používány až do šedesátých let tohoto století a jsou někdy označovány za klasické. Různé formy vnějšího popisu dynamických vlastností systému spolu těsně souvisejí. V této kapitole popíšeme nejužívanější formy a ukážeme též vazby mezi nimi. Vztah k vnitřnímu — stavovému — popisu probereme dále.

Vztah mezi vstupy a výstupy systému můžeme vyjádřit analyticky, pomocí časových odezev na předem definované tvary vstupních signálů nebo frekvenčními vlastnostmi. Pro jednoduchost budeme jednotlivé způsoby demonstrovat na systému s jedním vstupem a jedním výstupem. Popis vícerozměrných systémů ukážeme později. Vstup systému označíme $u(t)$ a výstup $y(t)$. Dynamické vlastnosti lze popsat některým z následujících sedmi způsobů:

1. diferenciální rovnicí,
2. operátorovým přenosem (obvykle v Laplaceově transformaci),
3. frekvenčním přenosem,
4. frekvenční charakteristikou,
5. impulsní charakteristikou (časová odezva na Diracův impuls),
6. přechodovou charakteristikou (odezva na jednotkový skok vstupu),
7. rozložením nul a pólů přenosu.

Uvedme příklad elektromechanického systému.

Příklad tohoto systému může být stejnosměrný motorek, např. takový, jaký se používá v hračkách. Stator motorku je tvořen permanentním magnetem, v jehož magnetickém poli se otáčí rotor. Rotor je tvořen vinutím o odporu R [Ω] (indukčnost vinutí prozatím zanedbejme), do kterého je proud $i(t)$ přiváděn přes kartáče. Za vstup do systému budeme považovat napětí $u(t)$ [V] a výstup budou otáčky hřídele $\omega(t)$ [rad/sec]. Označme J [$\text{k}\cdot\text{m}^2$] moment setrvačnosti rotoru a M_z [N.m] zatěžovací moment na hřídeli motoru. Pohybem rotoru v magnetickém poli v něm vzniká indukované elektromotorické napětí, které je úměrné otáčkám motoru, tj. $u_e(t) = k_e \cdot \omega(t)$, kde konstanta k_e [V.sec/rad] je dána konstrukcí motoru. Pro elektrickou část systému platí tedy rovnice:

$$u(t) = R \cdot i(t) + k_e \cdot \omega(t).$$

Motor na své hřídeli vyvozuje moment M_m [N.m], který je úměrný proudu, který prochází rotorem, tj. $M_m = k_m \cdot i(t)$. Konstanta k_m [N.m/A] je opět dána konstrukcí motoru. Na hřídeli dále působí moment setrvačných sil, který je úměrný zrychlení, tj. $J \cdot d\omega(t)$ a dále moment zatěžovací M_z . Pro hřídel platí rovnováha momentů, tj.:

$$k_m \cdot i(t) = J \cdot \frac{d\omega}{dt} + M_z.$$

Budeme-li předpokládat, že motor není zatížen ($M_z = 0$) a že na počátku děje je rotor v klidu ($\omega(0) = 0$), potom dosazením za proud $i(t)$ do této rovnice z rovnice předchozí obdržíme diferenciální rovnici

$$\frac{J \cdot R}{k_m} \cdot \frac{d\omega}{dt} + k_e \cdot \omega(t) = u(t)$$

s počáteční podmínkou $\omega(0) = 0$. Uvažovaný elektromechanický systém obsahuje jeden akumulátor energie (kinetická energie rotoru) a počáteční podmínka definuje stav tohoto akumulátoru na počátku děje. A mohli bychom najít celou řadu dalších příkladů z různých fyzikálních oblastí.

V našich úvahách o elektromotoru jsme zanedbali indukčnost vinutí rotoru L [H]. Vezměme ji nyní v úvahu. Pro elektrickou a mechanickou část systému platí nyní rovnice

$$u(t) = R \cdot i(t) + k_e \cdot \omega(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$k_m \cdot i(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + M_z.$$

Za předpokladu nulového zatěžovacího momentu a vyloučením proudu $i(t)$ z těchto rovnic obdržíme jednu lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{J \cdot L}{k_m} \cdot \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{J \cdot R}{k_m} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + k_e \cdot \omega(t) = u(t),$$

s počátečními podmínkami $\omega(0)$ a $\omega^{(1)}(0)$. První počáteční podmínka představuje počáteční otáčky, tj. počáteční kinetickou energii rotujících hmot. Druhá počáteční podmínka určuje počáteční proud rotorovým vinutím, tj. počáteční magnetickou energii v indukčnosti vinutí rotoru, neboť z druhé diferenciální rovnice vyplývá ($M_z = 0$):

$$i(0) = \frac{J}{k_m} \cdot \omega^{(1)}(0).$$

Lze učinit následující závěry:

1. Uvedené příklady obsahují dva akumulátory energie a chování systému je popsáno formálně stejnou diferenciální rovnicí tvaru:

$$a_2 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t),$$

kde $u(t)$ je vstup systému a $y(t)$ je jeho výstup. **Řád spojitého systému**, tj. řád diferenciální rovnice je určen počtem akumulátorů energie v systému.

2. Počáteční podmínky příslušné k diferenciální rovnici definují počáteční stavy těchto akumulátorů.

3. Výše uvedený způsob popisu chování spojitého dynamického systému, kdy je pro pozorovatele přístupný pouze vstup a výstup systému se nazývá **vnější popis** systému.

Lineární, hladký, stacionární a spojitý systém se vstupem $u(t)$ a výstupem $y(t)$ popisuje lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (8.3)$$

kde a_i, b_i jsou reálné konstantní koeficienty.

Rovnici (8.3) můžeme napsat ve tvaru

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t). \quad (8.4)$$

Lze ukázat, že prakticky nelze realizovat takové systémy, jejichž výstupní signál by byl přesně úměrný derivaci vstupního signálu. Totéž platí tím spíše pro vyšší derivace. Proto v rovnicích (8.3) a (8.4) musí vždy platit

$$m \leq n.$$

Chceme-li popisující diferenciální rovnici řešit na časovém intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$, musíme znát průběh vstupního signálu $u(t)$ v tomto časovém intervalu a počáteční podmínky $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$. Plnou informaci o systému v každém okamžiku dává soubor n hodnot. Číslo n udává řád (dimenzi) systému.

U některých praktických realizací systémů dochází k časovému posunutí signálu bez změny jeho tvaru. Říkáme, že systém obsahuje **dopravní zpoždění**. V technologických procesech se tento jev vyskytuje tam, kde jsou dopravníkové pásy, linky kontinuální výroby (folie, plechy, dráty, vývalky). Dopravním zpožděním též aproximujeme šíření signálu v rozlehlých soustavách s rozloženými parametry (např. dlouhá vedení, průtok media dlouhým potrubím apod.). Posunutí na časové ose vyjadřuje vztah

$$y(t) = u(t - T_d). \quad (8.5)$$

Pokud kromě posunutí dojde i ke změně tvaru procházejícího signálu, znamená to, že systém obsahuje ještě další dynamické členy, a popisující diferenciální rovnice má pak tvar

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t - T_d). \quad (8.6)$$

Řád systému určuje nejen číslo n , ale též přítomnost dynamického zpoždění. Jak bude ukázáno dále, vlastností systému s dopravním zpožděním lze vyjádřit diferenciální rovnicí o nekonečném počtu členů, čili nejde už o systém konečného řádu. Proto můžeme, jak už bylo řečeno, nahrazovat dopravním zpožděním systémy s rozloženými parametry. V případě systémů s popisující rovnicí ve tvaru (8.6) říkáme, že jde o systém n -tého řádu s dopravním zpožděním.

8.3 Lineární systém se spojitým časem

Definice 8.12. **Setrvačný (dynamický) systém** je systém, jehož okamžitá hodnota výstupu závislé jednak na okamžité hodnotě vstupu, jednak na okamžité hodnotě vstupu, jednak na minulé historii systému. Takový systém obsahuje nejméně jeden paměťový prvek, který má schopnost akumulovat energii. Systém bez paměťového prvku je **systém nesetrvačný (statický)**.

Na systém můžeme pohlížet jako na "černou skříňku", která je s okolím svázána jedním nebo více vstupy a jedním nebo více výstupy. Uvažme jeden vstup $x(t)$ a jeden výstup $y(t)$. Takový systém může být obecně popsán pomocí **vstupně–výstupního operátoru** H , který realizuje zobrazení.

$$H : x(t) \longrightarrow z(t) \text{ resp. } y(t) = H\{x(t)\}. \quad (8.7)$$

U setrvačného systému pro celou část vstupu, tj. pro interval $(0, t)$, pokud se má jednat o odezvu systému vycházejícího z nulového počátečního stavu. Reálnější je ovšem interval $\langle t_0, t \rangle$, resp. $\langle 0, t \rangle$, kdy musíme respektovat **počáteční stav systému** v okamžiku $t = t_0$ resp. $0 = T$. paměťové prvky systém jsou vedle vstupů také zdrojem pohybu systému. Díky platnosti principu superpozice však můžeme vliv každého ze zdrojů pohybu vyšetřovat zvlášť a pak je sečíst.

Abychom byli schopni vytvořit matematický model setrvačného systému v podobě diferenciální rovnice, musíme znát vedle (fyzikální) podstaty problému i modely jednotlivých setrvačných (paměťových) prvků, které jsou do systému zahrnuty. Jako příklad uvedeme matematické modely dvou paměťových prvků elektrických systémů.

Příklad 8.13. Matematický model **kapacitoru** může být reprezentován vztahy

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \text{ resp. } Q(t) = Q(t_0) + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau,$$

nebo

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}, \text{ resp. } u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau. \quad (8.8)$$

kde: i ... elektrický proud, Q ... elektrický náboj, u ... elektrické napětí, C ... kapacita.

Příklad 8.14. Matematický příklad **induktoru** může být reprezentován vztahy

$$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}, \text{ resp. } \psi(t) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau, \quad (8.9)$$

nebo

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \text{ resp. } i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau.$$

kde: u ... elektrické napětí, ψ ... magnetický tok, i ... elektrický proud, L ... indukčnost.

V zásadě rozlišujeme dva typy popisu lineárního systému:

- 1) **vnější popis**, nazývaný též popisem *vstupně–výstupním*, který je obecně vyjádřen operátorem H v rovnici (8.7). Konkrétněji může tento operátor představovat lineární *diferenciální rovnici* n -tého řádu nebo konvoluci impulsní charakteristiky systému se vstupním signálem.
- 2) **vnitřní popis**, nazývaný též popisem *stavovým*, kterému se budeme věnovat na závěr kapitoly o spojitéch systémech.

8.3.1 Vstupně–výstupní popis

V těchto úvahách vyžíváme již dobře známých pojmů Diracova impulsu a konvoluce. Připomeňme filtrační vlastnosti Diracova impulsu $\delta(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)dt = x(\tau).$$

Díky symetrii modelu Diracova impulsu můžeme konstatovat, že platí $\delta(t) = \delta(-t)$ a také $\delta(t - \tau) = \delta(\tau - t)$, kde τ je zpoždění impulsu. Vztah vyjadřující filtrační vlastnost můžeme tedy přepsat do tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(\tau - t)dt = x(\tau).$$

Nyní vyjádříme vstup lineárního systému jako funkci spojitě proměnného posunutí τ ,

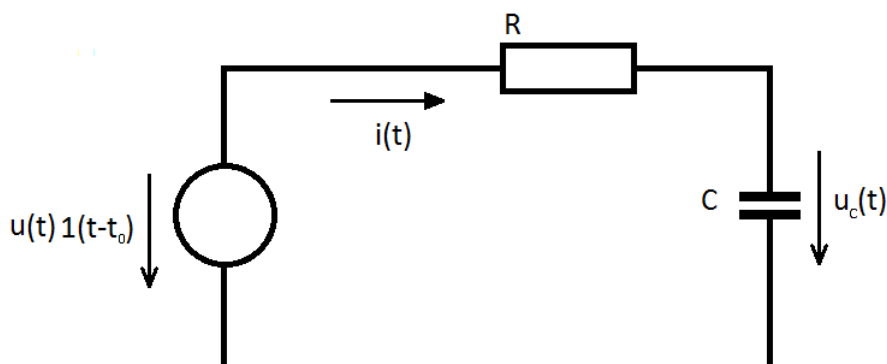
$$x(\tau) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\xi)\delta(\tau - k\xi)\xi,$$

jako sled váhových Diracových impulsů (či váhových velmi úzkých obdélníkových impulsů, resp. jako schodovou funkci s délkou schodu $\xi \rightarrow 0$). Díky platnosti superpozice můžeme odezvu lineárního systému vyjádřit jako součet dílčích odezev a jednotlivých členů uvedeného součtu (pro jednotlivé hodnoty k). Každý člen sumy je součtem konstanty $x(k\xi)\xi$ s funkcí $\delta(\tau - k\xi)$. Výstup $y(\tau)$ pak bude součtem váhových odezev $h_d(\tau)$ lineárního systému na impuls $d(\tau)$,

$$y(\tau) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\xi)h_d(\tau - k\xi)\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(\tau - t)dt,$$

kde $h(t)$ je odezvou systému na Diracův impuls $\delta(t)$, nazývanou **impulsní charakteristika systému**. Na závěr jen zaměňme t a τ , abychom získali běžněji používaný tvar konvolučního integrálu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau. \quad (8.10)$$



Obr. 8.9: "integrační" článek RC

Vztah (8.10) je vyjádřením výstupního signálu $y(t)$ lineárního systému pomocí konvoluce vstupního signálu $x(t)$ s impulsní charakteristikou systému $h(t)$. Konvoluce se běžně vyjadřuje pomocí operátoru $*$, tedy

$$y(t) = h(t) * x(t) = h(t) * x(t).$$

Pro kauzální systém (resp. kauzální $h(t)$) lze meze integrálů v (8.10) upravit do podoby

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau, \quad (8.11)$$

je-li kauzální také signál $x(t)$, pak

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t - \tau)d\tau. \quad (8.12)$$

Příklad 8.15. Diferenciální rovnice a její řešení. Předpokládejme článek RC na Obrázku 8.9, jehož matematický model (vstupně-výstupní diferenciální rovnici se vstupem $u(t)$, výstupem $u_c(t)$ a počáteční podmínkou $u_c(t_0)$ se stejnou polaritou jako je výstup na Obrázku 8.9) sestavíme následujícím způsobem:

Platí, že

$$u_R(t) + u_C(t) = u(t), \quad u_R(t) = R_i(t),$$

podle vzorce (8.8) je

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Výsledná diferenciální rovnice má tvar

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t) \quad (8.13)$$

(k sestavení rovnice (8.13) jsem vystačili s jedním z Kirchhoffových zákonů, s Ohmovým zákonem a modelem kapacitoru).

Vstupní veličinou je vstupní napětí $u(t)$, výstupní je napětí na kapacitoru $u_C(t)$. Diferenciální rovnice je **nehomogenní** (tj. s pravou stranou). Řešení spočívá v nalezení řešení **homogenní** diferenciální rovnice (bez pravé strany, resp. s nulovým výstupem) a libovolného partikulárního řešení (s pravou stranou).

Řešení homogenní diferenciální rovnice

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C(t),$$

kde se $u_C(t)$ od své derivace se liší pouze konstantou, je poměrně snadné. Obecně musí být

$$u_C(t) = Ae^{\alpha t} \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} = \alpha Ae^{\alpha t},$$

kde A je libovolná konstanta. Zřejmě

$$\alpha Ae^{\alpha t} = -\frac{1}{RC}Ae^{\alpha t} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}.$$

Homogenní diferenciální rovnice je bez působení vstupu, její řešení teď reprezentuje vybíjení kapacitoru při nepůsobení vstupu. Konstanta A v tomto případě závisí na $u_C(t_0)$, tj. na napětí kapacitoru v počátku t_0 . Odtud

$$u_{Chom}(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \Rightarrow^{t=t_0} A = u_C(t_0)e^{\frac{1}{RC}t_0}.$$

Řešení homogenní diferenciální rovnice je tzv. **přirozená odezva systémů** tj. odezva na nenulové počáteční podmínky při nepůsobení vstupu

$$u_{Cpr}(t) = u_C(t_0)e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

(vztah se zjednoduší, je-li počátkem $t = 0$).

Partikulární řešení diferenciální rovnice s pravou stranou tvoří spolu s řešením homogenní rovnice úplnou odezvu

$$u_C(t) = u_{Cpart}(t) + u_{Chom}(t).$$

Pro nalezení partikulárního rovnice s pravou stranou předpokládejme, že v okamžiku t_0 , který považujeme za počátek, je na vstupu připojen stejnosměrný zdroj napětí $u_{Cpart}(t) = U$. Potom

$$u_C(t) = U - Ae^{-\frac{1}{RC}t} \Rightarrow^{t=t_0} A = [U - u_C(t_0)]e^{\frac{1}{RC}t_0}$$

a odtud

$$u_C(t) = U - [U - u_C(t_0)]e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}, \quad (8.14)$$

obecně můžeme získaný výsledek (8.14) interpretovat jako:

úplná odezva = ustálený stav + přechodový děj.

Po odeznění **přechodového děje** se kapacitor nabije na $u_C(t) = U$, při $i(t) = 0$, nastane **ustálený stav**. Jednoduchou úpravou rovnice (8.14) do tvaru

$$u_C(t) = U[1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}] + u_C(t_0)e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)},$$

můžeme interpretovat jako:

úplná odezva = vnucená odezva (na vstup při nulových počátečních podmínkách) + **přirozená odezva** (na nenulové počáteční podmínky při nepůsobení vstupu).

Přirozená odezva je zřejmě součástí přechodového děje.

Obecný tvar vstupně-výstupní diferenciální rovnice lineárního (časově invariantního, kauzálního) systému je

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i},$$

kde: $y(t)$... výstupní signál, $x(t)$... vstupní signál, a_i, b_i ... koeficienty systému, n ... **řád systému** (odpovídající počtu paměťových prvků, u reálných systémů je vždy $n \geq m$). Řešením homogenní diferenciální rovnice obsahuje n integračních konstant c_1, c_2, \dots, c_n (které souvisí s fyzikálními počátečními podmínkami). Přirozená odezva je aditivní směs n odezev $y_i(t)$ na každou počáteční podmínku,

$$y_{hom}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t),$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, **jsou kořeny charakteristické rovnice**

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Příklad 8.16. Uvažujme diferenciální rovnici zapsanou jako

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = 0.$$

pak funkce $y''(t), y'(t), y(t)$ se liší jen multiplikativními konstantami – tuto vlastnost splňuje jen exponenciální funkce. Nechť

$$y(t) = e^{\lambda t}, y'(t) = \lambda e^{\lambda t}, y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}, \quad \text{viz kapitola 2.3}$$

Po dosazení do diferenciální rovnice dostaneme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad \text{viz kapitola 2.3}$$

Příklad 8.17. Z diferenciální rovnice (8.13)

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t) \quad (8.15)$$

vyplývá charakteristická rovnice

$$RC\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}.$$

Odtud, pro integrační konstantu (pro $t_0 = 0$) $c_1 = u_c(0)$ a odezvu $y_1(t) = e^{-\frac{t}{RC}}$ na počáteční podmínku, dostaneme

$$u_C(t) = u_C(0)e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Metoda řešení diferenciálních rovnic byla vysvětlena v Kapitole ??, nicméně uvedeme následující příklad.

Příklad 8.18. Najděte výstupní funkci $Y(t)$ systému jehož vstup je tvořen funkcí $u(t) = 2e^{3t}$, $t \in \mathbb{R}_0^+ = \langle 0, \infty \rangle$. Vstupně-výstupní popis je dán lineární diferenciální rovnicí druhého řádu

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t),$$

která vyhovuje nulovým počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}|_{t=0} = 0$. Úkol vyřešíme užitím Laplaceovy transformace.

Jako obvykle označíme $Y(p) = L\{y(t)\}$ a najdeme obrazy pravé strany $L\{u(t)\} = L\{2e^{3t}\} = \frac{2}{p-3}$, což nám umožní sestavit operátorovou rovnici

$$p^2Y(p) - 3pY(p) + 2Y(p) = \frac{2}{p-3}.$$

odtud obdržíme

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{2}{p-3}$$

a jelikož

$$p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2),$$

dostáváme pro Laplaceův obraz neznámé funkce

$$Y(p) = \frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Tato funkce má póly prvního stupně v bodech $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$. Funkci $y(t)$ (partikulární řešení) zadané diferenciální rovnice, která je předmětem k obrazu $Y(p)$ lze získat různými metodami (také pomocí výpočtu Bromwichova integrálu prostřednictvím součtu residui funkce $Y(p)e^{pt}$); zde se jako nejjednodušší postup jeví rozklad výše uvedené racionální funkce na součet prostých zlomků:

$$\frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3},$$

odtud snadno obdržíme

$$Y(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-3},$$

takže $y(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}$. Tato funkce s definičním oborem $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ je partikulárním řešením výše uvedené diferenciální rovnice $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$.

Při řízení procesů se lze setkat s rozličnou složitostí i rozlehlostí řízených systémů. Mohou to být jednoduché a běžně známé regulované soustavy, ale i velmi složité řízené systémy charakterizované sofistikovanou, složitou strukturou z hlediska rozsahu i z hlediska požadavku řešení hierarchických úrovní řízení příslušného systému. I jednoduchým regulátorům je v současnosti věnována vysoká pozornost z hlediska problému návrhu typu regulátoru a jeho řízení. Ve skutečnosti, v rámci inženýrské praxe, se více vyskytují – jak již bylo zmíněno – řízené systémy s náročnou strukturou z hlediska složitosti i rozlehlosti s vysokými požadavky na jakost regulačního procesu jak při řízení, tak i při analýze vlivu poruch. Příklady těchto řízených systémů nalzáme v chemických procesech, při chodu elektrotechnických a elektronických zařízení, v rozlehlých výrobních i distribučních procesech energetiky, strojírenských procesech, v zařízeních textilního a spotřebního průmyslu, v oblasti dopravy i jinde. Při řešení problémů řízení technologic-kých procesů se setkáváme nejen s řízením stacionárních dějů, ale i řízením dějů nestacionárních a dále s požadavky adaptace řídicího systému na změny provozních režimů, s požadavky na optimalizaci provozu technologického procesu se záměrem a cílem zvyšování hospodárnosti provozu s vlivem na snižování cen produktů a na současné zlepšování úrovně životního prostředí, a to jak v oblasti mikroklimatu, tak i makroklimatu. Podobné systémy lze specifikovat i v oblasti biologických procesů, rovněž pak i ve společenských, politických a ekonomických soustavách. Vysoké požadavky na jakost řízení jsou však podmíněny hlubokou znalostí předmětných procesů v návaznosti na systémový přístup k řešení problémů řízení těchto procesů.

V současném období se také nabízí možnost využití algoritmů řízení vytvořených na základě metod teorie umělé inteligence využívajících expertní systémy, fuzzy logiku, umělé neuronové sítě, genetické algoritmy, hrubé (rough) množiny, teorii chaosu; účinným nástrojem k automatizaci technologických procesů mohou zejména být programovatelné automaty, které jsou ekonomicky dostupné při vysoké úrovni své funkční činnosti a širokým polem uplatnění. Systémový přístup ke konstrukci hierarchie řízení umožňuje jejich využití zejména při decentralizovaném řízení rozlehlých systémů. Podrobnější zpracování výše naznačených tematických okruhů lze nalézt v rozsáhlé literatuře.

Na závěr budiž tedy zdůrazněno – tak jako na počátku Kapitoly 7 – že tyto dvě kapitoly (jakožto ostatně i všechny předcházející) představují pouze úvod do prezentované problematiky, které jsou věnovány. Pro potřeby dalšího studia na FEKT VUT, případně pro uspokojení odborných zájmů i širšího okruhu zájemců o podrobnější a hlubší informace je zapotřebí sáhnout po další (speciálnější) literatuře, která byla v hojné míře publikována jak v českém jazyce, tak zejména v angličtině v rozsáhlé zahraniční produkci. Několik titulů, z nichž jsme čerpali při tvorbě tohoto textu je uvedeno na konci v seznamu literatury.

Literatura

- [1] I. G. ARAMANOVIČ, G. L. LUNC, L. E. EL'SGOL'C: *Funkcie komplexnej premennej, operátorový počet, teória stability*, Alfa Bratislava, SNTL Praha 1973.
- [2] J. BALÁTĚ: *Automatické řízení*, Nakladatelství BEN- technická literatura, Praha 2004.
- [3] B. DAVIES: *Integral Transforms and Their Applications*, Applied Mathematics 41. Springer, New York... Tokyo 2002.
- [4] J. DIBLÍK, M. RŮŽIČKOVÁ: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Žilinská univerzita v Žiline/EDIS- vydavateľstvo ŽU 2008.
- [5] Z. DOŠLÁ, O. DOŠLÝ: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Masarykova univerzita, Brno 2003.
- [6] Z. DOŠLÁ, O. DOŠLÝ: *Metrické prostory, teorie a příklady*, Masarykova univerzita, Brno 2000.
- [7] S. N. ELAYDI: *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York 1999.
- [8] J. ELIÁŠ, J. HORVÁTH, J. KAJAN: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 3. časť*, Alfa, Bratislava 1972.
- [9] J. ELIÁŠ, J. HORVÁTH, J. KAJAN, R. ŠULKA: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 4. časť*, Alfa, Bratislava 1972.
- [10] P. GRABEN, J. WRIGHT: *From McCulloch–Pitts Neurons Toward Biology*, Bull. Math. Biol. 2011.
- [11] F. HAKL, M. HOLEŇA: *Úvod do teorie neuronových sítí*, ČVUT v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, AV ČR, Ústav informatiky a výpočetní techniky, Ediční středisko ČVUT Praha 1997.
- [12] S. S. HAYKIN, B. VEEN: *Signals and systems*, Wiley 1999.
- [13] S. S. HAYKIN: *Neural Networks: Signals and systems*, A Comprehensive Foundation. Prentice Hall, 2009.
- [14] J. HOLČÍK: *Signály, časové řady a lineární systémy*, IBA MU, Brno 2012.

-
- [15] J. JAN, J. KOZUMPLÍK: *Systémy, procesy a signály*, Vysoké učení technické v Brně 2000.
- [16] J. KALAS, M. RÁB: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno 2001.
- [17] J. KUBEN: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vojenská akademie v Brně, Brno 1991.
- [18] F. MELKES, M. ŘEZÁČ: *Matematika 2*, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2003.
- [19] M. D. MESAROVIC, Y. TAKAHARY: *Generad System Theory*, A Mathematical Foundations. Academic Press, New York 1975.
- [20] Z. PÍRKO, J. VEIT: *Laplaceova transformace, základy teorie a užití v elektrotechnice*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1970.
- [21] C. RHODE: *An Introduction to Neural Networks, Principles of Backpropagation*, Lower Collumbia College, Longview, WA, USA 2005.
- [22] R. SIKORSKI: *Diferenciální a integrální počet, funkce více proměnných, příručka pro vys. školy universitního směru*, Academia, Praha 1973.
- [23] Z. SMÉKAL, V. ŠEBESTA, J. JAN: *Systémy, procesy a signály II*, Skriptum VUT FEI, Brno, 1993.
- [24] V. ŠEBESTA, D. BIOLEK: *Systémy, procesy a signály I*, Skriptum VUT FEI, Brno, 1993.
- [25] M. ŠULISTA: *Základy analýzy v komplexním oboru*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1981.
- [26] J. ŠTECHA, V. HAVLENA: *Teorie dynamických systémů*, ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická, Ediční středisko ČVUT, Praha 2005.
- [27] P. VAVŘÍN, P. JURA: *Systémy, procesy a signály II*, VUTIUM, Brno, 1999.
- [28] J. VESELÝ: *Komplexní analýza pro učitele*, Univerzita Karlova, Karolinum, Praha 2000.