VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Moderní numerické metody

Sbírka příkladů

doc. RNDr. Jaromír Baštinec, CSc.
RNDr. Michal Novák, Ph.D.

ÚSTAV MATEMATIKY

Obsah

Předmluva

Tato sbírka příkladů je doplněním textu Baštinec, J., Novák, M.: *Moderní numerické metody.* K většině tematických celků probíraných v předmětu *Moderní numerické metody* v ní naleznete k procvičení vždy alespoň 10 příkladů s podrobnými výsledky.

I když jsme se sbírku příkladů snažili co nejvíce očistit od překlepů, je téměř nemožné, aby všechny výsledky v takovém množství čísel byly přepsány správně. Budeme proto vděční, když nám tuto sbírku budete pomáhat vylepšovat a aktualizovat.

Autoři

Jak sbírku používat

Elektroinženýr se ve své praxi setkává s potřebou najít řešení reálných technických problémů. Na většinu těchto problémů lze aplikovat následující postup:

1. Reálný technický problém se vyjádří v řeči matematiky.

2. Matematický problém se vyřeší.

3. Získané výsledky se interpretují v řeči zadaného technického problému.

Při řešení matematického problému lze použít různé strategie – jednou z nich je hledat řešení matematického problému pomocí tzv. *numerických metod*. Tento postup má své výhody (zejména algoritmizovatelnost, často relativní jednoduchost) ale i mnohé nevýhody (zejména problematika přesnosti a relevantnosti získaného výsledku).

Je důležité, abyste si vždy uvědomovali, že v předmětu *Moderní numerické metody* se nezabýváme *reálnými technickými* problémy, ale že si ukazujeme, jakým způsobem lze řešit různé typové *matematické* problémy, které jsou zápisem problémů z praxe. Např. mnoho úloh z fyziky vede na řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu. V předmětu *Moderní numerické metody* si proto ukazujeme, jak lze takové rovnice řešit numericky. Ukazujeme možné způsoby řešení a jejich výhody a nevýhody.

Při řešení zadaného fyzikálního problému však elektroinženýr postupuje jinak: poté, co vyjádří fyzikální problém v řeči matematiky, tj. zapíše příslušnou diferenciální rovnici, se musí rozhodnout, zda ji bude řešit analyticky nebo numericky. Pokud se rozhodne pro numerické řešení (což nemusí být vždy správná ani jednodušší volba), musí na základě svých zkušeností z fyziky i matematiky rozhodnout, na jakém intervalu bude hledat řešení, jaký zvolí krok a jakou zvolí metodu. Musí také umět poznat, zda je dané řešení stabilní a musí vědět, jak dále naloží se získaným numerickým řešením a jak jej interpretuje. V předmětu *Moderní numerické metody* se snažíme usnadnit ta z rozhodování, která spadají do oblasti matematiky. Úvahami, které oblast matematiky překračují, se nezabýváme.

V této sbírce naleznete příklady na procvičení některých numerických metod probíraných v předmětu *Moderní numerické metody*. Vybrány jsou ty metody, které tvoří náplň cvičení v prezenční formě předmětu.

Ke každé metodě je uvedeno 10 zadání (v mnoha případech s úpravami zadání a doplňujícími otázkami). Tam, kde je to možné, jsou příklady řešeny více různými metodami, aby bylo vidět srovnání vhodnosti jednotlivých metod. Ve výsledcích jsou většinou uvedeny také všechny mezivýsledky potřebné ke kontrole správnosti postupu výpočtu. Pro každou metodu je navíc zařazen jeden příklad s modelovým postupem řešení.

Se sbírkou doporučujeme pracovat dvěma způsoby:

- nejprve si ji povrchně pročíst, srovnávat výsledky získané pomocí jednotlivých metod, resp. srovnávat rychlost konvergence, přesnost a celkovou vhodnost použití daných metod; všímat si záludností a problémů spojených s jednotlivými metodami (např. požadavek numericky řešit soustavu lineárních rovnic, která má nekonečně mnoho řešení – což ovšem dopředu nevíme, nebo skutečnosti, že při řešení některých úloh potřebujeme řešit soustavu lineárních rovnic – jak ji budeme řešit?) apod.,
- několik příkladů na danou metodu (stačí dva až tři) si skutečně detailně propočítat a tím získat představu o náročnosti ručního výpočtu a o přesném významu vzorců, které jsou ve skriptech často psány v obecném tvaru.

Autoři

Kapitola 1

Soustavy lineárních rovnic

Hledání řešení soustav lineárních rovnic iteračními metodami (*Jacobiho* a *Gauss–Seidelovou*) je látka, která spadá do předmětu *Matematika 3*. V předmětu *Moderní numerické metody* nově hledáme řešení pomocí tzv. relaxačních metod. Vzhledem k tomu, že požadavek řešit soustavy lineárních rovnic je součástí numerického řešení mnoha jiných úloh, budeme u následujících soustav uvádět jak řešení *Jacobiho*, resp. *Gauss–Seidelovou* metodou tak i příslušnými relaxačními metodami pro různé relaxační parametry.

Najděte řešení následujících soustav rovnic Jacobiho metodou a poté Gauss–Seidelovou metodou. Poté najděte řešení těchto soustav relaxační Jacobiho metodou pro relaxační parametry $\omega = 0,9$ a $\omega = 1,25$. Volte vždy $x^{(0)} = (0,0,0)$ a proveďte dva kroky dané metody. Poté srovnejte získaná řešení s přesným řešením získaným nějakou přímou metodou.

1.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= -6,5 \\
10x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 1.5 \\
x_1 + 12x_2 - 10x_3 &= -2,5
\end{aligned}
$$

Řešení: Soustava není v iteračním tvaru, Jacobiho ani Gauss–Seidelova metoda proto obecně nebude konvergovat. Přeskládáme-li rovnice v pořadí (2), (3), (1), budou obě metody konvergovat.
Jacobiho metodou dostáváme $x^{(1)} = (0,15; -0,2083; 0,8125)$ a $x^{(2)} = (0,6396; 0,4562; 0,7010)$, resp. Gauss-Seidelovou metodou dostáváme $x^{(1)} = (0,15; -0,2208; 0,6932)$ a $x^{(2)} = (0,5849; 0,3206; 1,0860)$.
Pro relaxační parametr $\omega = 0,9$ dostáváme $x^{(1)} = (0,1350; -0,1875; 0,7313)$ a $x^{(2)} = (0,5451; 0,3321; 0,7141)$, pro parametr $\omega = 1,25$ dostáváme $x^{(1)} = (0,1875; -0,2604; 1,0156)$ a $x^{(2)} = (0,9056; 0,8431; 0,5876)$.
Přesné řešení této soustavy je $x = (0,5; 1; 1,5)$.

2.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 10x_2 - 5x_3 &= 8\\
20x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30\\
x_1 - x_2 + 4x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Řešení: Soustava není v iteračním tvaru, Jacobiho ani Gauss–Seidelova metoda proto obecně nebude konvergovat. Přeskládáme-li rovnice v pořadí (2), (1), (3), budou obě metody konvergovat.
Jacobiho metodou dostáváme $x^{(1)} = (1,5; 0,8; 1)$ a $x^{(2)} = (1,04; 0,85; 0,825)$, resp. Gauss-Seidelovou metodou dostáváme $x^{(1)} = (1,5; 0,35; 0,7125)$ a $x^{(2)} = (1,2163; 0,7914; 0,8938)$.
Pro relaxační parametr $\omega = 0,9$ dostáváme $x^{(1)} = (1,1124; 0,72; 0,9)$ a $x^{(2)} = (1,1124; 0,8325; 0,8483)$, pro parametr $\omega = 1,25$ dostáváme $x^{(1)} = (1,8750; 1; 1,25)$ a $x^{(2)} = (0,6875; 0,8281; 0,6641)$.
Přesné řešení této soustavy je $x = (1; 1; 1)$.

3.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -0,75\\
4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 13,25\\
-5x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= -7,75
\end{aligned}
$$

Řešení: Soustava není v iteračním tvaru, Jacobiho ani Gauss–Seidelova metoda proto obecně nebude konvergovat. Žádným přeskládáním rovnic nemůžeme docílit, aby soustava byla diagonálně dominantní, tj. abychom mohli použít Jacobiho metodu. Pokud však rovnici přepíšeme do maticového tvaru $\mathbf{A}\mathbf{x} = b$, pak pro soustavu $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, tj.

$$
\begin{aligned}
50x_1 + 12x_2 + 12x_3 &= 89,5\\
12x_1 + 57x_2 - 17x_3 &= 32,25\\
12x_1 - 17x_2 + 43x_3 &= 66,75
\end{aligned}
$$

budeme moci použít Gauss–Seidelovu metodu.
Dostaneme, že $x^{(1)} = (1,79; 0,1889; 1,1275)$ a $x^{(2)} = (1,4741; 0,5917; 1,3749)$.
Přesné řešení této soustavy je $x = (1,25; 0,75; 1,5)$.

4.

$$
\begin{aligned}
1,25x_1 + 4,875x_2 + 2,9x_3 &= 9,85\\
7,35x_1 - 2,875x_2 - 1,25x_3 &= -1,075\\
17,2x_1 + 4x_2 + 3,3x_3 &= 17,55
\end{aligned}
$$

Řešení: Soustava není v iteračním tvaru, Jacobiho ani Gauss–Seidelova metoda proto obecně nebude konvergovat. Žádným přeskládáním rovnic nemůžeme docílit, aby soustava byla diagonálně dominantní, tj. abychom mohli použít Jacobiho metodu. Pokud však rovnici přepíšeme do maticového tvaru $\mathbf{Ax} = b$, pak pro soustavu $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, tj.

$$\begin{aligned} 351,425x_1 + 53,7625x_2 + 51,1975x_3 &= 306,27125 \\ 53,7625x_1 + 48,03125x_2 + 30,93125x_3 &= 121,309375 \\ 51,1975x_1 + 30,93125x_2 + 20,8625x_3 &= 87,82375 \end{aligned}$$

budeme moci použít Gauss–Seidelovu metodu.
Dostaneme, že $x^{(1)} = (0,8715; 1,5501; -0,2273)$ a $x^{(2)} = (0,6675; 1,9249; -0,2823)$. Metoda konverguje k řešení $(0,6024; 2,0444; -0.2998)$. *Soustava však má nekonečně mnoho řešení, protože třetí rovnice je dvojnásobkem součtu první a druhé rovnice. Nemá tedy smysl používat jakékoliv iterační metody.*

5.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0,6 \\ 7x_1 - 14x_2 - 3x_3 &= -3,7 \\ x_1 + 4x_2 + 33x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Řešení: Soustava je v iteračním tvaru.
Jacobiho metodou dostáváme $x^{(1)} = (0,06; 0,2643; 0,3333)$ a $x^{(2)} = (0,1071; 0,2229; 0,2995)$, resp. Gauss-Seidelovou metodou dostáváme $x^{(1)} = (0,06; 0,2943; 0,2958)$ a $x^{(2)} = (0,0899; 0,2458; 0,3008)$.
Pro relaxační parametr $\omega = 0,9$ dostáváme $x^{(1)} = (0,054; 0,2379; 0,3)$ a $x^{(2)} = (0,0976; 0,2281; 0,3026)$, pro parametr $\omega = 1,25$ dostáváme $x^{(1)} = (0,075; 0,3304; 0,4167)$ a $x^{(2)} = (0,1299; 0,1830; 0,2596)$.
Přesné řešení této soustavy je $x = (0,1; 0.25; 0.3)$.

Vhodnou metodou najděte řešení následujících soustav. Pracujte s přesností $\varepsilon = 0,01$ a volte $x^{(0)} = (0,0,0)$.

6.

$$\begin{aligned} 50x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 589,3 \\ 7x_1 - 26x_2 - 3x_3 &= -32,05 \\ x_1 - 6x_2 + 40x_3 &= -637,65 \end{aligned}$$

Řešení: V 6. kroku Jacobiho metody získáme s danou přesností řešení $x = (12,45; 6,35; -15,3)$.

7.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 91,3 \\ 7x_1 - 11x_2 - 3x_3 &= 63,2 \\ x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= -148,05 \end{aligned}$$

Řešení: V 19. kroku Jacobiho metody získáme s danou přesností řešení $x = (12,45; 6,35; -15,29)$. *Soustava přitom má stejné řešení jako předcházející soustava, tj.* $x_3 = -15,3$.

8.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= -1 \\ 3_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Řešení: Řešení této soustavy rovnic je $x = (1, 1, 0)$.

9.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2,58 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 7,49 \\ 3_1 - x_2 + 2x_3 &= 5,63 \end{aligned}$$

Řešení: Ve 38. kroku Gauss–Seidelovy metody získáme s danou přesností řešení $x = (3,39; 1,66; -1,41)$. *Řešení této soustavy rovnic je přitom (po zaokrouhlení)* $x = (3,4571; 1,7814; -1,48)$.

10.

$$\begin{aligned} 7,35x_1 - 2,875x_2 - 1,25x_3 &= -1,075 \\ 1,25x_1 + 4,875x_2 + 2,9x_3 &= 9,85 \\ -7,35x_1 + 2,875x_2 + 1,25x_3 &= 3,29 \end{aligned}$$

Řešení: Soustava nemá řešení.

Kapitola 2

Řešení jedné nelineární rovnice

V této kapitole naleznete 10 rovnic. Každá z nich je řešena *metodou sečen*, *modifikovanou Newtonovou metodou* a *kombinovanou metodou sečen a tečen*, tj. metodami, které jsou v předmětu *Moderní numerické metody* nové. Číslování příkladů v jednotlivých odstavcích si odpovídá, takže můžete snadno porovnávat výsledky získané jednotlivými metodami. Sami si zkuste najít řešení zadaných rovnic metodami známými z předmětu *Matematika 3*.

2.1 Metoda sečen

Metodou sečen najděte s přesností ϵ kořen rovnice $f(x) = 0$. Počáteční aproximaci volte, jak je uvedeno; požadavkem *najít kořen s přesností* ϵ rozumíme požadavek zastavit výpočet, pokud se následující dvě aproximace liší o méně než ϵ.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x - \sin x - \frac{3}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $< a, b >$ proto kořen nalezneme.
   Dále je sign $f(a) \neq$ sign $f''(x)$, proto $x_1 = a = 0$.
   aproximace: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5702$, $x_3 = 0,7501$, $x_4 = 0,7866$, $x_5 = 0,7932$

2. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x^2 - 1$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $< a, b >$ proto kořen nalezneme.
   Dále je sign $f(a) \neq$ sign $f''(x)$, proto $x_1 = a = 0,5$.
   aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,5292$, $x_3 = 0,5484$, $x_4 = 0,5606$, $x_5 = 0,5682$

   Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností na intervalu $< 0,5; 1 >$.

   Řešení: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,5442$, $x_3 = 0,5647$, $x_4 = 0,5736$

   Otázka: Lze zvolit interval s krajním bodem $x = 0$?

Odpověď: Nelze, protože bod $x = 0$ je jedním z kořenů zadané rovnice.

3. $f(x) = \sin\frac{x}{2} - x^2$, $a = 0,3$, $b = 1,3$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in <a, b>$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $<a, b>$ proto kořen nalezneme.
Dále je sign $f(a) \neq$ sign $f''(x)$, proto $x_1 = a = 0,2$.
aproximace: $x_1 = 0,3$, $x_2 = 0,3519$, $x_3 = 0,3947$, $x_4 = 0,4271$, $x_5 = 0,4502$, $x_6 = 0,4660$, $x_7 = 0,4764$, $x_8 = 0,4832$

Otázka: Bylo by možné volit za výchozí interval jeden z intervalů $< -0,5; 0,5 >$, resp. $< 0; 0,5 >$? Výpočet by jistě probíhal rychleji, protože hledaný kořen leží velmi blízko bodu $x = 0,5$.

Odpověď: Není možné volit žádný z těchto intervalů. Jeden z kořenů rovnice je také $x = 0$, což vylučuje druhý z nich. První zase nesplňuje podmínku rozdílnosti znamének krajních bodů, tj. $f(a)f(b) < 0$.

4. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cos x - 1$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in <a, b>$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $<a, b>$ proto kořen nalezneme.
Dále je sign $f(a) \neq$ sign $f''(x)$, proto $x_1 = a = 0,5$.
aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,7687$, $x_3 = 0,8468$, $x_4 = 0,8615$, $x_5 = 0,8639$

5. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x - \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in <a, b>$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $<a, b>$ proto kořen nalezneme.
Dále je sign $f(a) \neq$ sign $f''(x)$, proto $x_1 = a = 0$.
aproximace: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,2186$, $x_3 = 0,3077$, $x_4 = 0,3402$, $x_5 = 0,3515$, $x_6 = 0,3553$

Úprava zadání: Najděte kořen s touž přesností na intervalu $< 0; 0,5 >$.

Řešení: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,3163$, $x_3 = 0,3533$, $x_4 = 0,3569$

6. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} - x - \frac{4}{3}$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in <a, b>$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $<a, b>$ proto kořen nalezneme.
Dále je sign $f(a) \neq$ sign $f''(x)$, proto $x_1 = a = 0$.
aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,7940$, $x_3 = 0,8749$, $x_4 = 0,8913$, $x_5 = 0,8945$

Úprava zadání: Najděte kořen s touž přesností na intervalu $< 0,5; 1,5 >$

Řešení: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,5763$, $x_3 = 0,6427$, $x_4 = 0,6986$, $x_5 = 0,7444$, $x_6 = 0,7808$, $x_7 = 0,8093$, $x_8 = 0,8093$, $x_9 = 0,8312$, $x_{10} = 0,8477$, $x_{11} = 0,8602$, $x_{12} = 0,8694$

Otázka: Jak je možné, že se výsledky tak výrazně liší?

Odpověď: Výpočet u metody sečen je ošidné zastavovat v situaci, kdy se následující dvě aproximace liší o méně než přesnost. Pokud bychom počítali dále, zjistili bychom, že např. $x_{17} = 0,8912$. Hodnoty x_{25} a x_{26} se shodují již na 4 desetinná místa a je $x_{25} \doteq 0,8949$.

7. $f(x) = x \sin x + \cos x - 2x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $< a, b >$ proto kořen nalezneme.
Dále je sign $f(a) \neq$ sign $f''(x)$, proto $x_1 = a = 0$.
aproximace: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,6180$, $x_3 = 0,7701$, $x_4 = 0,7929$, $x_5 = 0,7959$

8. $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x - x^2 + \frac{1}{5}$, $a = -1,5$, $b = -0,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, ale neplatí, že $f'(x) \neq 0$ pro $\forall x \in < a, b >$. Proto metodu sečen nemůžeme použít.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností na intervalu $< -2; -1 >$.

Řešení: Na tomto intervalu kořen hledat nelze, protože na něm není splněna podmínka o neměnnosti znaménka druhé derivace.

9. $f(x) = x \sin x - x^2 \cos x - x^3 + 1$, $a = 0,2$, $b = 1,2$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $< a, b >$ proto kořen nalezneme.
Dále je sign $f(a) \neq$ sign $f''(x)$, proto $x_1 = a = 0,2$.
aproximace: $x_1 = 0,2$, $x_2 = 1,0831$, $x_3 = 1,1427$, $x_4 = 1,1450$

Otázka: Čím si vysvětlujete takový skok mezi x_1 a x_2?

10. $f(x) = x^3 - x^2 - x + \mathrm{e}^x - 2$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x)$ na daném intervalu nemění znaménko. Metodou sečen na intervalu $< a, b >$ proto kořen nalezneme.
Dále je sign $f(a) \neq$ sign $f''(x)$, proto $x_1 = a = 0,5$.
aproximace: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,8167$, $x_3 = 0,9827$, $x_4 = 1,0523$, $x_5 = 1,0784$, $x_6 = 1,0876$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností na intervalu $< 0; 2 >$.

Odpověď: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,2384$, $x_2 = 0,4507$, $x_3 = 0,6342$, $x_4 = 0,7819$, $x_5 = 0,8914$, $x_6 = 0,9668$, $x_7 = 1,0158$, $x_8 = 1,0465$, $x_9 = 1,0652$, $x_{10} = 1,0764$, $x_{11} = 1,0831$

11. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} - 1$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

    Řešení: Sice platí, že $f(a)f(b) < 0$, avšak funkce není na daném intervalu spojitá a metodu sečen tedy nemůžeme při takto formulované úloze použít.

2.2 Modifikovaná Newtonova metoda

Modifikovanou Newtonovou metodou najděte s přesností ϵ kořen rovnice $f(x) = 0$. Počáteční aproximaci volte, jak je uvedeno; požadavkem *najít kořen s přesností* ϵ rozumíme požadavek zastavit výpočet, pokud se následující dvě aproximace liší o méně než ϵ.

Pozn.: V textu řešení je u příkladů uvedeno, že „je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$“. Podle podmínek konvergence ze skript si sami určete, zda je to dostatečná informace o konvergenci a jak vypadá interval I, na němž je konvergence zaručena.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x - \sin x - \frac{3}{2}$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
   aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,8270$, $x_3 = 0,8038$, $x_4 = 0,7974$

   Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 0,5$.

   Řešení: Podmínka konvergence zde splněna není. Pokud si tento fakt neověříme, zjistíme, že teprve hodnoty $x_{76} = 0,7996$ a $x_{77} = 0,7898$ se liší o méně než o požadovanou přesnost. I to je však jen náhoda – ke kořenu bychom vůbec nemuseli dojít.

2. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x^2 - 1$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
   aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,7012$, $x_3 = 0,6402$, $x_4 = 0,5982$, $x_5 = 0,5904$

   Otázka: Když srovnáte získaný výsledek s výsledkem získaným pomocí metody sečen ($x \doteq 5736$ pro interval $< 0,5; 1,5 >$, resp. $x \doteq 0,5682$ pro interval $< 0,5; 1 >$), je vidět, že se poměrně značně odlišuje. Jak je to možné?

   Odpověď: Výpočet zastavujeme v situaci, kdy se následující dvě aproximace liší o méně než přesnost. To však nezaručuje, že kořen skutečně s danou přesností získáme. Pokud bychom pokračovali ve výpočtu dále, dostali bychom, že $x_6 = 0,5860$, $x_7 = 0,5835$, $x_8 = 0,5820$, $x_9 = 0,5812$. Nyní je vidět, že rozdíl již není tak výrazný.

3. $f(x) = \sin\frac{x}{2} - x^2$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
   aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,6666$, $x_3 = 0,5915$, $x_4 = 0,5541$, $x_5 = 0,5326$, $x_6 = 0,5195$, $x_7 = 0,5111$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 0,5$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_0 = 0,5$, $x_1 = 0,4950$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_0 = 1,5$, $x_1 = 0,9046$, $x_2 = 0,7599$, $x_3 = 0,6815$, $x_4 = 0,6320$, $x_5 = 0,5984$, $x_6 = 0,5743$, $x_7 = 0,5566$, $x_8 = 0,5433$, $x_9 = 0,5331$, $x_{10} = 0,5252$

Otázka: Lze zvolit za počáteční aproximaci některý z bodů $x_0 = 0,4$, $x_0 = 0,2$, $x_0 = -0,2$?

Odpověď: Volby $x_0 = 0,4$ a $x_0 = 0,2$ nesplňují nutnou podmínku konvergence; bod $x_0 = -0,2$ za počáteční aproximaci zvolit sice můžeme, avšak aproximace budou konvergovat k bodu $x = 0$, který je druhým kořenem dané rovnice.

4. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cos x - 1$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,8841$, $x_3 = 0,8697$, $x_4 = 0,8659$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_0 = 1,5$, $x_1 = 1,0826$, $x_2 = 0,9873$, $x_3 = 0,9395$, $x_4 = 0,9120$, $x_5 = 0,8952$, $x_6 = 0,8846$, $x_7 = 0,8778$

Úprava zadání: Pokud řešíme tutéž úlohu metodou sečen, zjistíme, že kořen s danou přesností je $x \doteq 0,86$. Při modifikované Newtonově metodě a volbě počáteční aproximace $x_0 = 1$ jsme také získali kořen $x \doteq 0,86$. Při volbě $x_0 = 1,5$ najděte další aproximace, dokud nebude $x \doteq 0,86$.

Řešení: $x_8 = 0,8733$, $x_9 = 0,8703$, $x_{10} = 0,8684$, $x_{11} = 0,8671$

5. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x - \frac{1}{2}$, $x_0 = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_1 = 1,5$, $x_2 = 0,6707$, $x_3 = 0,5212$, $x_4 = 0,4505$, $x_5 = 0,4122$, $x_6 = 0,3903$, $x_7 = 0,3773$, $x_8 = 0,3695$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_0 = 1$, $x_1 = 0,5241$, $x_2 = 0,4322$, $x_3 = 0,3935$, $x_4 = 0,3753$, $x_5 = 0,3664$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 0,5$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_0 = 0,5$, $x_1 = 0,3702$, $x_2 = 0,3595$, $x_3 = 0,3577$

6. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} - x - \frac{4}{3}$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,9132$, $x_3 = 0,9006$, $x_4 = 0,8969$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_0 = 1,5$, $x_1 = 1,2577$, $x_2 = 1,1749$, $x_3 = 1,1215$, $x_4 = 1,0828$, $x_5 = 1,0532$, $x_6 = 1,0297$, $x_7 = 1,0106$, $x_8 = 0,9948$, $x_9 = 0,9816$, $x_{10} = 0,9705$, $x_{11} = 0,9610$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 2$.

Řešení: Tato volba počáteční aproximace sice splňuje nutnou podmínku konvergence, avšak je pro danou funkci zcela nevhodná. I když k tomu, aby se následující dvě aproximace lišily o méně než ϵ, musíme určit 22 aproximací, vůbec si nepomůžeme, protože $x_{21} = 1,2487$ a $x_{22} = 1,2387$.

7. $f(x) = x \sin x + \cos x - 2x^2$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,8213$, $x_3 = 0,8021$, $x_4 = 0,7978$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_0 = 1,5$, $x_1 = 1,0024$, $x_2 = 0,8961$, $x_3 = 0,8483$, $x_4 = 0,8243$, $x_5 = 0,8116$, $x_6 = 0,8048$

8. $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x - x^2 + \frac{1}{5}$, $x_0 = -1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_1 = -1,5$, $x_2 = -1,4440$, $x_3 = -1,4436$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = -1$.

Řešení: Takto počáteční aproximaci zvolit nemůžeme, protože $f(-1)f''(-1) \doteq -1,6091 < 0$.

9. $f(x) = x \sin x - x^2 \cos x - x^3 + 1$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Takto nelze počáteční aproximaci volit, protože $f'(0) = 0$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_0 = 1$, $x_1 = 1,1621$, $x_2 = 1,1407$, $x_3 = 1,1461$.

10. $f(x) = x^3 - x^2 - x - \mathrm{e}^x$, $x_0 = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_1 = 1,5$, $x_2 = 1,2087$, $x_3 = 1,1471$, $x_4 = 1,1201$, $x_5 = 1,1068$, $x_6 = 1,1001$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 2$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
aproximace: $x_1 = 2$, $x_2 = 1,4865$, $x_3 = 1,3468$, $x_4 = 1,2684$, $x_5 = 1,2185$, $x_6 = 1,1846$, $x_7 = 1,1607$, $x_8 = 1,1435$, $x_9 = 1,1308$, $x_{10} = 1,1215$

11. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} + 1$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ není v bodě x_0 definována, proto jej nemůžeme volit za počáteční aproximaci.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,5$.

Řešení: Ani toto zadání není korektní, protože funkce $f(x)$ není spojitá. Hledaný kořen leží na intervalu $< 0; 1 >$ a v bodě $x = 1$ funkce není definována.

Úprava zadání: Zvolte počáteční aproximaci tak, aby bylo možné najít kořen.

Řešení: Za počáteční aproximaci lze volit body z intervalu $(0; 1)$ – pochopitelně ty, pro které je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Bod $x = 0$ nelze volit proto, že $f(0) = 0$. Např. při volbě $x_0 = 0,9$ máme aproximace $x_0 = 0,9$, $x_1 = 0,8423$, $x_2 = 0,8208$; $x_3 = 0,8066$, $x_4 = 0,7964$, $x_5 = 0,7887$.

2.3 Kombinovaná metoda tečen a sečen

Kombinovanou metodou tečen a sečen najděte na intervalu $< a, b >$ s přesností ϵ kořen rovnice $f(x) = 0$. Požadavkem *najít kořen s přesností* ϵ rozumíme požadavek zastavit výpočet, pokud pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí, že $|a_k - b_k| < \epsilon$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x - \sin x - \frac{3}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.
Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0$.
Další aproximace jsou:
$a_0 = 1$, $a_1 = 0,8270$, $a_2 = 0,7956$,
$b_0 = 0$, $b_1 = 0,7511$, $b_2 = 0,7946$

2. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x^2 - 1$, $a = 0,1$, $b = 1,1$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.
   Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0,5$. Další aproximace jsou:
   $a_0 = 1$, $a_1 = 0,7012$, $a_2 = 0,5976$, $a_3 = 0,5805$
   $b_0 = 0,5$, $b_1 = 0,5647$, $b_2 = 0,5796$, $a_4 = 0,5801$

3. $f(x) = \sin\frac{x}{2} - x^2$, $a = 0,3$, $b = 1,3$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.
   Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1,3$, $b_0 = 0,3$. Další aproximace jsou:
   $a_0 = 1,3$, $a_1 = 0,8073$, $a_2 = 0,5831$, $a_3 = 0,5066$, $a_4 = 0,4952$
   $b_0 = 0,3$, $b_1 = 0,3947$, $b_2 = 0,4764$, $a_4 = 0,4945$, $b_4 = 0,4949$

4. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos x - 1$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.
   Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0,5$. Další aproximace jsou:
   $a_0 = 1$, $a_1 = 0,8841$, $a_2 = 0,8650$
   $b_0 = 0,5$, $b_1 = 0,8470$, $b_2 = 0,8644$

5. $f(x) = \mathrm{e}^{x}\sin x - \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.
   Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Další aproximace jsou:
   $a_0 = 1$, $a_1 = 0,5241$, $a_2 = 0,3745$, $a_3 = 0,3575$
   $b_0 = 0$, $b_1 = 0,3100$, $b_2 = 0,3567$, $a_4 = 0,3573$

6. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} - x - \frac{4}{3}$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

   Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.
   Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1$, $b_0 = 0,5$. Další aproximace jsou:

$a_0 = 1,\ a_1 = 0,9132,\ a_2 = 0,8958$
$b_0 = 0,5,\ b_1 = 0,8750,\ b_2 = 0,8951$

7. $f(x) = x\sin x + \cos x - 2x^2,\ a = 0,\ b = 1,\ \epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.
Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1,\ b_0 = 0$. Další aproximace jsou:
$a_0 = 1,\ a_1 = 0,8213,\ a_2 = 0,7969$
$b_0 = 0,\ b_1 = 0,7700,\ b_2 = 0,7964$

8. $f(x) = x\cos x - x^2\sin x - x^2 + \frac{1}{5},\ a = -1,5,\ b = -0,5,\ \epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, nicméně neplatí, že pro $\forall x \in < a, b >$ je $f'(x) \neq 0$ a že druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto nemůžeme použít.

9. $f(x) = x\sin x - x^2\cos x - x^3 + 1,\ a = 0,2,\ b = 1,2,\ \epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.
Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1,2$, $b_0 = 0,2$. Další aproximace jsou:
$a_0 = 1,2,\ a_1 = 1,1471$
$b_0 = 0,2,\ b_1 = 1,1427$

10. $f(x) = x^3 - x^2 - x + \mathrm{e}^x - 2,\ a = 0,5,\ b = 1,5,\ \epsilon = 0,01$

Řešení: Funkce $f(x)$ je na intervalu $< a, b >$ spojitá, pro $\forall x \in < a, b >$ platí, že $f'(x) \neq 0$ a druhá derivace na daném intervalu nemění znaménko. Kombinovanou metodu tečen a sečen proto můžeme použít.
Podmínka $f(a_0)f''(a_0) > 0$ je splněna pro $x = b$, proto označíme $a_0 = 1,5$, $b_0 = 0,5$. Další aproximace jsou:
$a_0 = 1,5,\ a_1 = 1,2087,\ a_2 = 1,1055,\ a_3 = 1,0928$
$b_0 = 0,5,\ b_1 = 0,9867,\ b_2 = 1,0910,\ a_4 = 1,0926$

Kapitola 3

Algebraické rovnice

U každé z následujících rovnic určete horní a dolní odhad absolutní hodnoty kořenů, počet kladných a záporných kořenů (pomocí Descartovy věty), sestrojte Sturmovu posloupnost a podle Sturmovy věty určete počet kořenů ležících na intervalech $(-\infty, -10)$, $\langle -10, 10 \rangle$, $(10, \infty)$. Dále metodou Graeff-Lobačevského určete absolutní hodnoty reálných kořenů této rovnice (vycházejte z $P^2(x)$). Poté si zkuste příklad vyřešit některou z metod pro nelineární rovnice.

1. $x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36 = 0$

   Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{1}{2} \leq |x_k| \leq 37$
   Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 3 nebo 1
   Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 1
   Sturmova posloupnost: $M(x) = x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36$, $M_1(x) = 4x^3 - 24x^2 + 14x + 36$, $M_2(x) = 8,5x^2 - 34x + 18$, $M_3(x) = 26,4706x - 52,9412$, $M_4(x) = 16$
   $N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen
   Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36$, $P^1(x) = x^4 - 50x^3 + 553x^2 - 1800x + 1296$, $P^2(x) = x^4 - 1394x^3 + 128401x^2 - 1806624x + 1679616$.
   Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 6,1103$, $|x_2| = 3,0980$, $|x_3| = 1,9368$, $|x_4| = 0,9818$
   Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 6$

2. $x^5 + 11x^4 - 15x^3 - 155x^2 + 134x + 264 = 0$

   Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{132}{199} \doteq 0,66 \leq |x_k| \leq 265$
   Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0
   Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 3 nebo 1
   Sturmova posloupnost: $M(x) = x^5 + 11x^4 - 15x^3 - 155x^2 + 134x + 264$, $M_1(x) = 5x^4 + 44x^3 - 45x^2 - 310x + 134$, $M_2(x) = 25,36x^3 - 73,2x^2 - 243,6x - 205,04$, $M_3(x) = 82,3172x^2 - 14,4449x - 373,0610$, $M_4(x) = 115,0428x - 146,8697$,

$M_5(x) = 257,3379$
$N(-\infty) = 5$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ leží 1 kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^5 + 11x^4 - 15x^3 - 155x^2 + 134x + 264$, $P^1(x) = x^5 - 151x^4 + 3903x^3 - 33853x^2 + 99796x - 69696$, $P^2(x) = x^5 - 14995x^4 + 5209395x^3 - 388066225x^2 + 5,2404.10^9x - 4,8575.10^9$.
Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 11,0659$, $|x_2| = 4,3173$, $|x_3| = 2,9379$, $|x_4| = 1,9170$, $|x_5| = 0,9812$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -11$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$

3. $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$

Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{4}{9} \leq |x_k| \leq 16$
Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 3 nebo 1
Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0
Sturmova posloupnost: $M(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$, $M_1(x) = 5x^4 - 12x^3 - 15x^2 + 30x + 4$, $M_2(x) = 3,44x^3 - 7,2x^2 - 6,8x + 11,52$, $M_3(x) = 8,3288x^2 - 10,2217x - 9,1401$, $M_4(x) = 6,6800x - 8,2517$, $M_5(x) = 9,0575$
$N(-\infty) = 5$, $N(-10) = 5$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 5 kořenů a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$, $P^1(x) = x^5 - 19x^4 + 123x^3 - 337x^2 + 376x - 144$, $P^2(x) = x^5 - 115x^4 + 3075x^3 - 26545x^2 + 44320x - 20736$.
Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 3,2747$, $|x_2| = 2,2740$, $|x_3| = 1,7141$, $|x_4| = 1,1367$, $|x_5| = 0,8270$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$

4. $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$

Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{3}{8} \leq |x_k| \leq 21$
Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 3 nebo 1
Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 0
Sturmova posloupnost: $M(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$, $M_1(x) = 3x^2 - 18x + 20$, $M_2(x) = \frac{14}{3}x - 8$, $M_3(x) = 2,0408$
$N(-\infty) = 3$, $N(-10) = 3$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 3 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$, $P^1(x) = x^3 - 41x^2 + 184x - 144$, $P^2(x) = x^3 - 1313x^2 + 22048x - 20736$.
Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 6,0196$, $|x_2| = 2,0243$, $|x_3| = 0,9848$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$

5. $80x^4 - 164x^3 - 240x^2 + 13x + 5 = 0$

Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{1}{49} \doteq 0,02 \leq |x_k| \leq 4$
Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0
Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2
Sturmova posloupnost: $M(x) = 80x^4 - 164x^3 - 240x^2 + 13x + 5$, $M_1(x) = 320x^3 - 492x^2 - 480x + 13$, $M_2(x) = 183,0375x^2 + 51,75x - 6,6656$, $M_3(x) = 303,6646x + 8,2118$, $M_4(x) = 7,9312$
$N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10\rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = 80x^4 - 164x^3 - 240x^2 + 13x + 5$, $P^1(x) = 6400x^4 - 65296x^3 - 62664x^2 - 2569x + 25$, $P^2(x) = 40960000x^4 - 3,4615.10^9x^3 + 3,5916.10^9x^2 - 3546561x + 625.$
Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 3,0320$, $|x_2| = 1,0093$, $|x_3| = 0,1763$, $|x_4| = 0,1159$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = 3,0225$, $x_2 = -1,0122$, $x_3 = 0,1641$, $x_4 = -0,1245$

6. $20x^4 - 48x^3 - 389x^2 - 288x + 36 = 0$

Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{36}{425} \doteq 0,09 \leq |x_k| \leq \frac{409}{20} = 20,45$
Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0
Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2
Sturmova posloupnost: $M(x) = 20x^4 - 48x^3 - 389x^2 - 288x + 36$, $M_1(x) = 80x^3 - 144x^2 - 778x - 288$, $M_2(x) = 216,1x^2 + 332,7x + 7,2$, $M_3(x) = 369,3472x + 279,0986$, $M_4(x) = 120,8102$
$N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10\rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = 20x^4 - 48x^3 - 389x^2 - 288x + 36$, $P^1(x) = 400x^4 - 17864x^3 + 125113x^2 - 110952x + 1296$, $P^2(x) = 160000x^4 - 219032096x^3 + 1,1690.10^{10}x^2 - 1,1986.10^{10}x + 1679616.$
Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 6,0827$, $|x_2| = 2,7029$, $|x_3| = 1,0063$, $|x_4| = 0,1088$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = 6,0200$, $x_2 = -2,7176$, $x_3 = -1,0112$, $x_4 = 0,1088$

7. $2x^4 + 70x^3 + 290x^2 + 160x + 48 = 0$

Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{24}{169} \doteq 0,14 \leq |x_k| \leq 146$
Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 0
Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 4 nebo 2 nebo 0
Sturmova posloupnost: $M(x) = 2x^4 + 70x^3 + 290x^2 + 160x + 48$, $M_1(x) = 8x^3 + 210x^2 + 580x + 160$, $M_2(x) = 314,4x^2 + 1148,7x + 302$, $M_3(x) = 88,2x + 13,7$, $M_4(x) = -131,8$
$N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 3$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ leží 1 kořen, na intervalu $\langle -10, 10\rangle$ leží 3 kořeny a na intervalu

$(10, \infty)$ neleží žádný kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = 2x^4 + 70x^3 + 290x^2 + 160x + 48$, $P^1(x) = 4x^4 - 3740x^3 + 61892x^2 + 2240x + 2304$, $P^2(x) = 16x^4 - 13492464x^3 + 3,8474.10^9x^2 + 280180736x + 5308416$.
Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 30,3035$, $|x_2| = 4,1093$, $|x_3| = 2,2040$, $|x_4| = 1,5740$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -30,3009$, $x_2 = -4,1099$, $x_3 = -0,2946 + 0,3255j$, $x_4 = -0,2946 - 0,3255j$

8. $x^3 + 9x^2 - 306x - 3240 = 0$

Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{180}{197} \doteq 0,91 \leq |x_k| \leq 3241$
Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 1
Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0
Sturmova posloupnost: $M(x) = x^3 + 9x^2 - 306x - 3240$, $M_1(x) = 3x^2 - 18x - 306$, $M_2(x) = 222x + 2934$, $M_3(x) = 199,86$
$N(-\infty) = 3$, $N(-10) = 1$, $N(10) = 1$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ leží 2 kořeny, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ neleží žádný kořen a na intervalu $(10, \infty)$ leží 1 kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^3 + 9x^2 - 306x - 3240$, $P^1(x) = x^3 - 693x^2 + 151956x - 10497600$, $P^2(x) = x^3 - 176337x^2 + 8,5410.10^9x - 1,102.10^{14}$.
Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 20,4921$, $|x_2| = 14,8351$, $|x_3| = 10,6578$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -15$, $x_2 = -12$, $x_3 = 18$

9. $256x^4 - 96x^3 - 192x^2 + 46x + 21 = 0$

Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{21}{277} \doteq 0,08 \leq |x_k| \leq \frac{7}{4}$
Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0
Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 2 nebo 0
Sturmova posloupnost: $M(x) = 256x^4 - 96x^3 - 192x^2 + 46x + 21$, $M_1(x) = 1024x^3 - 288x^2 - 384x + 46$, $M_2(x) = 102,75x^2 - 25,5x - 22,078$, $M_3(x) = 172,376x - 38,722$, $M_4(x) = 22,621$
$N(-\infty) = 4$, $N(-10) = 4$, $N(10) = 0$, $N(\infty) = 0$, proto na intervalu $(-\infty, -10)$ neleží žádný kořen, na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$ leží 4 kořeny a na intervalu $(10, \infty)$ neleží žádný kořen
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = 256x^4 - 96x^3 - 192x^2 + 46x + 21$, $P^1(x) = 65536x^4 - 107520x^3 + 56448x^2 - 10180x + 441$, $P^2(x) = 4,2950.10^9x^4 - 4,1618.10^9x^3 - 1,0551.10^9x^2 - 53845264x + 194481$.
Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 0,9922$, $|x_2| = 0,7096$, $|x_3| = 0,4753$, $|x_4| = 0,2452$
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_1 = -0,75$, $x_2 = -0,25$, $x_3 = 0,5$, $x_4 = 0,875$

10. $x^5 - 13x^4 + 63x^3 - 139x^2 + 136x - 48 = 0$

Řešení: Odhad velikosti kořenů: $\frac{48}{187} \doteq 0,26 \leq |x_k| \leq 140$
Odhad počtu kladných kořenů podle Descartovy věty: 5 nebo 3 nebo 1

Odhad počtu záporných kořenů podle Descartovy věty: 0
Sturmova posloupnost: $M(x) = x^5 - 13x^4 + 63x^3 - 139x^2 + 136x - 48$, $M_1(x) = 5x^4 - 52x^3 + 189x^2 - 278x + 136$, $M_2(x) = 1,84x^3 - 14,88x^2 + 35,76x - 22,72$, $M_3(x) = 1,7013x^2 - 8,5066x + 6,8053$, $M_4(x) = 0$ – všechny hodnoty jsou zaokrouhleny, avšak $M_4(x)$ musí být při přesném dělení nulový polynom.
To ale znamená, že polynom nemá jen prosté kořeny, a proto nemůžeme odhad pomocí Sturmovy posloupnosti použít.
Posloupnost polynomů pro metodu Graeff-Lobačevského: $P^0(x) = x^5 - 13x^4 + 63x^3 - 139x^2 + 136x - 48$, $P^1(x) = x^5 - 43x^4 + 627x^3 - 3443x^2 + 5152x - 2304$, $P^2(x) = x^5 - 595x^4 + 108195x^3 - 5523025x^2 + 10723840x - 5308416$.
Absolutní hodnoty kořenů jsou: $|x_1| = 4,9389$, $|x_2| = 3,6722$, $|x_3| = 2,6730$, $|x_4| = 1,1804$, $|x_5| = 0,8388$ – všimněte si, že jsme získali pět různých kořenů, přitom ve skutečnosti jsou některé kořeny násobné!
Kořeny ve skutečnosti jsou: $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 3$, $x_{4,5} = 4$

Příklad k zamyšlení: Je dána rovnice $a(x-1)^6 + b(x-3)^4 - 1 = 0$, kde $a, b \geq 1$. Pro alespoň jednu volbu parametrů $a, b \geq 1$ najděte alespoň jedno reálné řešení této rovnice, nebo dokažte, že zadaná rovnice pro žádnou volbu parametrů $a, b \geq 1$ žádné reálné řešení nemá.

Kapitola 4

Vlastní čísla

Pro následující matice najděte charakteristický polynom. Poté vhodnou metodou najděte dominantní vlastní číslo; volte $x^{(0)} = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Určete polohu ostatních vlastních čísel a pokuste se je najít.

1. $$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 25\lambda^3 + 144\lambda^2 + 218\lambda - 1787 = 0$. Matice je symetrická, proto pro hledání dominantního vlastního čísla použijeme metodu Rayleighova podílu. Použít bychom mohli i mocninnou metodu. Dostáváme $\lambda_1^{(1)} = 11,75$, $\lambda_1^{(2)} = 14,6036$, $\lambda_1^{(3)} = 14,8622$, $\lambda_1^{(4)} = 14,8799$, $\lambda_1^{(5)} = 14,8811$. Vlastní čísla zadané matice jsou $\lambda_1 = 14,8812$, $\lambda_2 = 9,4758$, $\lambda_3 = 3,8959$, $\lambda_4 = -3,2529$.

2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & -9 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 176\lambda^2 + 521\lambda + 1278 = 0$. Matice není symetrická, proto pro hledání dominantního vlastního čísla použijeme mocninnou metodu. Dostáváme $\lambda_1^{(1)} = 25$, $\lambda_1^{(2)} = 9,4$, $\lambda_1^{(3)} = 17,8638$, $\lambda_1^{(4)} = 9,9857$, $\ldots$, $\lambda_1^{(29)} = 15,1035$, $\lambda_1^{(30)} = 12,3622$. Vlastní čísla zadané matice jsou $\lambda_1 = 13,6114$, $\lambda_2 = -12,6045$, $\lambda_3 = 4,6092$, $\lambda_4 = -1,6161$.

3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 42 & -97 & 13 \\ 0 & 1 & 26 & 150 \\ 0 & 0 & 5 & 303 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - 16\lambda + 5 = 0$. Není ovšem nutné počítat ho pomocí numerických metod, protože zadaná matice je dolní trojúhelníková matice, tj. charakteristický polynom je $(1-\lambda)^3(5-\lambda) = 0$. Vlastní čísla můžeme číst rovnou ze zadání: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$.

4. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 42 & -97 & 13 \\ 0 & 1 & 26 & 150 \\ 0 & 0 & 5 & 303 \end{pmatrix}$$

Řešení: I když tato matice vznikla z předcházející pouhou záměnou řádků, jedná se o jiný problém vlastních čísel! Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 371\lambda^3 + 21043\lambda^2 - 328832\lambda - 5 = 0$. Matice není symetrická, proto pro hledání dominantního vlastního čísla použijeme mocninnou metodu. Dostáváme $\lambda_1^{(1)} = 308$, $\lambda_1^{(2)} = 305,8734$, $\lambda_1^{(3)} = 305,6941$, $\lambda_1^{(4)} = 305,6800$. Vlastní čísla zadané matice jsou $\lambda_1 = 305,6790$, $\lambda_2 = 32,6605 + 3,059j$, $\lambda_3 = 32,6605 - 3,0059j$, $\lambda_4 = -1,5205.10^{-5}$.

5. $$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 7 \\ -6 & 3 & 0 & 8 \\ -4 & 7 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 13\lambda^3 - 6\lambda^2 + 990\lambda - 348 = 0$. Matice není symetrická, proto pro hledání dominantního vlastního čísla použijeme mocninnou metodu. Dostáváme $\lambda_1^{(1)} = 18$, $\lambda_1^{(2)} = 13,1667$, $\lambda_1^{(3)} = 10,2236$, $\lambda_1^{(4)} = 6,3760$, $\lambda_1^{(5)} = 15,9852$, $\ldots$, $\lambda_1^{(49)} = 11,9827$, $\lambda_1^{(50)} = 8,6693$, $\ldots$, $\lambda_1^{(499)} = 6,1859$, $\lambda_1^{(500)} = 17,2530$. Vlastní čísla zadané matice jsou totiž $\lambda_1 = 9,9731 + 5,9719j$, $\lambda_2 = 9,9731 - 5,9719j$, $\lambda_3 = -7,2991$, $\lambda_4 = 0,3528$, což způsobuje, že Jacobiho metoda neumí dominantní vlastní číslo určit.

6. $$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ -9 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 26\lambda^3 + 250\lambda^2 - 1295\lambda - 282 = 0$. Matice není symetrická, proto pro hledání dominantního vlastního čísla použijeme mocninnou metodu. Dostáváme $\lambda_1^{(1)} = 21$, $\lambda_1^{(2)} = 11,7619$, $\lambda_1^{(3)} = 11,6154$, $\lambda_1^{(4)} = 14,5769$, $\lambda_1^{(5)} = 16,4538$, $\ldots$, $\lambda_1^{(21)} = 15,2565$, $\lambda_1^{(22)} = 15,2563$. Vlastní čísla zadané matice jsou $\lambda_1 = 15,2567$, $\lambda_2 = 5,4762 + 7,6416j$, $\lambda_3 = 5,4762 - 7,6416j$, $\lambda_4 = -0,2091$.

7. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 46\lambda^2 - 126\lambda + 15 = 0$. Matice není symetrická, proto pro hledání dominantního vlastního čísla použijeme mocninnou metodu. Dostáváme $\lambda_1^{(1)} = 16$, $\lambda_1^{(2)} = 8,3125$, $\lambda_1^{(3)} = 7,5865$, $\lambda_1^{(4)} = 8,0466$, $\lambda_1^{(5)} = 7,7512$, $\ldots \lambda_1^{(12)} = 7,8611$, $\lambda_1^{(13)} = 7,8603$. Vlastní čísla zadané matice jsou $\lambda_1 = 7,8605$, $\lambda_2 = -3,9874 + 0,8939\jmath$, $\lambda_3 = -3,9874 - 0,8939\jmath$, $\lambda_4 = 0,1143$.

8. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 3\lambda^3 - 65\lambda^2 - 447\lambda - 1028 = 0$. Matice není symetrická, proto pro hledání dominantního vlastního čísla použijeme mocninnou metodu. Dostáváme $\lambda_1^{(1)} = 16$, $\lambda_1^{(2)} = 13,5$, $\lambda_1^{(3)} = 10,997$, $\lambda_1^{(4)} = 12,3597$, $\lambda_1^{(5)} = 12,1101$, $\ldots$, $\lambda_1^{(8)} = 12,0811$, $\lambda_1^{(9)} = 12,0557$. Vlastní čísla zadané matice jsou $\lambda_1 = 12,0548$, $\lambda_2 = -2,8124 + 4,1173\jmath$, $\lambda_3 = -2,8124 - 4,1173\jmath$, $\lambda_4 = -3,4301$.

9. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - 4\lambda = 0$. Není však nutné jej určovat numericky, stačí si uvědomit, jak bude vypadat matice $A - \lambda I$. V posledním řádku bude mít samé nuly a $(A - \lambda I)_{44} = 4 - \lambda$. Determinant proto bude možné jednoduše rozvinout podle posledního řádku. Dostaneme

$$|A - \lambda I| = (-1)^8 \cdot (4 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Vlastní čísla můžeme číst rovnou: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Pokud bychom hledali dominantní vlastní číslo mocninnou metodou, dostáváme $\lambda_1^{(i)} = 4$ pro $\forall i \in \mathbb{N}$.

10. $$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^4 - 3\lambda^3 - 65\lambda^2 - 447\lambda - 1028 = 0$. Matice není symetrická, proto pro hledání dominantního vlastního čísla použijeme mocninnou metodu. Dostáváme $\lambda_1^{(1)} = 14$, $\lambda_1^{(2)} = 10,7857$, $\lambda_1^{(3)} = 10,2980$, $\lambda_1^{(4)} = 9,9871$, $\lambda_1^{(5)} = 9,9096$, $\lambda_1^{(6)} = 9,8761$, $\lambda_1^{(7)} = 9,8643$. Vlastní čísla zadané matice jsou $\lambda_1 = 9,8572$, $\lambda_2 = 3,6793$, $\lambda_3 = -1,2683 + 0,6779j$, $\lambda_4 = -1,2683 - 0,6779j$.

Kapitola 5

Obyčejné diferenciální rovnice

5.1 Jednokrokové metody

Jednokrokové metody – *Eulerova* a její *modifikace* a *metoda Runge-Kutty 4. řádu* – byly probrány v předmětu *Matematika 3*. Pro připomenutí těchto metod můžete použít rovnice uvedené v následujícím odstavci. Nezapomeňte však, že výsledky získané jednotlivými metodami se mohou *výrazně* lišit!

5.2 Vícekrokové metody

Následující počáteční úlohy řešte na intervalu $\langle a, b\rangle$ s krokem h takto: Nejprve metodou Runge–Kutty 4. řádu dopočítejte všechny potřebné hodnoty a poté najděte zbývající hodnoty pomocí Adamsovy extrapolační metody třetího, poté čtvrtého a poté pátého řádu. Dále najděte zbývající hodnoty pomocí metody prediktor – korektor, kde za prediktor zvolte $y_{n+1}^{0} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$ a za korektor $y_{n+1}^{k+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1}^{k} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$.

1. $y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,2$

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
Runge–Kutta	1	$0,8213$	$0,6897$	$0,6112$	$0,5907$	$0,6321$
Adams 3. řádu	1	$0,8213$	$0,6897$	$0,6116$	$0,5913$	$0,6329$
Adams 4. řádu	1	$0,8213$	$0,6897$	$0,6112$	$0,5906$	$0,6320$
Adams 5. řádu	1	$0,8213$	$0,6897$	$0,6112$	$0,5907$	$0,6321$
prediktor – korektor	1	$0,8213$	$0,6897$	$0,6112$	$0,5907$	$0,6322$

2. $y' = x^2 + 4y$, $y(0) = 0$, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,2$

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
Runge–Kutta	0	$0,0033$	$0,0334$	$0,1476$	$0,4731$	$1,2926$
Adams 3. řádu	0	$0,0033$	$0,0334$	$0,1319$	$0,3981$	$1,0418$
Adams 4. řádu	0	$0,0033$	$0,0334$	$0,1476$	$0,4553$	$1,2025$
Adams 5. řádu	0	$0,0033$	$0,0334$	$0,1476$	$0,4731$	$1,2726$
prediktor – korektor	0	$0,0033$	$0,0334$	$0,1476$	$0,4709$	$1,2592$

3. $y' = \mathrm{e}^x + y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,2$

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
Runge–Kutta	1	$1,4657$	$2,0885$	$2,9154$	$4,0059$	$5,4365$
Adams 3. řádu	1	$1,4657$	$2,0885$	$2,9111$	$3,9947$	$5,4153$
Adams 4. řádu	1	$1,4657$	$2,0885$	$2,9154$	$4,0049$	$5,4336$
Adams 5. řádu	1	$1,4657$	$2,0885$	$2,9154$	$4,0059$	$5,4362$
prediktor – korektor	1	$1,4657$	$2,0885$	$2,9154$	$4,0059$	$5,4363$

4. $y' = \mathrm{e}^{x+1} - 2y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,2$

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
Runge–Kutta	1	$1,1697$	$1,3940$	$1,6794$	$2,0356$	$2,4759$
Adams 3. řádu	1	$1,1697$	$1,3940$	$1,6781$	$2,0340$	$2,4734$
Adams 4. řádu	1	$1,1697$	$1,3940$	$1,6794$	$2,0356$	$2,4757$
Adams 5. řádu	1	$1,1697$	$1,3940$	$1,6794$	$2,0356$	$2,4757$
prediktor – korektor	1	$1,1697$	$1,3940$	$1,6794$	$2,0356$	$2,4758$

5. $y' = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 4y$, $y(0) = 0$, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,2$

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
Runge–Kutta	0	$0,3192$	$1,0622$	$2,7506$	$6,5439$	$15,0193$
Adams 3. řádu	0	$0,3192$	$1,0622$	$2,6073$	$5,8624$	$12,7381$
Adams 4. řádu	0	$0,3192$	$1,0622$	$2,7506$	$6,3820$	$14,2008$
Adams 5. řádu	0	$0,3192$	$1,0622$	$2,7506$	$6,5439$	$14,8375$
prediktor – korektor	0	$0,3192$	$1,0622$	$2,7506$	$6,5248$	$14,7177$

6. $y' = \mathrm{e}^{x^2} + y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Runge–Kutta	1	1,4456	2,0084	2,7379	3,7061	5,0257
Adams 3. řádu	1	1,4456	2,0084	2,7318	3,6871	4,9819
Adams 4. řádu	1	1,4456	2,0084	2,7379	3,7018	5,0115
Adams 5. řádu	1	1,4456	2,0084	2,7379	3,7061	5,0222
prediktor – korektor	1	1,4456	2,0084	2,7379	3,7063	5,0252

7. $y' = \mathrm{e}^{x^2} - y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Runge–Kutta	1	1,0026	1,0204	1,0701	1,1754	1,3759
Adams 3. řádu	1	1,0026	1,0204	1,0689	1,1709	1,3646
Adams 4. řádu	1	1,0026	1,0204	1,0701	1,1731	1,3704
Adams 5. řádu	1	1,0026	1,0204	1,0701	1,1754	1,3741
prediktor – korektor	1	1,0026	1,0204	1,0701	1,1758	1,3776

8. $y' = x^3 - 4y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Runge–Kutta	1	0,4521	0,2089	0,1137	0,1024	0,1524
Adams 3. řádu	1	0,4521	0,2089	0,0599	0,1066	0,0814
Adams 4. řádu	1	0,4521	0,2089	0,1137	0,1285	0,1422
Adams 5. řádu	1	0,4521	0,2089	0,1137	0,1024	0,1382
prediktor – korektor	1	0,4521	0,2089	0,1137	0,0929	0,1285

9. $y' = \frac{1}{2}x + y$, $y(0) = 2$, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Runge–Kutta	2	2,4535	3,0295	3,7553	4,6638	5,7956
Adams 3. řádu	2	2,4535	3,0295	3,7533	4,6586	5,7860
Adams 4. řádu	2	2,4535	3,0295	3,7553	4,6634	5,7945
Adams 5. řádu	2	2,4535	3,0295	3,7553	4,6638	5,7956
prediktor – korektor	2	2,4535	3,0295	3,7553	4,6638	5,7956

10. $y' = \frac{1}{10}x + y$, $y(0) = 2$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
Runge–Kutta	2	$2,4449$	$2,9928$	$3,6664$	$4,4936$	$5,5083$
Adams 3. řádu	2	$2,4449$	$2,9928$	$3,6647$	$4,4892$	$5,5002$
Adams 4. řádu	2	$2,4449$	$2,9928$	$3,6664$	$4,4933$	$5,5074$
Adams 5. řádu	2	$2,4449$	$2,9928$	$3,6646$	$4,4936$	$5,5083$
prediktor – korektor	2	$2,4449$	$2,9928$	$3,6664$	$4,4936$	$5,5083$

Kapitola 6

Okrajové úlohy

6.1 Metoda konečných diferencí

Metodou konečných diferencí s krokem h řešte následující okrajové úlohy:

6.1.1 Typ rovnice: $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$

1. $y'' + \frac{1}{x}y' - x^4 y = x$, $y(1) = 1$, $y(2) = 3$, $h = 0,25$

   Řešení: Samoadjungovaný tvar: $-(xy')' + x^5 y = -x^2$.
   Funkce $p = x$, $p' = 1$, $q = x^5$, $f = -x^2$ jsou na intervalu $< 1,2 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno.
   Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rrrcr} 2,6907y_1 & -1,3750y_2 & & = & 1,0273 \\ -1,3750y_1 & 3,4746y_2 & -1,6250y_3 & = & -0,1406 \\ & -1,6250y_2 & 4,5258y_3 & = & 5,4336 \end{array}$$

   Řešení:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
y_i	1	0,9271	1,0671	1,5837	3

   Úprava zadání: Řešte tutéž rovnici, avšak za podmínek $y(1) = 1$, $y(1,5) = 2$ a s krokem $h = 0,1$.

   Řešení: Samoadjungovaný tvar zůstává stejný: $-(xy')' + x^5 y = -x^2$.
   Funkce $p = x$, $p' = 1$, $q = x^5$, $f = -x^2$ jsou na intervalu $< 1;1,5 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno.
   Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rrrrcr}
2,2161y_1 & -1,1500y_2 & & & = & 1,0379 \\
-1,1500y_1 & 2,4249y_2 & -1,2500y_3 & & = & -0,0144 \\
 & -1,2500y_2 & 2,6371y_3 & -1,3500y_4 & = & -0,0169 \\
 & & -1,3500y_3 & 2,8538y_4 & = & 2,8804
\end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_i	1	1,1458	1,3055	1,4899	1,7141	2

Úprava zadání: Řešte tutéž rovnici, avšak za podmínek $y(1) = 1$, $y(2) = 3$ a s krokem $h = 0,125$.

Řešení: Samoadjungovaný tvar zůstává stejný: $-(xy')' + x^5y = -x^2$.
Funkce $p = x$, $p' = 1$, $q = x^5$, $f = -x^2$ jsou na intervalu $< 1; 2 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno.
Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rrrcr}
2,2782y_1 & -1,1875y_2 & & = & 1,0427 \\
-1,1875y_1 & +2,5477y_2 & -1,3125y_3 & = & -0,0244 \\
-1,3125y_2 & +2,8268y_3 & -1,4375y_4 & = & -0,0295 \\
-1,4375y_3 & +3,1187y_4 & -1,5625y_5 & = & -0,0352 \\
-1,5625y_4 & +3,4270y_5 & -1,6875y_6 & = & -0,0413 \\
-1,6875y_5 & +3,7565y_6 & -1,8125y_7 & = & -0,0479 \\
 & -1,8125y_6 & +4,1121y_7 & = & 5,7576
\end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1,125	1,25	1,375	1,5	1,6250	1,75	1,875	2
y_i	1	0,9263	0,8990	0,9255	1,0198	1,2064	1,5302	2,0746	3

2. $y'' + 2xy' - x^3y = x^2$, $y(0) = 1$; $y(1) = 2$, $h = 0,25$

Řešení: Samoadjungovaný tvar: $-(\mathrm{e}^{x^2}y')' + x^3\mathrm{e}^{x^2}y = -x^2\mathrm{e}^{x^2}$.
Funkce $p = \mathrm{e}^{x^2}$, $p' = 2x\mathrm{e}^{x^2}$, $q = x^3\mathrm{e}^{x^2}$, $f = -x^2\mathrm{e}^{x^2}$ jsou na intervalu $< 0, 1 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno.
Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rrrcr}
2,1678y_1 & -1,1510y_2 & & = & 1,0116 \\
-1,1510y_1 & +2,6389y_2 & -1,4779y_3 & = & -0,0201 \\
 & -1,4779y_2 & +3,6745y_3 & = & 4,2390
\end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1	1,2897	1,5502	1,7771	2

Úprava zadání: Řešte tutéž rovnici, avšak za podmínek $y(0) = 1$; $y(1) = 3$ a s krokem $h = 0,25$.

Řešení: Samoadjungovaný tvar zůstává stejný: $-(\mathrm{e}^{x^2}y')' + x^3\mathrm{e}^{x^2}y = -x^2\mathrm{e}^{x^2}$. Funkce $p = \mathrm{e}^{x^2}$, $p' = 2x\mathrm{e}^{x^2}$, $q = x^3\mathrm{e}^{x^2}$, $f = -x^2\mathrm{e}^{x^2}$ jsou na intervalu $< 0,1 >$ spojité, $p > 0$, $q \geq 0$. Řešení úlohy tedy existuje a je právě jedno.
Hledaná soustava rovnic je:

$$\begin{array}{rrrcr} 2,1678y_1 & -1,1510y_2 & & = & 1,0116 \\ -1,1510y_1 & +2,6389y_2 & -1,4779y_3 & = & -0,0201 \\ & -1,4779y_2 & +3,6745y_3 & = & 6,3893 \end{array}$$

Řešení:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1
y_i	1	$1,6101$	$2,1535$	$2,6050$	3

3. $y'' + \frac{1}{x}y' - \mathrm{e}^x y = x^2$, $y(-1) = 1$; $y(1) = 2$, $h = 0,25$

Řešení: Rovnici nemůžeme převést na samoadjungovaný tvar, protože funkce $f_1(x) = \frac{1}{x}$ není na intervalu $< -1; 1 >$ spojitá.

6.1.2 Typ rovnice: $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

1. $xy'' - y = x^2 + 1$, $y(1) = 1$, $y(2) + 2y'(2) = 2$, $h = 0,25$

Řešení: Funkce $a_0 = x$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $f = x^2 + 1$ jsou spojité na intervalu $< 0,1 >$ a funkce $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in < 1,2 >$. Dále jsou splněny podmínky $a_0(x) \geq c > 0$, $a_2(x) \leq 0$ pro všechna $x \in < a,b >$. Podobně je $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$ $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\alpha_2| + |\beta_2| > 0$.
Úloha má tedy právě jedno řešení a diskrétní aproximace získaná pomocí rovnic uvedených v textu konverguje k tomuto řešení.
Z první počáteční podmínky vyplývá, že $y_0 = 1$. Ze druhé počáteční podmínky máme $4y_2 - 16y_3 + 14y_4 = 2$ a celkem tedy hledáme řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rrrrrcl} y_0 & & & & & = & 1 \\ 20y_0 & -41y_1 & +20y_2 & & & = & 2{,}5625 \\ & 24y_1 & -49y_2 & +24y_3 & & = & 3{,}25 \\ & & 28y_2 & +57y_3 & +28y_4 & = & 4{,}0625 \\ & & 4y_2 & -16y_3 & +14y_4 & = & 2 \end{array}$$

Řešením této soustavy získáme:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	$1,25$	$1,5$	$1,75$	2
y_i	1	$0,0,6113$	$0,3812$	$0,3025$	$0,3796$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, ovšem za počátečních podmínek $y(0) = 1$; $y(1) + 2y'(1) = 2$. Krok ponechte $h = 0,25$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že v bodě $x = 0$ není splněna podmínka, že $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in < 0, 1 >$, není zadaná počáteční úloha metodou popsanou v textu řešitelná.

2. $xy'' + y = x^2 + x - 1$, $y(1) = 1$, $y(2) + 2y'(2) = 2$, $h = 0,25$

Řešení: Vzhledem k tomu, že funkce $a_2(x) = 1 \not\leq 0$ pro $x \in < 1, 2 >$, nelze při řešení zadané počáteční úlohy použít metodu popsanou v učebním textu.

3. $\mathrm{e}^x y'' + xy' - x^2 y = x + \mathrm{e}^x$, $y(0) + y'(0) = 1$, $2y(1) + 3y'(1) = 4$, $h = 0,25$

Řešení: Jsou splněny všechny podmínky konvergence a existence jednoznačného řešení.
Z první počáteční podmínky vyplývá, že $-5y_0 + 8y_1 - 2y_2 = 1$. Ze druhé počáteční podmínky máme $6y_2 - 24y_3 + 20y_4 = 4$ a celkem tedy hledáme řešení soustavy rovnic:

$$
\begin{array}{cccccccc}
-5y_0 & +8y_1 & -2y_2 & & & = & 1 \\
20,0444y_0 & -41,1513y_1 & +21,0444y_2 & & & = & 1{,}5340 \\
 & 25,3795y_1 & -53,0091y_2 & +27,3795y_3 & & = & 2{,}1487 \\
 & & 32,3720y_2 & -68,3065y_3 & +35,3720y_4 & = & 2{,}8670 \\
 & & 6y_2 & -24y_3 & +20y_4 & = & 4
\end{array}
$$

Řešením této soustavy získáme:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	2,7045	2,3273	2,0477	1,8858	1,8486

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, ovšem za počátečních podmínek $y(0)+y'(0) = 1$; $2y(0,5) + 3y'(0,5) = 4$. Krok ponechte na $h = 0,25$.

Řešení: Jsou splněny všechny podmínky konvergence a existence jednoznačného řešení.
Z první počáteční podmínky vyplývá, že $-14y_0 + 20y_1 - 5y_2 = 1$. Ze druhé počáteční podmínky máme $15y_2 - 60y_3 + 47y_4 = 4$ a celkem tedy hledáme řešení soustavy rovnic:

$$
\begin{aligned}
-14y_0 + 20y_1 - 5y_2 &= 1 \\
110,0171y_0 - 221,0442y_1 + 111,0171y_2 &= 1{,}2052 \\
121,1403y_1 - 244,3206y_2 + 123,1403y_3 &= 1{,}4214 \\
133,4859y_2 - 270,0618y_3 + 136,4859y_4 &= 1{,}6499 \\
147,1825y_3 - 298,5249y_4 + 151,1825y_5 &= 1{,}8918 \\
6y_2 - 24y_3 + 20y_4 &= 4
\end{aligned}
$$

Řešením této soustavy získáme:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$
y_i	$1,0342$	$1,0362$	$1,0492$	$1,0739$	$1,1108$	$1,1604$

6.1.3 Typ rovnice: $-y'' + \sigma(x)y = f(x)$

1. $-y'' + \frac{1}{x}y = \mathrm{e}^x + 1,\ y(-1) = 0,\ y(1) = 1,\ h = 0,5$

   Řešení: Metodu konečných diferencí v tomto případě nelze použít, protože funkce $\sigma(x) = \frac{1}{x}$ není na intervalu $< -1, 1 >$ spojitá (navíc na tomto intervalu neplatí $\sigma(x) \geq 0$), a nevíme tedy, zda existuje právě jedno řešení dané úlohy.

2. $-y'' + \mathrm{e}^{-x}y = \frac{x}{x^2-1},\ y(0) = 1,\ y(2) = 2,\ h = 0,5$

   Řešení: Metodu konečných diferencí v tomto případě nelze použít, protože funkce $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ není na intervalu $< 0, 2 >$ spojitá, a nevíme tedy, zda existuje právě jedno řešení dané úlohy.

3. $-y'' + \mathrm{e}^{-x}y = x,\ y(0) = 1,\ y(2) = 2,\ h = 0,5$

   Řešení: Po dosazení do příslušných vztahů získáme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rrrcl} 2,1516y_1 & -y_2 & & = & 1,1250 \\ -y_1 & +2,0920y_2 & -y_3 & = & 0,2500 \\ & -y_2 & 2,0558y_3 & = & 2,3750 \end{array}$$

   Jejím řešením jsou $y_1 = 1,3084$, $y_2 = 1,6902$, $y_3 = 1,9774$. Spolu s okrajovými podmínkami máme:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$0,5$	1	$1,5$	2
y_i	1	$1,3084$	$1,6902$	$1,9774$	2

   Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, ale s krokem $h = 0,25$

   Řešení: Po dosazení do příslušných vztahů získáme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} 2,0487y_1 - y_2 & = & 1,0156 \\ -y_1 + 2,0379y_2 - y_3 & = & 0,0313 \\ -y_2 + 2,0295y_3 - y_4 & = & 0,0469 \\ -y_3 + 2,0230y_4 - y_5 & = & 0,0625 \\ -y_4 + 2,0179y_5 - y_6 & = & 0,0781 \\ -y_5 + 2,0139y_6 - y_7 & = & 0,0938 \\ -y_6 + 2,0109y_7 & = & 2,1094 \end{array}$$

Její řešení je spolu s okrajovými podmínkami uvedeno v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1	$1,25$	$1,5$	$1,75$	2
y_i	1	$1,1343$	$1,3082$	$1,5005$	$1,6902$	$1,8562$	$1,9773$	$2,0323$	2

Kapitola 7

Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

7.1 Eulerova metoda

Eulerovou metodou najděte na intervalu $< a, b >$ s krokem h řešení následujících soustav diferenciálních rovnic. Funkce u, v, w, y, z jsou funkcemi proměnné x.

1. $y' = y + 4z$
   $z' = y + z,$
   když $y(0) = 1$, $z(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	1	2
1	0,25	3,25	2,75
2	0,5	6,8125	4,25
3	0,75	12,7656	7,0156
4	1	22,9727	11,9609

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s krokem $h = 0,125$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	1	2
1	0,125	2,1250	2,375
2	0,25	3,5781	2,9375
3	0,375	5,4941	3,7520
4	0,5	8,0569	4,9077
5	0,625	11,5179	6,5283
6	0,75	16,2217	8,7841
7	0,875	22,6415	11,9098
8	1	31,4265	16,2287

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, avšak za předpokladu, že $z(0) = 1$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,25	2,25	1,5
2	0,5	4,3125	2,4375
3	0,75	7,8281	4,1250
4	1	13,9102	7,1133

2. $y' = -7y + z$
   $z' = -2y - 5z,$
   když $y(1) = 0$, $z(1) = 1$, $a = 1$, $b = 2$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	1	0	1
1	1,25	0,25	-0,25
2	1,5	-0,25	-0,0625
3	1,75	0,1719	0,1406
4	2	-0,0938	-0,1211

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 1; 1,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	1	0	1
1	1,1	0,1	0,5
2	1,2	0,08	0,23
3	1,3	0,047	0,099
4	1,4	0,024	0,0401
5	1,5	0,0112	0,0153

3. $y' = 4y - z$
   $z' = y + 2z$,
   když $y(0) = 0$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	0	1
1	0,25	-0,25	1,5
2	0,5	-0,875	2,1875
3	0,75	-2,2969	3,0625
4	1	-5,3594	4,0195

   Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	0	1
1	0,1	-0,1	1,2
2	0,2	-0,26	1,43
3	0,3	-0,507	1,69
4	0,4	-0,8788	1,9773
5	0,5	-1,4281	2,2849

4. $y' = z$
   $z' = -y + \frac{1}{\cos x}$,
   když $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,25	1,25	1
2	0,5	1,5	0,9455
3	0,75	1,7364	0,8554
4	1	1,9502	0,7630

   Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,1	1,1	1
2	0,2	1,2	0,9905
3	0,3	1,2991	0,9725
4	0,4	1,3963	0,9473
5	0,5	1,4910	0,9162

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,05$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,05	1,05	1
2	0,1	1,1	0,9976
3	0,15	1,1499	0,9928
4	0,2	1,1995	0,9859
5	0,25	1,2488	0,9769
6	0,3	1,2977	0,9661
7	0,35	1,3460	0,9535
8	0,4	1,3936	0,9395
9	0,45	1,4406	0,9241
10	0,5	1,4868	0,9076

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, avšak za počátečních podmínek $y(1) = 1$, $z(1) = 1$ na intervalu $< 1; 2 >$ s krokem $h = 0,25$.

Řešení: Takto formulovanou úlohu nelze touto metodou řešit, protože funkce $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ není na intervalu $< 1; 2 >$ spojitá.

5. $u' = 2u + 4v + \cos x$
   $v' = -u - 2v + \sin x$,
   když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v
0	0	0	1
1	0,25	1,25	0,5
2	0,5	2,6172	-0,0006
3	0,75	4,1446	-0,5348
4	1	5,8650	-1,1331

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	0	1
1	0,1	0,5000	0,8000
2	0,2	1,0195	0,6000
3	0,3	1,5614	0,3979
4	0,4	2,1284	0,1917
5	0,5	2,7229	-0,0205

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,05$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	0	1
1	0,05	0,25	0,9000
2	0,1	0,5049	0,8000
3	0,15	0,7652	0,6997
4	0,2	1,0311	0,5990
5	0,25	1,3030	0,4975
6	0,3	1,5812	0,3949
7	0,35	1,8661	0,2912
8	0,4	2,1579	0,1859
9	0,45	2,4569	0,0789
10	0,5	2,7634	-0,0301

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$, avšak za počátečních podmínek $u(0) = 1$ a $v(0) = 1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	z
0	0	1	1
1	0,1	1,7000	0,7000
2	0,2	2,4195	0,4000
3	0,3	3,1614	0,0979
4	0,4	3,9284	-0,2083
5	0,5	4,7229	-0,5205

6. $u' = -2u + v - 2w$
   $v' = u - 2v + 2w$
   $w' = 3u - 3v + 5w,$
   když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $w(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	0	1	2
1	0,25	-0,75	1,5	3,75
2	0,5	-1,875	2,4375	6,75
3	0,75	-3,7031	4,1250	11,9531
4	1	-6,7969	7,1133	21,0234

7. $u' = v + w + x$
   $v' = u + v - w$
   $w' = v + w,$
   když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	0	0	1
1	0,25	0,25	-0,25	1,25
2	0,5	0,5625	-0,5625	1,5
3	0,75	0,9219	-0,9375	1,7344
4	1	1,3086	-1,3750	1,9336

8. $u' = v + \sin x$
   $v' = u + \mathrm{e}^x$
   $w' = w + \cos x,$
   když $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	1	0	1
1	0,1	1	0,2	1,2
2	0,2	1,0300	0,4105	1,4195
3	0,3	1,0909	0,6357	1,6595
4	0,4	1,1840	0,8797	1,9209
5	0,5	1,3109	1,1473	2,2051

9. $u' = u + 2v + w$
   $v' = u + w$
   $w' = u + w,$
   když $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $w(0) = 0$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	1	2	0
1	0,1	1,5	2,1	0,1
2	0,2	2,08	2,26	0,26
3	0,3	2,766	2,4940	0,4940
4	0,4	3,5908	2,8200	0,8200
5	0,5	4,5959	3,2611	1,2611

10. $u' = -v$
$v' = -u$
$w' = u + v - w,$
když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	0	0	1
1	0,1	0	0	0,9
2	0,2	0	0	0,81
3	0,3	0	0	0,729
4	0,4	0	0	0,6561
5	0,5	0	0	0,5905

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na témže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 0$; opět s krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	0	0	0
1	0,1	0	0	0
2	0,2	0	0	0
3	0,3	0	0	0
4	0,4	0	0	0
5	0,5	0	0	0

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na témže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0,01$, $v(0) = 0,02$, $w(0) = 0,03$; opět s krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	v	w
0	0	0,01	0,02	0,03
1	0,1	0,008	0,0190	0,0300
2	0,2	0,0061	0,0182	0,0297
3	0,3	0,0043	0,0176	0,0292
4	0,4	0,0025	0,0172	0,0284
5	0,5	0,0008	0,0169	0,0276

7.2 Metody Rungeho – Kuttovy

Metodami Rungeho – Kutty najděte na intervalu $< a, b >$ s krokem h řešení následujících soustav diferenciálních rovnic. Funkce u, v, w, y, z jsou funkcemi proměnné x. Zadání jsou stejná jako v předcházející kapitole, číslování si odpovídá.

1. $y' = y + 4z$
   $z' = y + z$,
   když $y(0) = 1$, $z(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

   Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		2	
1	0,25	4,1187	$k_1 = 2,25$ $k_2 = 2,9063$ $k_3 = 3,1758$ $k_4 = 4,2979$ $\Delta y = 3,1187$	3,2275	$l_1 = 0,75$ $l_2 = 1,1250$ $l_3 = 1,2593$ $l_4 = 1,8574$ $\Delta z = 1,2275$
2	0,5	10,2706	$k_1 = 4,2572$ $k_2 = 5,7076$ $k_3 = 6,2698$ $k_4 = 8,6994$ $\Delta y = 6,1519$	6,0451	$l_1 = 1,8365$ $l_2 = 2,5983$ $l_3 = 2,8748$ $l_4 = 4,1227$ $\Delta z = 2,8176$
3	0,75	22,9351	$k_1 = 8,6127$ $k_2 = 11,7288$ $k_3 = 12,9115$ $k_4 = 18,0938$ $\Delta y = 12,6645$	12,1761	$l_1 = 4,0789$ $l_2 = 5,6654$ $l_3 = 6,2532$ $l_4 = 8,8701$ $\Delta z = 6,1310$
4	1	49,4485	$k_1 = 17,9099$ $k_2 = 24,5375$ $k_3 = 27,0340$ $k_4 = 38,0276$ $\Delta y = 26,5134$	25,2761	$l_1 = 8,7778$ $l_2 = 12,1138$ $l_3 = 13,3592$ $l_4 = 18,8761$ $\Delta z = 13,1000$

   Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s krokem $h = 0,125$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		2	
1	0,125	2,3136	$k_1 = 1,1250$ $k_2 = 1,2891$ $k_3 = 1,3228$ $k_4 = 1,5328$ $\Delta y = 1,3136$	2,4805	$l_1 = 0,3750$ $l_2 = 0,4688$ $l_3 = 0,4849$ $l_4 = 0,6010$ $\Delta z = 0,4805$
2	0,25	4,1238	$k_1 = 1,5295$ $k_2 = 1,7749$ $k_3 = 1,8235$ $k_4 = 2,1354$ $\Delta y = 1,8103$	3,2301	$l_1 = 0,5993$ $l_2 = 0,7323$ $l_3 = 0,7560$ $l_4 = 0,9217$ $\Delta z = 0,7496$
3	0,375	6,6686	$k_1 = 2,1305$ $k_2 = 2,4935$ $k_3 = 2,5638$ $k_4 = 3,0232$ $\Delta y = 2,5447$	4,3652	$l_1 = 0,9192$ $l_2 = 1,1099$ $l_3 = 1,1445$ $l_4 = 1,3828$ $\Delta z = 1,1351$
4	0,5	10,2924	$k_1 = 3,0162$ $k_2 = 3,5495$ $k_3 = 3,6515$ $k_4 = 4,3248$ $\Delta y = 3,6238$	6,0560	$l_1 = 1,3792$ $l_2 = 1,6539$ $l_3 = 1,7044$ $l_4 = 2,0487$ $\Delta z = 1,6908$
5	0,625	15,4955	$k_1 = 4,3145$ $k_2 = 5,0951$ $k_3 = 5,2432$ $k_4 = 6,2272$ $\Delta y = 5,2031$	8,5506	$l_1 = 2,0435$ $l_2 = 2,4409$ $l_3 = 2,5146$ $l_4 = 3,0133$ $\Delta z = 2,4946$
6	0,75	23,0043	$k_1 = 6,2122$ $k_2 = 7,3520$ $k_3 = 7,5672$ $k_4 = 9,0027$ $\Delta y = 7,5089$	12,2107	$l_1 = 3,0058$ $l_2 = 3,5819$ $l_3 = 3,6891$ $l_4 = 4,4128$ $\Delta z = 3,6601$
7	0,875	33,8752	$k_1 = 8,9809$ $k_2 = 10,6427$ $k_3 = 10,9556$ $k_4 = 13,0476$ $\Delta y = 10,8709$	17,5629	$l_1 = 4,4019$ $l_2 = 5,2383$ $l_3 = 5,3944$ $l_4 = 6,4456$ $\Delta z = 5,3522$
8	1	49,6438	$k_1 = 13,0158$ $k_2 = 15,4368$ $k_3 = 15,8919$ $k_4 = 18,9385$ $\Delta y = 15,7686$	25,3737	$l_1 = 6,4298$ $l_2 = 7,6451$ $l_3 = 7,8724$ $l_4 = 9,4003$ $\Delta z = 7,8108$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu, avšak za předpokladu, že $z(0) = 1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		1	
1	0,25	2,7827	$k_1 = 1,25$ $k_2 = 1,6563$ $k_3 = 1,8164$ $k_4 = 2,5010$ $\Delta y = 1,7827$	1,7808	$l_1 = 0,5$ $l_2 = 0,7188$ $l_3 = 0,7969$ $l_4 = 1,1533$ $\Delta z = 0,7808$
2	0,5	6,4050	$k_1 = 2,4764$ $k_2 = 3,3564$ $k_3 = 3,6925$ $k_4 = 5,1591$ $\Delta y = 3,6222$	3,5057	$l_1 = 1,1409$ $l_2 = 1,5930$ $l_3 = 1,7596$ $l_4 = 2,5039$ $\Delta z = 1,7250$
3	0,75	13,9500	$k_1 = 5,1070$ $k_2 = 6,9842$ $k_3 = 7,6929$ $k_4 = 10,8091$ $\Delta y = 7,5451$	7,2112	$l_1 = 2,4777$ $l_2 = 3,4258$ $l_3 = 3,7789$ $l_4 = 5,3456$ $\Delta z = 3,7054$
4	1	29,8163	$k_1 = 10,6987$ $k_2 = 14,6812$ $k_3 = 16,1783$ $k_4 = 22,7798$ $\Delta y = 15,8662$	15,0921	$l_1 = 5,2903$ $l_2 = 7,2889$ $l_3 = 8,0366$ $l_4 = 11,3440$ $\Delta z = 7,8809$

2. $y' = -7y + z$
   $z' = -2y - 5z$,
   když $y(1) = 0$, $z(1) = 1$, $a = 1$, $b = 2$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	1	0		1	
1	1,25	0,0169	$k_1 = 0,25$ $k_2 = -0,1250$ $k_3 = 0,2930$ $k_4 = -0,4844$ $\Delta y = 0,0169$	0,2710	$l_1 = -1,25$ $l_2 = -0,5313$ $l_3 = -0,8867$ $l_4 = -0,2881$ $\Delta z = -0,7290$
2	1,5	0,0086	$k_1 = 0,0381$ $k_2 = -0,0386$ $k_3 = 0,0545$ $k_4 = -0,1197$ $\Delta y = -0,0083$	0,0729	$l_1 = -0,3472$ $l_2 = -0,1397$ $l_3 = -0,2502$ $l_4 = -0,0617$ $\Delta z = -0,1981$
3	1,75	0,0033	$k_1 = 0,0032$ $k_2 = -0,0115$ $k_3 = 0,0087$ $k_4 = -0,0294$ $\Delta y = -0,0053$	0,0195	$l_1 = -0,0954$ $l_2 = -0,0366$ $l_3 = -0,0697$ $l_4 = -0,0127$ $\Delta z = -0,0534$
4	2	0,0011	$k_1 = -0,0009$ $k_2 = -0,0034$ $k_3 = 0,0009$ $k_4 = -0,0072$ $\Delta y = -0,0022$	0,0052	$l_1 = -0,0260$ $l_2 = -0,0095$ $l_3 = -0,0192$ $l_4 = -0,0024$ $\Delta z = -0,0143$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 1; 1,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	1	0		1	
1	1,1	0,0543	$k_1 = 0,1000$ $k_2 = 0,0400$ $k_3 = 0,0668$ $k_4 = 0,0125$ $\Delta y = 0,0543$	0,6008	$l_1 = -0,5000$ $l_2 = -0,3850$ $l_3 = -0,4078$ $l_4 = -0,3095$ $\Delta z = -0,3992$
2	1,2	0,0594	$k_1 = 0,0221$ $k_2 = -0,0012$ $k_3 = 0,0107$ $k_4 = -0,0107$ $\Delta y = 0,0051$	0,3551	$l_1 = -0,3113$ $l_2 = -0,2357$ $l_3 = -0,2522$ $l_4 = -0,1873$ $\Delta z = -0,2457$
3	1,3	0,0485	$k_1 = -0,0061$ $k_2 = -0,0134$ $k_3 = -0,0084$ $k_4 = -0,0154$ $\Delta y = -0,0109$	0,2069	$l_1 = -0,1894$ $l_2 = -0,1415$ $l_3 = -0,1527$ $l_4 = -0,1114$ $\Delta z = -0,1482$
4	1,4	0,0351	$k_1 = -0,0133$ $k_2 = -0,0143$ $k_3 = -0,0125$ $k_4 = -0,0136$ $\Delta y = -0,0134$	0,1190	$l_1 = -0,1132$ $l_2 = -0,0835$ $l_3 = -0,0908$ $l_4 = -0,0652$ $\Delta z = -0,0879$
5	1,5	0,0238	$k_1 = -0,0127$ $k_2 = -0,0116$ $k_3 = -0,0111$ $k_4 = -0,0103$ $\Delta y = -0,0114$	0,0677	$l_1 = -0,0665$ $l_2 = -0,0486$ $l_3 = -0,0532$ $l_4 = -0,0377$ $\Delta z = -0,0513$

3. $y' = 4y - z$
   $z' = y + 2z,$
   když $y(0) = 0,\ z(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	0		1	
1	0,25	-0,5254	$k_1 = -0,25$ $k_2 = -0,4375$ $k_3 = -0,5430$ $k_4 = -0,9414$ $\Delta y = -0,5254$	1,5894	$l_1 = 0,5$ $l_2 = 0,5938$ $l_3 = 0,5938$ $l_4 = 0,6611$ $\Delta z = 0,5894$
2	0,5	-2,2221	$k_1 = -0,9227$ $k_2 = -1,4670$ $k_3 = -1,7455$ $k_4 = -2,8328$ $\Delta y = -1,6967$	2,2500	$l_1 = 0,6633$ $l_2 = 0,7138$ $l_3 = 0,6584$ $l_4 = 0,5562$ $\Delta z = 0,6607$
3	0,75	-7,0489	$k_1 = -2,7846$ $k_2 = -4,2481$ $k_3 = -4,9542$ $k_4 = -7,7712$ $\Delta y = -7,0489$	2,4086	$l_1 = 0,5695$ $l_2 = 0,3638$ $l_3 = 0,1294$ $l_4 = -0,6044$ $\Delta z = 0,1586$
4	1	-19,8755	$k_1 = -7,6510$ $k_2 = -11,4068$ $k_3 = -13,1477$ $k_4 = -20,1994$ $\Delta y = -12,8266$	0,1247	$l_1 = -0,5579$ $l_2 = -1,6538$ $l_3 = -2,3972$ $l_4 = -5,0435$ $\Delta z = -2,2839$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	0		1	
1	0,1	-0,1349	$k_1 = -0,1$ $k_2 = -0,1300$ $k_3 = -0,1368$ $k_4 = -0,1762$ $\Delta y = -0,1349$	1,2149	$l_1 = 0,2$ $l_2 = 0,2150$ $l_3 = 0,2150$ $l_4 = 0,2293$ $\Delta z = 0,2149$
2	0,2	-0,3643	$k_1 = -0,1755$ $k_2 = -0,2220$ $k_3 = -0,2321$ $k_4 = -0,2926$ $\Delta y = -0,2294$	1,4577	$l_1 = 0,2295$ $l_2 = 0,2437$ $l_3 = 0,2427$ $l_4 = 0,2548$ $\Delta z = 0,2429$
3	0,3	-0,7377	$k_1 = -0,2915$ $k_2 = -0,3626$ $k_3 = -0,3773$ $k_4 = -0,4688$ $\Delta y = -0,3733$	1,7218	$l_1 = 0,2551$ $l_2 = 0,2661$ $l_3 = 0,2636$ $l_4 = 0,2701$ $\Delta z = 0,2641$
4	0,4	-1,3276	$k_1 = -0,4672$ $k_2 = -0,5742$ $k_3 = -0,5958$ $k_4 = -0,7325$ $\Delta y = -0,5900$	1,9923	$l_1 = 0,2706$ $l_2 = 0,2743$ $l_3 = 0,2693$ $l_4 = 0,2649$ $\Delta z = 0,2705$
5	0,5	-2,2401	$k_1 = -0,7303$ $k_2 = -0,8896$ $k_3 = -0,9210$ $k_4 = -1,1234$ $\Delta y = -0,9125$	2,2412	$l_1 = 0,2657$ $l_2 = 0,2557$ $l_3 = 0,2468$ $l_4 = 0,2230$ $\Delta z = 0,2490$

4. $y' = z$
   $z' = -y + \frac{1}{\cos x}$,
   když $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		1	
1	0,25	1,2476	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,25$ $k_3 = 0,2463$ $k_4 = 0,2427$ $\Delta y = 0,2476$	0,9716	$l_1 = 0$ $l_2 = -0,0293$ $l_3 = -0,0293$ $l_4 = -0,0536$ $\Delta z = -0,0284$
2	0,5	1,4821	$k_1 = 0,2429$ $k_2 = 0,2362$ $k_3 = 0,2337$ $k_4 = 0,2247$ $\Delta y = 0,2345$	0,8996	$l_1 = -0,0539$ $l_2 = -0,0736$ $l_3 = -0,0727$ $l_4 = -0,0854$ $\Delta z = -0,0720$
3	0,75	1,6960	$k_1 = 0,2249$ $k_2 = 0,2142$ $k_3 = 0,2136$ $k_4 = 0,2026$ $\Delta y = 0,2138$	0,8118	$l_1 = -0,0857$ $l_2 = -0,0904$ $l_3 = -0,0890$ $l_4 = -0,0822$ $\Delta z = -0,0878$
4	0	1,8906	$k_1 = 0,2029$ $k_2 = 0,1927$ $k_3 = 0,1955$ $k_4 = 0,1884$ $\Delta y = 0,1946$	0,7572	$l_1 = -0,0823$ $l_2 = -0,0593$ $l_3 = -0,0581$ $l_4 = -0,0102$ $\Delta z = -0,0545$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	y	k	z	l
0	0	1		1	
1	0,1	1,0998	$k_1 = 0,1$	0,9952	$l_1 = 0$
			$k_2 = 0,1000$		$l_2 = -0,0049$
			$k_3 = 0,0998$		$l_3 = -0,0049$
			$k_4 = 0,0995$		$l_4 = -0,0095$
			$\Delta y = 0,0998$		$\Delta z = -0,0048$
2	0,2	1,1987	$k_1 = 0,0995$	0,9814	$l_1 = -0,0095$
			$k_2 = 0,0990$		$l_2 = -0,0138$
			$k_3 = 0,0988$		$l_3 = -0,0138$
			$k_4 = 0,0981$		$l_4 = -0,0178$
			$\Delta y = 0,0989$		$\Delta z = -0,0138$
3	0,3	1,2959	$k_1 = 0,0981$	0,9599	$l_1 = -0,0178$
			$k_2 = 0,0972$		$l_2 = -0,0216$
			$k_3 = 0,0971$		$l_3 = -0,0215$
			$k_4 = 0,0960$		$l_4 = -0,0249$
			$\Delta y = 0,0971$		$\Delta z = -0,0215$
4	0,4	1,3905	$k_1 = 0,0960$	0,9321	$l_1 = -0,0249$
			$k_2 = 0,0947$		$l_2 = -0,0279$
			$k_3 = 0,0946$		$l_3 = -0,0279$
			$k_4 = 0,0932$		$l_4 = -0,0305$
			$\Delta y = 0,0946$		$\Delta z = -0,0278$
5	0,5	1,4821	$k_1 = 0,0932$	0,8996	$l_1 = -0,0305$
			$k_2 = 0,0917$		$l_2 = -0,0327$
			$k_3 = 0,0916$		$l_3 = -0,0326$
			$k_4 = 0,0900$		$l_4 = -0,0343$
			$\Delta y = 0,0916$		$\Delta z = -0,0325$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,05$.

Řešení: Všechny hodnoty y_i a z_i (pro odpovídající x_i) jsou po zaokrouhlení na 4 desetinná místa stejné jako v předcházejícím případě.

5. $u' = 2u + 4v + \cos x$
   $v' = -u - 2v + \sin x$,
   když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l
0	0	0		1	
1	0,25	1,3200	$k_1 = 1,25$ $k_2 = 1,3105$ $k_3 = 1,3256$ $k_4 = 1,3974$ $\Delta u = 1,3200$	0,4948	$l_1 = -0,5$ $l_2 = -0,5001$ $l_3 = -0,5076$ $l_4 = -0,5157$ $\Delta v = -0,5052$
2	0,5	2,8066	$k_1 = 1,3970$ $k_2 = 1,4789$ $k_3 = 1,4914$ $k_4 = 1,5821$ $\Delta u = 1,4866$	-0,0412	$l_1 = -0,5155$ $l_2 = -0,5316$ $l_3 = -0,5378$ $l_4 = -0,5615$ $\Delta v = -0,5360$
3	0,75	4,4917	$k_1 = 1,5815$ $k_2 = 1,6796$ $k_3 = 1,6887$ $k_4 = 1,7927$ $\Delta u = 1,6852$	-0,6367	$l_1 = -0,5612$ $l_2 = -0,5922$ $l_3 = -0,5967$ $l_4 = -0,6345$ $\Delta v = -0,5956$
4	1	6,3950	$k_1 = 1,7921$ $k_2 = 1,9003$ $k_3 = 1,9054$ $k_4 = 2,0162$ $\Delta u = 1,9033$	-1,3171	$l_1 = -0,6342$ $l_2 = -0,6781$ $l_3 = -0,6807$ $l_4 = -0,7302$ $\Delta v = -0,6803$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l
0	0	0		1	
1	0,1	0,5105	$k_1 = 0,5000$	0,7997	$l_1 = -0,2000$
			$k_2 = 0,5099$		$l_2 = -0,2000$
			$k_3 = 0,5109$		$l_3 = -0,2005$
			$k_4 = 0,5215$		$l_4 = -0,2010$
			$\Delta u = 0,5105$		$\Delta v = -0,2003$
2	0,2	1,0439	$k_1 = 0,5215$	0,5973	$l_1 = -0,2010$
			$k_2 = 0,5328$		$l_2 = -0,2020$
			$k_3 = 0,5337$		$l_3 = -0,2025$
			$k_4 = 0,5457$		$l_4 = -0,2040$
			$\Delta u = 0,5334$		$\Delta v = -0,2023$
3	0,3	1,6028	$k_1 = 0,5457$	0,3910	$l_1 = -0,2040$
			$k_2 = 0,5584$		$l_2 = -0,2060$
			$k_3 = 0,5592$		$l_3 = -0,2064$
			$k_4 = 0,5725$		$l_4 = -0,2089$
			$\Delta u = 0,5589$		$\Delta v = -0,2063$
4	0,4	2,1896	$k_1 = 0,5725$	0,1788	$l_1 = -0,2089$
			$k_2 = 0,5864$		$l_2 = -0,2119$
			$k_3 = 0,5872$		$l_3 = -0,2123$
			$k_4 = 0,6016$		$l_4 = -0,2158$
			$\Delta u = 0,5869$		$\Delta v = -0,2122$
5	0,5	2,8066	$k_1 = 0,6016$	-0,0411	$l_1 = -0,2158$
			$k_2 = 0,6165$		$l_2 = -0,2197$
			$k_3 = 0,6172$		$l_3 = -0,2201$
			$k_4 = 0,6326$		$l_4 = -0,2245$
			$\Delta u = 0,6169$		$\Delta v = -0,2200$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na intervalu $< 0; 0,5 >$ s krokem $h = 0,05$.

Řešení: Všechny hodnoty u_i a v_i (pro odpovídající x_i) jsou po zaokrouhlení na 4 desetinná místa stejné jako v předcházejícím případě.

6. $u' = -2u + v - 2w$
   $v' = u - 2v + 2w$
   $w' = 3u - 3v + 5w$,
   když $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $w(0) = 2$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	0		1		2	
1	0,25	-1,0020	$k_1 = -0,75$	1,7808	$l_1 = 0,5$	4,5635	$m_1 = 1,75$
			$k_2 = -0,9375$		$l_2 = 0,7188$		$m_2 = 2,3750$
			$k_3 = -1,0195$		$l_3 = 0,7969$		$m_3 = 2,6133$
			$k_4 = -1,3477$		$l_4 = 1,1533$		$m_4 = 3,6543$
			$\Delta u = -1,0020$		$\Delta v = 0,7808$		$\Delta w = 2,5635$
2	0,5	-2,8992	$k_1 = -1,3356$	3,5057	$l_1 = 1,1409$	9,9107	$m_1 = 3,6173$
			$k_2 = -1,7634$		$l_2 = 1,5930$		$m_2 = 4,9495$
			$k_3 = -1,9330$		$l_3 = 1,7596$		$m_3 = 5,4521$
			$k_4 = -2,6552$		$l_4 = 2,5039$		$m_4 = 7,6630$
			$\Delta u = -1,8973$		$\Delta v = 1,7250$		$\Delta w = 5,3472$
3	0,75	-6,7388	$k_1 = -2,6293$	7,2112	$l_1 = 2,4777$	21,1612	$m_1 = 7,5847$
			$k_2 = -3,5584$		$l_2 = 3,4258$		$m_2 = 10,4100$
			$k_3 = -3,9140$		$l_3 = 3,7789$		$m_3 = 11,4718$
			$k_4 = -5,4635$		$l_4 = 5,3456$		$m_4 = 16,1548$
			$\Delta u = -3,8396$		$\Delta v = 3,7054$		$\Delta w = 11,2505$
4	1	-14,7242	$k_1 = -5,4084$	15,0921	$l_1 = 5,2903$	44,9083	$m_1 = 15,9890$
			$k_2 = -7,3923$		$l_2 = 7,2889$		$m_2 = 21,9701$
			$k_3 = -8,1417$		$l_3 = 8,0366$		$m_3 = 24,2149$
			$k_4 = -11,4358$		$l_4 = 11,3440$		$m_4 = 34,1238$
			$\Delta u = -7,9854$		$\Delta v = 7,8809$		$\Delta w = 23,7471$

7. $u' = u + w + x$
   $v' = u + v - w$
   $w' = v + w,$
   když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$ a krok $h = 0,25$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	0		1		2	
1	0,25	0,3519	$k_1 = 0,25$ $k_2 = 0,3438$ $k_3 = 0,3555$ $k_4 = 0,4629$ $\Delta u = 0,3519$	-0,2751	$l_1 = -0,25$ $l_2 = -0,2813$ $l_3 = -0,2734$ $l_4 = -0,2910$ $\Delta v = -0,2751$	1,2476	$m_1 = 0,25$ $m_2 = 0,2500$ $m_3 = 0,2461$ $m_4 = 0,2432$ $\Delta w = 0,2476$
2	0,5	0,9436	$k_1 = 0,4624$ $k_2 = 0,5818$ $k_3 = 0,5960$ $k_4 = 0,7326$ $\Delta u = 0,5917$	-0,5659	$l_1 = -0,2927$ $l_2 = -0,3019$ $l_3 = -0,2873$ $l_4 = -0,2743$ $\Delta v = -0,2909$	1,4837	$m_1 = 0,2431$ $m_2 = 0,2369$ $m_3 = 0,2350$ $m_4 = 0,2300$ $\Delta w = 0,2362$
3	0,75	1,8399	$k_1 = 0,7318$ $k_2 = 0,8833$ $k_3 = 0,9014$ $k_4 = 1,0763$ $\Delta u = 0,8963$	-0,7972	$l_1 = -0,2765$ $l_2 = -0,2483$ $l_3 = -0,2251$ $l_4 = -0,1640$ $\Delta v = -0,2312$	1,7102	$m_1 = 0,2294$ $m_2 = 0,2236$ $m_3 = 0,2264$ $m_4 = 0,2298$ $\Delta w = 0,2265$
4	1	3,1274	$k_1 = 1,0750$ $k_2 = 1,2692$ $k_3 = 1,2944$ $k_4 = 1,5230$ $\Delta u = 1,2875$	-0,8544	$l_1 = -0,1669$ $l_2 = -0,0819$ $l_3 = -0,0480$ $l_4 = 0,0829$ $\Delta v = -0,0573$	1,9558	$m_1 = 0,2283$ $m_2 = 0,2359$ $m_3 = 0,2475$ $m_4 = 0,2782$ $\Delta w = 0,2456$

8. $u' = v + \sin x$
   $v' = u + \mathrm{e}^x$
   $w' = w + \cos x$,
   když $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	1		0		1	
1	0,1	1,0152	$k_1 = 0$ $k_2 = 0,0150$ $k_3 = 0,0153$ $k_4 = 0,0306$ $\Delta u = 0,0152$	0,2057	$l_1 = 0,2$ $l_2 = 0,2051$ $l_3 = 0,2059$ $l_4 = 0,2120$ $\Delta v = 0,2057$	1,2102	$m_1 = 0,2$ $m_2 = 0,2099$ $m_3 = 0,2104$ $m_4 = 0,2205$ $\Delta w = 0,2102$
2	0,2	1,0615	$k_1 = 0,0306$ $k_2 = 0,0461$ $k_3 = 0,0465$ $k_4 = 0,0624$ $\Delta u = 0,0464$	0,4255	$l_1 = 0,2120$ $l_2 = 0,2192$ $l_3 = 0,2200$ $l_4 = 0,2283$ $\Delta v = 0,2198$	1,4414	$m_1 = 0,2205$ $m_2 = 0,2309$ $m_3 = 0,2314$ $m_4 = 0,2422$ $\Delta w = 0,2312$
3	0,3	1,1406	$k_1 = 0,0624$ $k_2 = 0,0787$ $k_3 = 0,0792$ $k_4 = 0,0959$ $\Delta u = 0,0790$	0,6638	$l_1 = 0,2283$ $l_2 = 0,2377$ $l_3 = 0,2385$ $l_4 = 0,2491$ $\Delta v = 0,2383$	1,6949	$m_1 = 0,2421$ $m_2 = 0,2531$ $m_3 = 0,2537$ $m_4 = 0,2650$ $\Delta w = 0,2535$
4	0,4	1,2541	$k_1 = 0,0959$ $k_2 = 0,1131$ $k_3 = 0,1137$ $k_4 = 0,1315$ $\Delta u = 0,1135$	0,9252	$l_1 = 0,2490$ $l_2 = 0,2608$ $l_3 = 0,2616$ $l_4 = 0,2746$ $\Delta v = 0,2614$	1,9719	$m_1 = 0,2650$ $m_2 = 0,2767$ $m_3 = 0,2773$ $m_4 = 0,2893$ $\Delta w = 0,2770$
5	0,5	1,4043	$k_1 = 0,1315$ $k_2 = 0,1497$ $k_3 = 0,1505$ $k_4 = 0,1694$ $\Delta u = 0,1502$	1,2147	$l_1 = 0,2746$ $l_2 = 0,2888$ $l_3 = 0,2897$ $l_4 = 0,3053$ $\Delta v = 0,2895$	2,2740	$m_1 = 0,2893$ $m_2 = 0,3017$ $m_3 = 0,3023$ $m_4 = 0,3152$ $\Delta w = 0,3021$

9. $u' = u + 2v + w$
   $v' = u + w$
   $w' = u + w$,
   když $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $w(0) = 0$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	1		0		1	
1	0,1	1,5446	$k_1 = 0,5$	2,1325	$l_1 = 0,1$	0,1325	$m_1 = 0,1$
			$k_2 = 0,5400$		$l_2 = 0,1300$		$m_2 = 0,1300$
			$k_3 = 0,5465$		$l_3 = 0,1335$		$m_3 = 0,1335$
			$k_4 = 0,5947$		$l_4 = 0,1680$		$m_4 = 0,1680$
			$\Delta u = 0,5446$		$\Delta v = 0,1325$		$\Delta w = 0,1325$
2	0,2	2,1997	$k_1 = 0,5942$	2,3416	$l_1 = 0,1677$	0,3416	$m_1 = 0,1677$
			$k_2 = 0,6491$		$l_2 = 0,2058$		$m_2 = 0,2058$
			$k_3 = 0,6575$		$l_3 = 0,2105$		$m_3 = 0,2105$
			$k_4 = 0,7231$		$l_4 = 0,2545$		$m_4 = 0,2545$
			$\Delta u = 0,6551$		$\Delta v = 0,2091$		$\Delta w = 0,2091$
3	0,3	3,0043	$k_1 = 0,7225$	2,6490	$l_1 = 0,2541$	0,6490	$m_1 = 0,2541$
			$k_2 = 0,7967$		$l_2 = 0,3030$		$m_2 = 0,3030$
			$k_3 = 0,8077$		$l_3 = 0,3091$		$m_3 = 0,3091$
			$k_4 = 0,8960$		$l_4 = 0,3658$		$m_4 = 0,3658$
			$\Delta u = 0,8046$		$\Delta v = 0,3074$		$\Delta w = 0,3074$
4	0,4	4,0092	$k_1 = 0,8951$	3,0831	$l_1 = 0,3653$	1,0831	$m_1 = 0,3653$
			$k_2 = 0,9947$		$l_2 = 0,4283$		$m_2 = 0,4283$
			$k_3 = 1,0091$		$l_3 = 0,4365$		$m_3 = 0,4365$
			$k_4 = 1,1270$		$l_4 = 0,5099$		$m_4 = 0,5099$
			$\Delta u = 1,0049$		$\Delta v = 0,4341$		$\Delta w = 0,4341$
5	0,5	5,2812	$k_1 = 1,1259$	3,6817	$l_1 = 0,5092$	1,6817	$m_1 = 0,5092$
			$k_2 = 1,2585$		$l_2 = 0,5910$		$m_2 = 0,5910$
			$k_3 = 1,2774$		$l_3 = 0,6017$		$m_3 = 0,6017$
			$k_4 = 1,4341$		$l_4 = 0,6971$		$m_4 = 0,6917$
			$\Delta u = 1,2720$		$\Delta v = 0,5986$		$\Delta w = 0,5986$

10. $u' = -v$
$v' = -u$
$w' = u + v + w,$
když $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krok $h = 0,1$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	0		0		0	
1	0,1	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,1052	$m_1 = 0,1$ $m_2 = 0,1050$ $m_3 = 0,1053$ $m_4 = 0,1105$ $\Delta w = 0,1052$
2	0,2	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,2214	$m_1 = 0,1105$ $m_2 = 0,1160$ $m_3 = 0,1163$ $m_4 = 0,1221$ $\Delta w = 0,1162$
3	0,3	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,3499	$m_1 = 0,1221$ $m_2 = 0,1282$ $m_3 = 0,1286$ $m_4 = 0,1350$ $\Delta w = 0,1285$
4	0,4	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,4918	$m_1 = 0,1350$ $m_2 = 0,1417$ $m_3 = 0,1421$ $m_4 = 0,1492$ $\Delta w = 0,1420$
5	0,5	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	1,6487	$m_1 = 0,1492$ $m_2 = 0,1566$ $m_3 = 0,1570$ $m_4 = 0,1649$ $\Delta w = 0,1569$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na témže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 0$, $a = 0$, $b = 0,5$ a krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	x	u	k	v	l	w	m
0	0	0		0		0	
1	0,1	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$
2	0,2	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$
3	0,3	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$
4	0,4	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$
5	0,5	0	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$ $k_4 = 0$ $\Delta u = 0$	0	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = 0$ $\Delta v = 0$	0	$m_1 = 0$ $m_2 = 0$ $m_3 = 0$ $m_4 = 0$ $\Delta w = 0$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu na témže intervalu, avšak s počátečními podmínkami $u(0) = 0,01$, $v(0) = 0,02$, $w(0) = 0,03$; opět s krokem $h = 0,1$.

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce (příklad uvádíme pouze pro srovnání výsledků s Eulerovou metodou, hodnoty k, l a m jsou pro stanovený počet desetinných míst příliš nízké):

i	x	u	v	w
0	0	0,01	0,02	0,03
1	0,1	0,0080	0,0191	0,0362
2	0,2	0,0062	0,0184	0,0427
3	0,3	0,0044	0,0179	0,0496
4	0,4	0,0026	0,0175	0,0571
5	0,5	0,0009	0,0173	0,0651