

FAKULTA
ELEKTROTECHNIKY
A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ

Vybrané partie z matematiky

Doc. RNDr. Zdeněk Šmarda, CSc.
Mgr. Irena Růžičková

Obsah

1 Některé pojmy z diferenciálního počtu funkce více proměnných	5
1.1 Metrika, metrické prostory	5
1.2 Zobrazení euklidovských prostorů	12
1.3 Derivace ve směru, parciální derivace	20
1.4 Vektorová analýza	26
2 Integrální počet funkcí více proměnných	31
2.1 Pojem n-rozměrného integrálu v \mathbb{R}^n	31
2.2 Geometrická interpretace dvojného integrálu	33
2.3 Fyzikální interpretace trojnitého integrálu	34
2.4 Výpočet n-rozměrného integrálu postupnou integrací	35
2.5 Měřitelné množiny, elementární oblasti	39
2.6 Integrály na měřitelných množinách	43
2.7 Transformace integrálů	46
2.8 Míra neohraničených množin	51
2.9 Integrál neohraničené funkce přes ohraničenou množinu	52
2.10 Integrál funkce přes neohraničenou měřitelnou množinu	57
3 Křivkové a plošné integrály	60
3.1 Křivky v \mathbb{R}^n	60
3.2 Neorientovaný křivkový integrál v \mathbb{R}^n	66
3.3 Orientovaný křivkový integrál	70
3.4 Nezávislost orientovaného křivkového integrálu na cestě	78
3.5 Greenova věta	83
3.6 Plochy v \mathbb{R}^3	85
3.7 Orientovaný plošný integrál	99
3.8 Integrální věty	111
4 Systémy obyčejných diferenciálních rovnic	120
4.1 Základní pojmy	120
4.2 Existence a jednoznačnost řešení systémů dif. rovnic I. řádu	124
4.3 Systém lineárních diferenciálních rovnic I. řádu	126
4.4 Lineární systémy s konstantními koeficienty	130
4.4.1 Eliminační metoda	131
4.4.2 Metoda charakteristických čísel	137
4.4.3 Výpočet exponenciální matice	143
4.4.4 Metoda neurčitých koeficientů	147
4.5 Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic	151
4.5.1 Stabilita lineárních systémů	158
4.5.2 Hurwitzovo kritérium	159
4.5.3 Michajlovovo kritérium	161

Seznam obrázků

1.1	Stejnoměrná odchylka (vzdálenost)	6
1.2	Metrika v \mathbb{R}^*	7
1.3	Kubická metrika	8
1.4	Oktaedrická metrika	8
1.5	Příklad vnitřního a hraničního bodu množiny	11
1.6	Kulová plocha	14
1.7	Trojosý elipsoid	15
1.8	Eliptický paraboloid	16
1.9	Eliptický paraboloid s osou v ose y	16
1.10	Eliptická kuželová plocha	17
1.11	Eliptická válcová plocha	18
1.12	Parabolická válcová plocha $y = x^2$	18
1.13	Parabolická válcová plocha $y^2 = x$	18
1.14	Vektorové pole	20
2.1	Dělení dvourozměrného intervalu a jeho norma.	32
2.2	Kvádr o výšce m_i	34
2.3	Kvádr o výšce M_i	34
2.4	Řez podgrafu \mathcal{G} rovinou $x = \xi$	37
2.5	Elem. oblast typu $[x, y]$	41
2.6	Elem. oblast typu $[y, x]$	41
2.7	f	52
2.8	f^+	52
2.9	f^-	52
2.10	„Uřezávání“ podgrafu.	53
3.1	Jednotkové tečné pole...	63
3.2	...a pole k němu opačné	63
3.3	Příklady útvarů, které jsou ((a),(b),(c)) a nejsou ((d),(e),(f)) křivkami	66
3.4	Geometrický význam neorientovaného křivkového integrálu	69
3.5	Součet oblouků A_1 a A_2	70
3.6	Konst. vektorové pole	70
3.7	Cesta $\mathbf{L} = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_6$	74
3.8		77
3.9		77
3.10	Trojnásobně souvislá oblast	84
3.11	Kladně orientovaná hranice trojnásobně souvislé oblasti.	84
3.12	Souhlasná orientace okraje $\partial\mathbf{B}$ s listem \mathbf{B} .	104
3.13	Nesouhlasná orientace okraje $\partial\mathbf{B}$ s listem \mathbf{B}	104
3.14	Souhlasně orientované přilehlé listy	105
3.15	Nesouhlasně orientované přilehlé listy	105
3.16	Trojnásobně souvislá oblast s kladně orientovanou hranicí	114
4.1	Trajektorie systému z příkladu 4.1.	122
4.2	Charakteristika systému z příkladu 4.1.	122

4.3	Triviální řešení je stabilní.	153
4.4	Triviální řešení není stabilní.	154
4.5	Triviální řešení je stejnoměrně stabilní.	155
4.6	Triviální řešení je asymptoticky stabilní.	157
4.7	Michajlovova křivka	162
4.8	Michajlovovy křivky pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.	163
4.9	Michajlovova křivka k příkladu 4.22	164
4.10	Michajlovova křivka z příkladu 8	167
4.11	Michajlovova křivka z příkladu 9	167
4.12	Michajlovova křivka z příkladu 10	167
4.13	Michajlovova křivka z příkladu 11	167

Úvod

Tento učební text by měl sloužit především posluchačům bakalářského studia FEKT VUT, kteří uvažují pokračovat v navazujícím magisterském studiu. Vzhledem k redukci počtu hodin matematiky v bakalářském směru bylo nutné vypustit některé tématické celky, které byly součástí výuky v 1. a 2. ročníku dřívějšího pětiletého magisterského studia a které jsou nutné k pochopení matematických předmětů i aplikací v navazujícím magisterském studiu.

Cílem tohoto textu je tedy vytvoření kontinuity matematických znalostí absolventů bakalářského studia při přechodu na navazující magisterské studium. Jeho obsahem je výklad integrálního počtu funkce více proměnných, křivkového a plošného integrálu, systémů zejména lineárních diferenciálních rovnic s ohledem na kvalitativní metody řešení a stability řešení. Jde o standartní součást matematické analýzy, která má velký význam v aplikacích.

Zvládnutí této látky je poměrně obtížné, protože vyžaduje znalost zejména diferenciálního počtu funkce více proměnných a základních pojmu lineární algebry, což je náplní zejména I. kapitoly. Další obtíž spočívá v tom, že je nutné zavést pojem „n-rozměrného integrálu“ a následně pojmu křivka, plocha, křivkový a plošný integrál. Přestože jde o intuitivně jasné pojmy, jejich matematická definice je poměrně komplikovaná. Pro potřeby inženýrského studia je nutné udělat kompromis mezi obecností, matematickou přesností a názorností výkladu. Pro případné zájemce o podrobnější výklad lze doporučit např. [2], [3], [10]. Výklad nových důležitých pojmu obvykle motivujeme a doprovázíme ilustrujícím příkladem. Kromě toho je v textu zařazena řada řešených i neřešených příkladů, často i s aplikačním charakterem. Jejich počet je dostatečný k osvojení látky i samostatnému studiu.

Brno, říjen 2004

Autoři

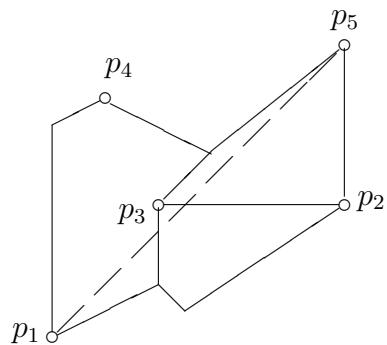
1 Některé pojmy z diferenciálního počtu funkce více proměnných

1.1 Metrika, metrické prostory

Pojmem metriky na dané množině chceme vystihnout co nejobecněji pojem vzdálenosti objektů, které dané množině náleží. Měření vzdáleností objektů je vyvoláno potřebami praxe.

Vzdáleností dvou bodů p, q na přímce, v rovině, resp. v prostoru se zpravidla rozumí tzv. euklidovská vzdálenost. Vzdálenost bodů je však relativní pojem. Demonstrujme to na tomto příkladě:

Mějme v rovině nějakou množinu bodů M (pro jednoduchost konečnou) a dále nechť je dán systém \mathcal{L} lomených čar takových, že každé dva body $p_i, p_j \in M$ lze spojit aspoň jednou lomenou čarou $L \in \mathcal{L}$ (viz obrázek).



Nechť body $p_1, p_2, \dots \in M$ představují obce a lomené čáry představují cesty. Pro zeměměřice je pojem vzdálenosti dvou obcí jasné, je to „nejkratší“ vzdálenost těchto obcí, tedy pro malou část zemského povrchu v podstatě euklidovská vzdálenost (např. vzdálenost „obcí“ p_1, p_5 je vyznačena na obrázku přerušovanou čarou). Pro cestovatele, který se chce z jedné obce dostat do jiné a používá k tomu pouze existujících cest, je však euklidovská vzdálenost zbytečná. Z jeho hlediska je užitečnější charakterizovat vzdálenost patrně takto:

Vzdálenost bodů p_i, p_j je délka nejkratší lomené čáry ze systému \mathcal{L} , která tyto body spojuje.

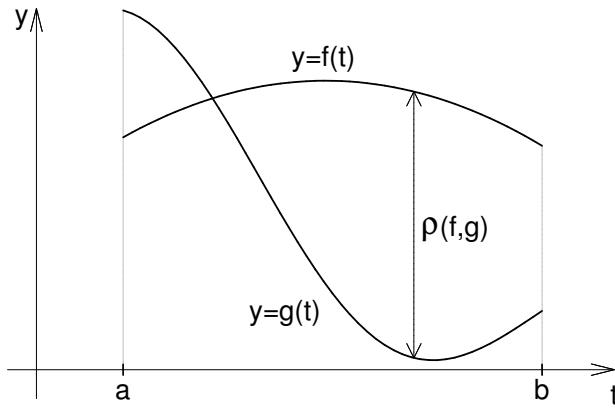
Hovořili jsme zatím o vzdálenosti geometrických bodů. S rozvojem vědy a techniky se ukažuje, že je třeba se dívat na pojem vzdálenosti z obecnějšího hlediska v tom smyslu, že je zapotřebí kvantitativně vystihnout „vzdálenost“ nebo, jak se také někdy říká, „odchylku“ i jiných objektů, než jsou geometrické body. Uvedeme následující příklad:

Pomocí některého fyzikálního systému (např. elektrického obvodu) chceme generovat signál (z matematického hlediska funkci časové proměnné), který by měl žádaný tvar. Zpravidla se nám nepodaří vytvořit z daných prvků systém tak, aby generoval žádaný signál. Zde si můžeme položit zjednodušený problém: sestrojit takový systém, který by vytvářel signál, jenž by se od žádaného v jistém smyslu do nejméně odchyloval. Vidíme, že je tedy účelné zavést pojem vzdálenosti i pro funkce.

Někdy potřebujeme charakterizovat odchylku dvou signálů f, g z hlediska jejich hodnot v jednotlivých časových okamžicích $t \in \langle a, b \rangle$. V tomto případě je přirozené vzít v úvahu absolutní hodnoty všech možných rozdílů funkčních hodnot: $|f(t) - g(t)|$ a jako odchylku dvou signálů vzít maximum z těchto čísel (viz obr. 1.1), tj. definovat odchylku (vzdálenost) signálů f, g vztahem

$$\rho(f, g) = \max_{t \in \langle a, b \rangle} |f(t) - g(t)|$$

Taková odchylka („vzdálenost“) funkcí se nazývá stejnoměrná.



Obrázek 1.1: Stejnoměrná odchylka (vzdálenost)

Chceme-li však posoudit, jak se liší dva signály f, g z hlediska energetického, pak je účelnější definovat odchylku („vzdálenost“) signálů f, g vztahem

$$\sigma(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt}.$$

(Tato tzv. středně kvadratická odchylka nemá ovšem tak názorný geometrický význam jako stejnoměrná odchylka.)

Chceme-li definovat pojem vzdálenosti (metriky) prvků („bodů“) v libovolné množině, je přirozené vycházet z určitých obecných charakteristických vlastností, které má vzdálenost chápáná intuitivně:

1. Je přirozené požadovat, aby vzdálenost dvou různých bodů byla kladné reálné číslo a vzdálenost bodu od sebe samého byla rovna nule.
2. Stejně přirozený je požadavek, aby vzdálenost měřená od bodu p k bodu q byla stejná jako vzdálenost měřená od bodu q k bodu p .
3. Konečně je rozumné, aby v definici metriky figuroval ještě požadavek, který by vystihoval tu skutečnost, že vzdálenost bodu p od bodu q se nemůže zmenšit tím, že bychom ji měřili „oklikou“ přes bod r . Tento požadavek je znám z elementární geometrie, kde se vyskytuje v této podobě: Součet délek dvou stran v trojúhelníku není nikdy menší než délka třetí strany (tzv. trojúhelníková nerovnost).

Po tomto úvodu k problematice metriky můžeme vyslovit definici, kde budou matematicky formulovány zmíněné požadavky kladené na vzdálenost.

Definice 1.1 Nechť P je množina. Řekneme, že ρ je metrika v P , jestliže každé uspořádané dvojici (p, q) bodů z P je přiřazeno právě jedno reálné číslo $\rho(p, q)$ (tj. ρ je reálná funkce na $P \times P$) tak, že pro libovolné body $p, q, r \in P$ platí:

(M1) $\rho(p, q) > 0$, je-li $p \neq q$; $\rho(p, p) = 0$ (**pozitivnost** metriky)

(M2) $\rho(p, q) = \rho(q, p)$ (**symetrie** metriky)

(M3) $\rho(p, q) \leq \rho(p, r) + \rho(r, q)$ (**trojúhelníková nerovnost**)

Množinu P spolu s metrikou ρ nazýváme metrickým prostorem, jejž označujeme (P, ρ) . Prvky množiny P nazýváme body metrického prostoru (P, ρ) ; číslo $\rho(p, q)$ nazýváme vzdáleností (někdy též odchylkou) bodů p, q .

V též množině P může být definováno několik metrik $\rho, \sigma, \tau, \dots$. Pak je třeba rozlišovat příslušné metrické prostory $(P, \rho), (P, \sigma), (P, \tau), \dots$

Příklady metrických prostorů

1) **Reálná osa \mathbb{R} .** V množině všech reálných čísel definujme metriku ρ předpisem

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

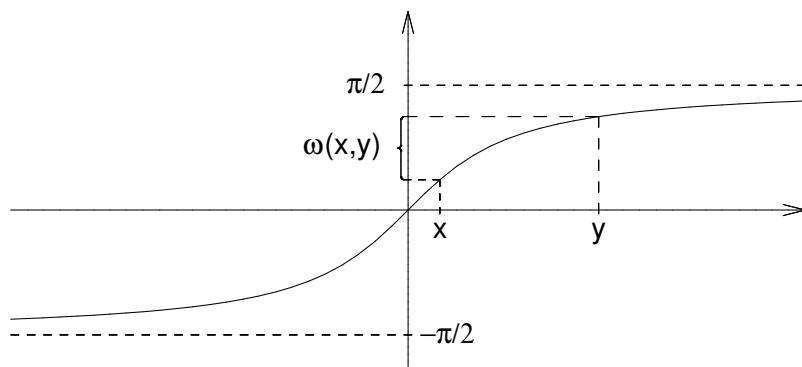
Je zřejmé, že ρ má vlastnosti (M1), (M2), (M3).

2) **Rozšířená reálná osa \mathbb{R}^* .** V množině $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definujme metriku ω předpisem

$$\omega(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^*,$$

kde $\operatorname{arctg}(+\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Podmínky (M1), (M2), (M3) jsou opět splněny. Vzdálenost $\omega(x, y)$ je patrná z obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Metrika v \mathbb{R}^* .

3) **Aritmetický n-rozměrný euklidovský prostor.** Je to množina \mathbb{R}^n (množina uspořádaných n-tic reálných čísel) s metrikou ρ definovanou předpisem:

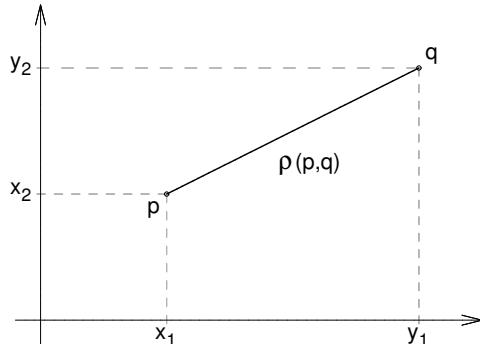
Nechť $p, q \in \mathbb{R}^n$,

$p = (x_1, \dots, x_n), q = (y_1, \dots, y_n)$, pak

$$\rho(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (1.1)$$

Metrika ρ definovaná vztahem 1.1 se nazývá **euklidovská metrika**.

Vzdálenost ρ je v případě $n = 2$ znázorněna na obrázku.



Místo euklidovské metriky je někdy snazší pracovat s těmito metrikami:

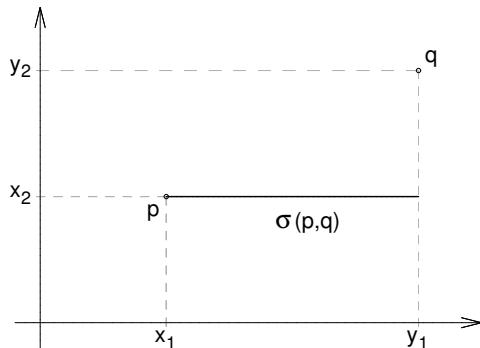
$$\sigma(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \quad (1.2)$$

(tzv. **kubická metrika**)

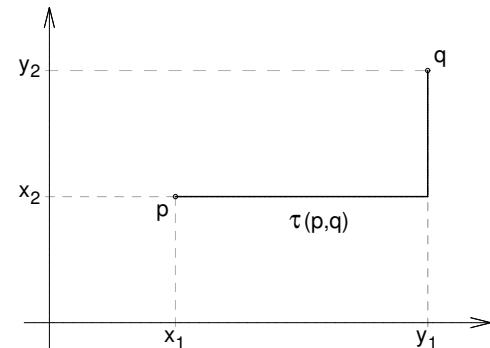
$$\tau(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (1.3)$$

(tzv. **oktaedrická metrika**)

Vzdálenosti σ a τ jsou v případě $n = 2$ znázorněny na obrázcích.



Obrázek 1.3: Kubická metrika



Obrázek 1.4: Oktaedrická metrika

4) Na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujme

$$\alpha(x, y) = \sin^2(x - y)$$

Položme například $x = 4\pi, y = 2\pi$, pak $\alpha(x, y) = \sin^2(4\pi - 2\pi) = 0$, tedy pro $x \neq y$ platí $\alpha(x, y) = 0$, což je ve sporu s podmínkou (M1). Zobrazení α není metrikou na \mathbb{R} .

Vztahy mezi body a množinami v \mathbb{R}^n či v jiném metrickém prostoru můžeme charakterizovat pomocí metrik. Někdy je však účelnější (a i názornější) je charakterizovat pomocí

okolí bodu. Pojmy, které definujeme pomocí okolí, se nazývají zpravidla **topologické pojmy**.

S okolím bodu v \mathbb{R} jste se seznámili v kurzu BMA1. Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ byl každý otevřený interval $(a - r, a + r)$, $r > 0$.

Lze také psát

$$(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R} : \rho(x, a) < r\},$$

kde $\rho(x, y) = |x - y|$. Vidíme, že okolí lze vyjádřit pomocí metriky.

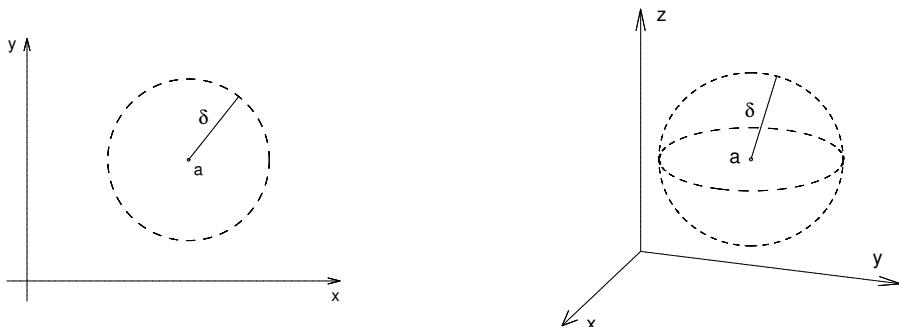
Budeme nyní definovat okolí na metrickém prostoru (\mathbb{R}^n, ρ) .

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}^n$ budeme rozumět množinu

$$U_\delta(a) := \{p \in \mathbb{R}^n : \rho(a, p) < \delta\}$$

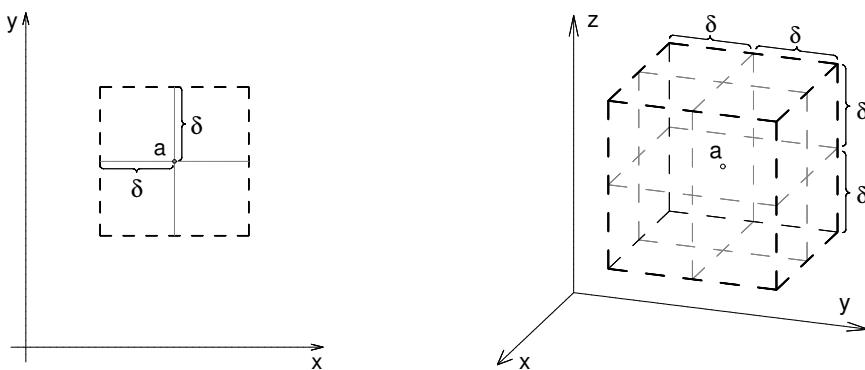
$$(P_\delta(a) = U_\delta \setminus \{a\} \text{ - redukované okolí})$$

V \mathbb{R}^2 je okolím bodu otevřený kruh se středem v bodě a a poloměrem δ , v \mathbb{R}^3 je okolím bodu otevřená koule, viz obrázky.

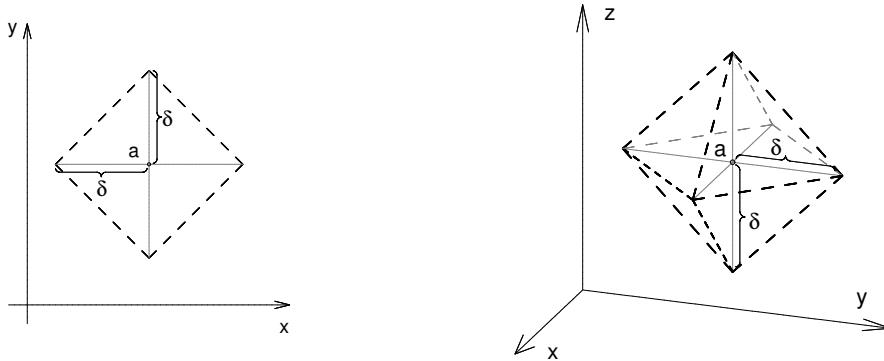


Tato okolí se nazývají **sférická okolí** v \mathbb{R}^n .

Použijeme-li kubickou metriku σ , dostaneme pro $n = 2$ otevřený čtverec se středem v bodě a , pro $n = 3$ otevřenou krychli se středem v bodě a , viz obrázky.



Okolím $U_\delta(a)$ při oktaedrické metrice je v \mathbb{R}^2 otevřený čtverec se středem v bodě a s úhlopříčkami rovnoběžnými se souřadnicovými osami, v \mathbb{R}^3 je to pravidelný otevřený osmístěn (oktaedr), viz obrázky.



V následujících úvahách budeme uvažovat prostor (\mathbb{R}^n, ρ) a zkráceně ho budeme označovat \mathbb{R}^n .

Pomocí pojmu okolí budeme definovat základní topologické pojmy v \mathbb{R}^n . Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$:

1. Bod a nazveme **vnitřním bodem** množiny M , existuje-li okolí $U(a) \subset M$. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá **vnitřek** množiny M a značí se M^0
2. Bod a nazveme **hraničním bodem** množiny M , jestliže pro každé okolí $U(a)$ platí:

$$U(a) \cap M \neq \emptyset \quad \wedge \quad U(a) \cap \mathbb{R}^n \setminus M \neq \emptyset$$

Množinu všech hraničních bodů množiny M nazveme **hranicí** množiny M a značíme hM .

3. Bod a nazveme **bodem uzávěru** množiny M , jestliže každé okolí $U(a)$ má s M neprázdný průnik. Množinu všech bodů uzávěru množiny M nazveme **uzávěrem** množiny M a značíme \overline{M} .

Z definic je zřejmé, že $M^0 \subset M$, $M^0 = M - hM$, $\overline{M} = M \cup hM$.

4. Množinu M nazveme **otevřenou** v \mathbb{R}^n , platí-li $M = M^0$.
5. Množinu M nazveme **uzavřenou** v \mathbb{R}^n , platí-li $M = \overline{M}$.
6. Množinu M nazveme **ohraničenou** v \mathbb{R}^n , existuje-li $k > 0$ tak, že pro libovolné body $p, q \in M$ platí $\rho(p, q) < k$.
7. Řekneme, že body $a, b \in M$ lze spojit **cestou** ležící v M , existuje-li spojité zobrazení $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ takové, že $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ a $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle) \subset M$.

Neprázdnou množinu M nazveme pak **souvislou**, jestliže libovolné její body a, b lze spojit cestou ležící v M .

8. Otevřenou souvislou množinu M nazveme **oblastí**.

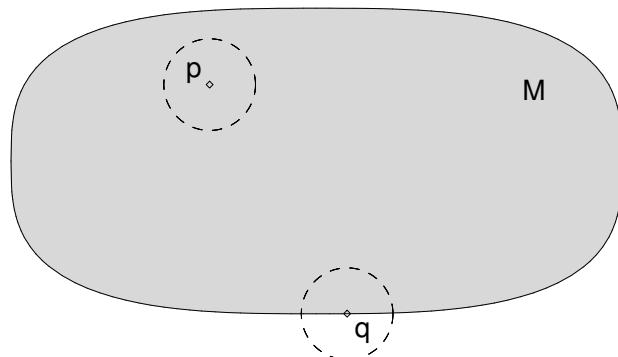
9. Uzavřenou souvislou množinu M nazveme **uzavřenou oblastí**.

Věta 1.1 I) Množina M je uzavřená, právě když obsahuje svoji hranici, tj. $hM \subset M$.

II) M je otevřená, právě když nemá společné body se svou hranicí, tj. $M \cap hM = \emptyset$.

III) Množina M je uzavřená (otevřená), právě když je její doplněk $\mathbb{R}^n \setminus M$ otevřená (uzavřená) množina.

Na obrázku 1.5 je bod p vnitřním bodem a současně i bodem uzávěru množiny M , bod q je hraničním bodem a současně i bodem uzávěru množiny M .



Obrázek 1.5: Příklad vnitřního a hraničního bodu množiny.

Příklad 1.1 Zjistěte, které z množin

- 1) $M_1 = \langle -2, 3 \rangle$
- 2) $M_2 = \langle 2, 4 \rangle$
- 3) $M_3 = (4, 6)$
- 4) $M_4 = \{8\}$
- 5) $M_5 = \mathbb{R}^1$

jsou otevřené, uzavřené v \mathbb{R}^1 a stanovte jejich hranici.

1) $hM = \{-2, 3\}$, přičemž body $-2, 3 \in M_1$. Dále $\overline{M_1} = M_1 \cup hM_1 = \langle -2, 3 \rangle = M_1 \Rightarrow$ Množina je uzavřená (uzavřený interval).

2) $hM_2 = \{2, 4\}$, přičemž $2 \in M_2, 4 \notin M_2$, tedy M_2 neobsahuje všechny své hraniční body, a tudíž není uzavřenou množinou. Jelikož bod $2 \in M_2$ nepatří do M_2^0 (tj. není vnitřním bodem M_2), tak $M_2 \neq M_2^0$, z čehož plyne, že M_2 není otevřená množina.

3) $hM_3 = \{4, 6\}$, $4, 6 \notin M_3$, pak $\overline{M_3} = M_3 \cup hM_3 = \langle 4, 6 \rangle \neq M_3 = (4, 6)$, a tedy M_3 není uzavřená množina. Jelikož každý bod množiny M_3 je vnitřní, tj. $M_3 = M_3^0$, tak M_3 je otevřená množina.

4) Jelikož každé okolí bodu 8 má neprázdný průnik s M_4 , neboť $U_\delta(8) \cap M_4 = \{8\}$ pro libovolné $\delta > 0$, tak 8 je bod uzavřenu množiny M_4 , tedy $\overline{M_4} = M_4 \Rightarrow M_4$ je uzavřená množina.

5) Jelikož vnitřek prázdné množiny je prázdná množina, tj. $\text{Int } \emptyset = \emptyset$, tak \emptyset je otevřená množina a komplement, tj. $\mathbb{R}^1 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^1$, je podle věty 1.1 uzavřená množina.

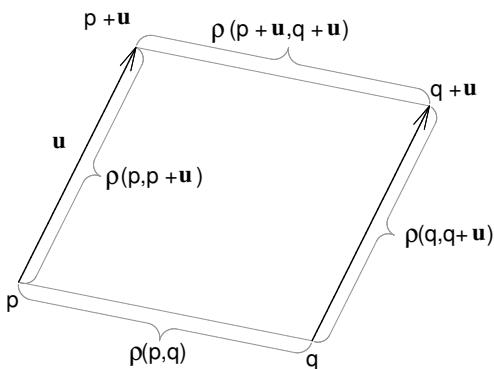
Jelikož každý bod \mathbb{R}^1 je vnitřním bodem, tak $\text{Int } \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^1$, tj. \mathbb{R}^1 je otevřená množina, a tedy komplement $\mathbb{R}^1 \setminus \mathbb{R}^1 = \emptyset$ je podle věty 1.1 uzavřená množina.

Tedy \emptyset, \mathbb{R}^1 , a tudíž i \mathbb{R}^n , jsou jak otevřené, tak i uzavřené množiny.

1.2 Zobrazení euklidovských prostorů

Důležitá bude pro nás ta skutečnost, že lze v \mathbb{R}^n přirozeným způsobem zavést pojem vektoru.

Představa vektoru v \mathbb{R}^n je spjata s **posunutím** (translací). Tento pojem je znám z elementární geometrie i z fyziky. Víme, že posunutí je jisté zobrazení, které je určeno **velikostí** a **směrem** a lze tudíž vektor interpretovat jako posunutí. Jeví se tedy přirozená tato definice:



Vektorem \mathbf{u} v \mathbb{R}^n budeme rozumět zobrazení, které každému bodu $p \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje právě jeden bod z \mathbb{R}^n , který označíme $p + \mathbf{u}$ (jde pouze o jinou formu zápisu - při zobrazení zpravidla používáme pro obraz zápisu $\mathbf{u}(p)$) tak, že platí pro každé dva body $p, q \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\rho(p, p + \mathbf{u}) &= \rho(q, q + \mathbf{u}) \\ \rho(p, q) &= \rho(p + \mathbf{u}, q + \mathbf{u}).\end{aligned}\quad (1.4)$$

(Viz obrázek.)

Označme souřadnice bodů $p, q, p + \mathbf{u}, q + \mathbf{u}$ takto:

$$\begin{aligned}p &= (x_1, \dots, x_n), & q &= (y_1, \dots, y_n), \\ p + \mathbf{u} &= (x'_1, \dots, x'_n), & q + \mathbf{u} &= (y'_1, \dots, y'_n).\end{aligned}$$

Lze ukázat, že platí

$$x'_i - x_i = y'_i - y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Říkáme, že vektor \mathbf{u} má **souřadnice** u_1, \dots, u_n , kde

$$u_i = x'_i - x_i (= y'_i - y_i), \quad i = 1, \dots, n$$

a vektor \mathbf{u} budeme zapisovat takto

$$\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n].$$

Říkáme, že bod $p' = p + \mathbf{u}$ je posunutím bodu p o vektor \mathbf{u} (nebo též, že jsme jej dostali „přičtením“ vektoru \mathbf{u} k bodu p). Je-li $p' = p + \mathbf{u}$, pak píšeme též

$$\mathbf{u} = p' - p$$

a říkáme, že vektor \mathbf{u} je „rozdílem“ bodů p', p (v tomto pořadí).

Každému vektoru je tedy přiřazena n-tice jeho souřadnic. Je-li naopak $[u_1, \dots, u_n]$ n-tice reálných čísel, pak zobrazení $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n)$ je translace, tj. má vlastnosti 1.4 a určuje tedy vektor \mathbf{u} o souřadnicích $[u_1, \dots, u_n]$.

Množinu všech vektorů prostoru \mathbb{R}^n označíme $V(\mathbb{R}^n)$ a nazveme ji **vektorovým prostorem** prostoru \mathbb{R}^n (také se používá termínu **vektorové zaměření** prostoru \mathbb{R}^n).

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbf{f} je zobrazení A do prostoru \mathbb{R}^m , $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Je-li $m = n$, můžeme si takové zobrazení představit jako přemisťování bodů v n-rozměrném prostoru (pro $n = 2$ v rovině). Například zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^3 si můžeme představit jako deformaci hmotného tělesa, kdy jednotlivé body mění při tomto procesu svou polohu. Některá zobrazení z \mathbb{R} do \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) nám později poslouží pro popis křivek v rovině či prostoru; některá zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^3 nám zase poslouží pro popis ploch v prostoru. Přestože budeme studovat převážně reálné funkce, přece se v některých situacích bez zobrazení neobejdeme.

Zobrazení $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ přiřazuje bodu $p = (x_1, \dots, x_n) \in A$ bod $q = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, tedy

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m). \quad (1.5)$$

Každá souřadnice y_i ($i = 1, \dots, m$) je při daném zobrazení \mathbf{f} jednoznačně určena n-ticí (x_1, \dots, x_n) . Existují tedy funkce $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$. Tyto funkce dostaneme takto: Označme $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ i-tou projekci, tj. $\pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i$. Je tedy

$$\pi_i(\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)) = \pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i,$$

takže $f_i = \pi \circ f$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Zobrazení \mathbf{f} je tedy určeno uspořádanou m-ticí funkcí (f_1, \dots, f_m) , píšeme

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m).$$

Funkce f_i se nazývají **složky (komponenty nebo souřadnice)** zobrazení \mathbf{f} . Vztah 1.5 lze pak pomocí složek f_i vyjádřit také takto

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Rovnice 1.6 se nazývají **definujícími rovnicemi** zobrazení \mathbf{f} .

Uvedeme příklady zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^3 , která budou mít význam v kapitolách vícerozměrného integrálu a plošného integrálu.

Příklad 1.2 Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$,

$$\mathbf{f}(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v), \quad R > 0.$$

Je tedy $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle 0, \pi \rangle$.

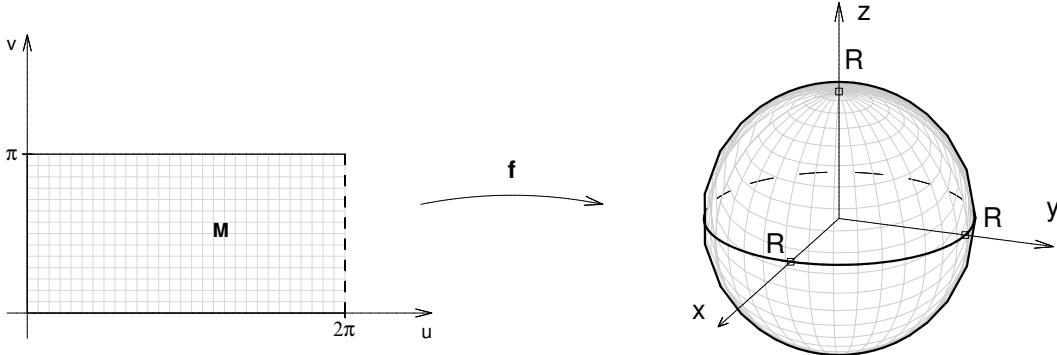
Definující rovnice zobrazení \mathbf{f} můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v) = R \cos u \sin v \\ y &= f_2(u, v) = R \sin u \sin v \quad (u, v) \in M \\ z &= f_3(u, v) = R \cos v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Odtud } x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \cos^2 v = \\ &= R^2 \sin^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + R^2 \cos^2 v = R^2. \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

což je implicitní rovnice **kulové plochy** o poloměru R se středem v počátku.
Geometrický význam daného zobrazení je na obrázku 1.6.



Obrázek 1.6: Kulová plocha

Příklad 1.3 Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$,

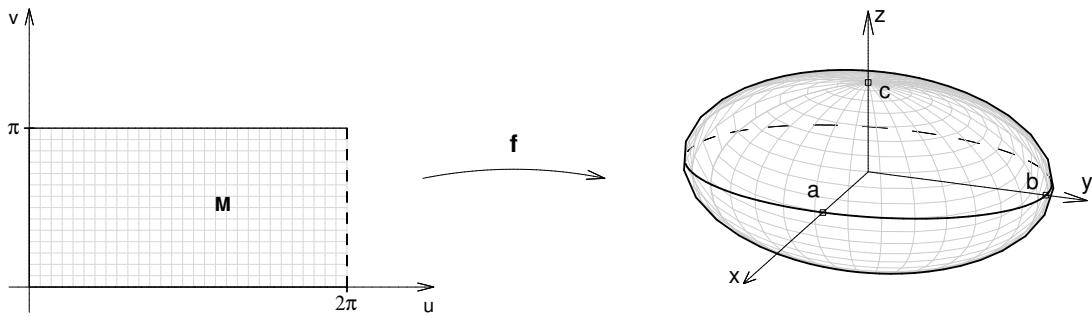
$$\mathbf{f}(u, v) = (a \cos u \sin v, b \sin u \sin v, c \cos v),$$

kde a, b, c jsou obecně navzájem různé kladné konstanty.

Je tedy opět $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle 0, \pi \rangle$ a platí

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \sin v \\ y &= b \sin u \sin v \quad (u, v) \in M \\ z &= c \cos v \end{aligned}$$

$$\text{Odtud } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 v = 1,$$



Obrázek 1.7: Trojosý elipsoid

což je implicitní rovnice **trojosého elipsoidu**, který v případě $a = b$ přechází v **rotační elipsoid** s osou z (podobně i pro $a = c$ s osou y , $b = c$ s osou x). V případě $a = b = c$ pak v kulovou plochu (sféru).

Geometrický význam zobrazení f je na obrázku 1.7.

Příklad 1.4 Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$,

$$\mathbf{f}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2),$$

kde a, b jsou obecně navzájem různé kladné konstanty.

Tedy $u \in \langle 0, \infty \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a platí

$$\begin{aligned} x &= au \cos v \\ y &= bu \sin v \quad (u, v) \in M. \\ z &= u^2 \end{aligned}$$

$$\text{Odtud} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z.$$

$$\text{Tedy} \quad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

což je rovnice **eliptického paraboloidu**. Je-li $a = b$, pak mluvíme o **rotačním paraboloidu**.

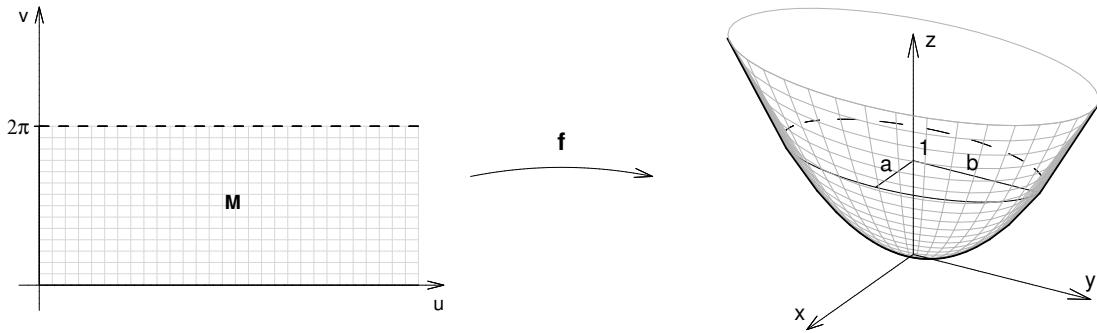
Geometrický význam zobrazení f je na obrázku 1.8.

Rovnice $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ je opět rovnice eliptického paraboloidu s definujícími rovnicemi

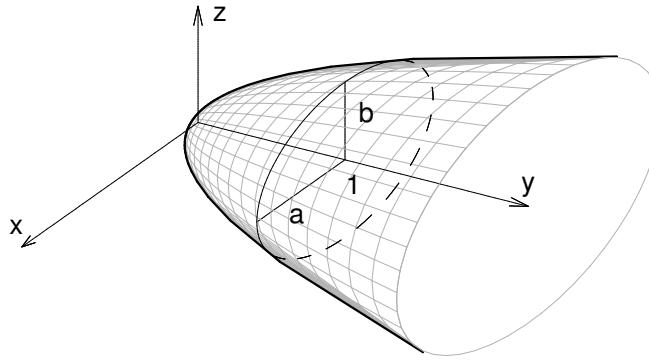
$$\begin{aligned} x &= au \cos v \\ y &= u^2 \quad (u, v) \in M, \\ z &= bu \sin v \end{aligned}$$

který má osu nikoliv v ose z , ale v ose y , viz obrázek 1.9.

Podobně i $x = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ je rovnice eliptického paraboloidu s osou v ose x .



Obrázek 1.8: Eliptický paraboloid



Obrázek 1.9: Eliptický paraboloid s osou v ose y

Příklad 1.5 Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = (-\infty, \infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle$,

$$\mathbf{f}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u),$$

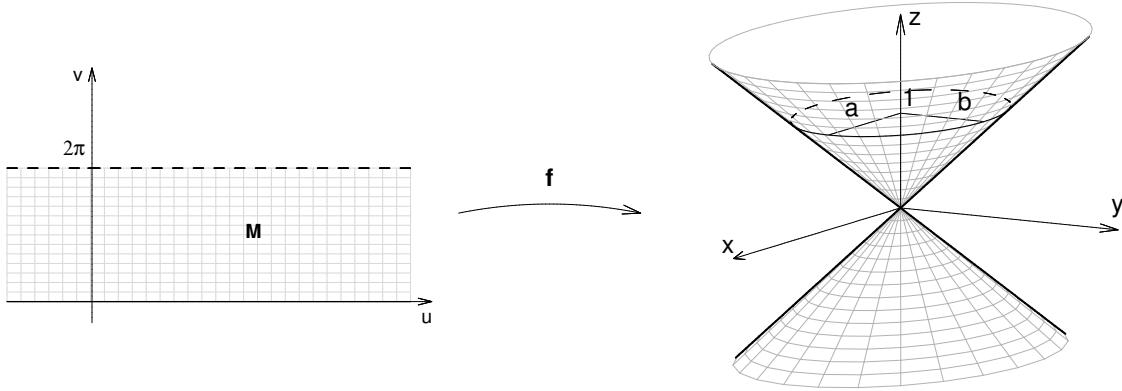
kde a, b jsou obecně navzájem různé kladné konstanty.

Tedy $u \in (-\infty, \infty)$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a platí

$$\begin{aligned} x &= au \cos v \\ y &= bu \sin v \quad (u, v) \in M. \\ z &= u \end{aligned}$$

$$\text{Odtud} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z^2.$$

$$\text{Tedy} \quad z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$



Obrázek 1.10: Eliptická kuželová plocha

což je implicitní rovnice **eliptického kuželové plochy**. Je-li $a = b$, pak jedná se o **rotační kuželovou plochu**.

Geometrický význam zobrazení f je na obrázku 1.10.

Rovnice $z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}$, resp. $z = -\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}$, je rovnicí „horní“, resp. „dolní“ kuželové plochy.

Podobně $x^2 = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$, resp. $y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$, je rovnice kuželové plochy s osou v ose x , resp. v ose y .

Příklad 1.6 Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = \langle 0, 2\pi \rangle \times (-\infty, \infty)$,

$$\mathbf{f}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v),$$

kde a, b jsou obecně navzájem různé kladné konstanty.

Tedy $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in (-\infty, \infty)$ a platí

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \\ y &= b \sin u \quad (u, v) \in M \\ z &= v \end{aligned}$$

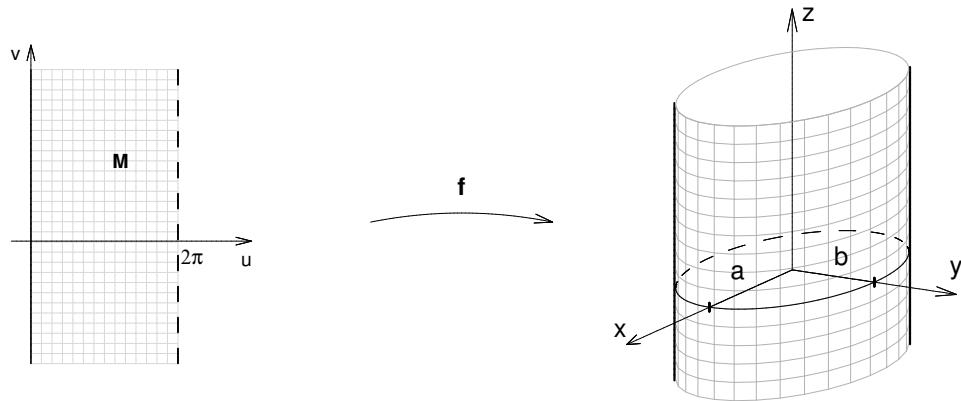
$$\text{Odtud } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

$$\text{Tedy } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

což je implicitní rovnice **eliptické válcové plochy**, $z \in (-\infty, \infty)$, s osou v ose z . Je-li $a = b$, jedná se o **rotační válcovou plochu**, tj $x^2 + y^2 = R^2$.

Geometrický význam zobrazení f je na obrázku 1.11.

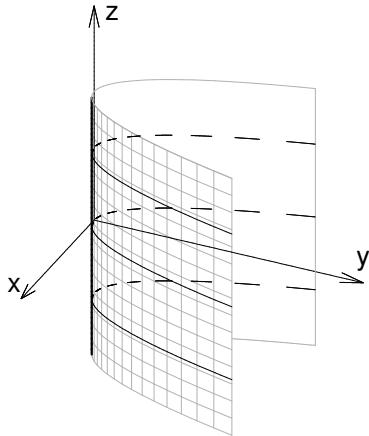
Podobně i $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, resp. $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, jsou eliptické válcové plochy s osami v ose y , resp. v ose x .



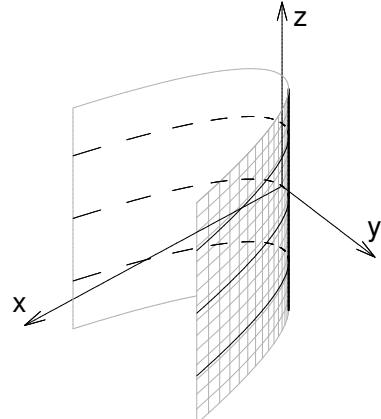
Obrázek 1.11: Eliptická válcová plocha

Analogicky $x^2 + z^2 = R^2$, resp. $y^2 + z^2 = R^2$, jsou rotační válcové plochy s osami v ose y, resp. v ose x.

Odtud plyne, že rovnice kuželoseček v rovině jsou v prostoru rovnicemi válcových ploch. V případě rovnice paraboly, resp. hyperboly, mluvíme o **parabolické válcové ploše** (viz obrázky 1.12 a 1.13), resp. **hyperbolické válcové ploše**.



Obrázek 1.12: Parabolická válcová plocha $y = x^2$



Obrázek 1.13: Parabolická válcová plocha $y^2 = x$

Na parabolickou válcovou plochu $y = x^2$ se můžeme dívat jako na zobrazení $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde $M = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$, $\mathbf{f}(u, v) = (u, u^2, v)$, tj.

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= u^2 \\ z &= v \end{aligned} \quad (u, v) \in M,$$

podobně $y^2 = x$ lze reprezentovat zobrazením $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde $M = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$, $\mathbf{f}(u, v) = (u^2, u, v)$, tj.

$$\begin{aligned} x &= u^2 \\ y &= u \quad (u, v) \in M \\ z &= v \end{aligned}$$

Uvažujme nyní zobrazení $\vec{\mathbf{f}} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^m)$.

V tomto případě složky vektorové funkce $\vec{\mathbf{f}}$ určují v každém bodě p souřadnice vektoru $\vec{\mathbf{f}}(p) \in V(\mathbb{R}^m)$. Označíme-li tyto složky opět např. f_1, \dots, f_m , píšeme

$$\vec{\mathbf{f}} = [f_1, \dots, f_m].$$

Je tedy $\vec{\mathbf{f}}(p)$ vektor o souřadnicích $f_1(p), \dots, f_m(p)$ (rozumí se ve standarní bázi prostoru $V(\mathbb{R}^m)$).

Vektorovou funkcí v \mathbb{R}^n budeme rozumět zobrazení $\vec{\mathbf{f}} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Speciálně pro $A \subset \mathbb{R}$, tedy $n = 1$, hovoříme o **vektorové funkci skalárního argumentu**.

Zcela analogicky jako u zobrazení můžeme vektorovou funkci vyjádřit pomocí souřadnic v následujícím tvaru:

Je-li $p \in A$, pak $\vec{\mathbf{f}}(p) = f_1(p)\mathbf{e}_1 + f_2(p)\mathbf{e}_2 + \dots + f_m(p)\mathbf{e}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ je standardní báze v $V(\mathbb{R}^m)$.

Poznamenejme, že funkce jedné nebo více proměnných tj. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, budeme nazývat **skalárními funkcemi**.

Zejména ve fyzikálních aplikacích budeme v případě vektorové funkce $\vec{\mathbf{f}} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^n)$, $A \subset \mathbb{R}^n$, hovořit o **vektorovém poli** $\vec{\mathbf{f}}$ a analogicky v případě skalární funkce o **skalárním poli**.

Příklad 1.7 Zvolíme-li v \mathbb{R}^3 kartézskou soustavu souřadnic tak, aby hmotný bod o hmotnosti M ležel v jejím počátku O , je intenzita gravitačního pole vytvořeného tímto hmotným bodem

$$\vec{\mathbf{E}} = -\kappa \frac{M}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r},$$

kde \mathbf{r} je rádiusvektor libovolného bodu $p \neq O$. Toto pole můžeme též vyjádřit vzorcem

$$\vec{\mathbf{E}} = -\kappa \frac{M}{|p - O|^3} (p - O), \quad p \in \mathbb{R}^3, \quad p \neq O.$$

Vektor $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(p)$ je vektor intenzity gravitačního pole v bodě p .

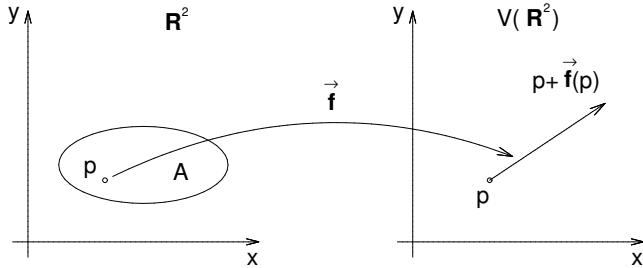
V kartézské soustavě $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vyjádříme pole $\vec{\mathbf{E}}$ pomocí souřadnic následovně:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\kappa \frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3),$$

kde $p = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, nebo též

$$\vec{\mathbf{E}} = \left(\frac{-\kappa M x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-\kappa M y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-\kappa M z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Vektorové pole $\vec{f} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^n)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ pro $n = 2, n = 3$ znázorňujeme tak, že v každém bodě $p \in A$ zobrazíme vektor $\vec{f}(p)$ jako orientovanou úsečku (šipku) s počátečním bodem p a koncovým bodem $p + \vec{f}(p)$, viz obrázek 1.14.



Obrázek 1.14: Vektorové pole

1.3 Derivace ve směru, parciální derivace

V tomto odstavci si připomeneme pojem směrové a parciální derivace, zavedený již v kurzu BMA1, avšak z pohledu lineární algebry, zejména lineárních forem, které nám umožní logickou „výstavbu“ výše uvedených pojmu včetně názorných odlišností derivace funkcí jedné proměnné a derivace funkcí více proměnných.

Definice 1.2 Nechť $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^k$ a nechť $p \in G$ je vnitřní bod množiny G , $\mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^k)$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h\mathbf{a}) - f(p)}{h},$$

nazýváme ji **derivací funkce** f v bodě $p \in G$ podle vektoru $\mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^k)$ a značíme $f'_{\mathbf{a}}(p)$. Je-li vektor \mathbf{a} jednotkový, hovoříme o **směrové derivaci**.

Směrové derivace $f'_{\mathbf{e}_1}, f'_{\mathbf{e}_2}, \dots, f'_{\mathbf{e}_k}$, kde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ jsou vektory standardní báze (tj. $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1)$), nazýváme **parciálními derivacemi** funkce f . Směrovou derivaci $f'_{\mathbf{e}_j}$, ($j = 1, \dots, k$) nazýváme parciální derivaci 1. řádu vzhledem k j-té souřadnici (k j-té proměnné) a značíme $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. V případě $k = 2$, respektive $k = 3$, budeme značit proměnné x, y , respektive x, y, z a parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, respektive $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Předpokládejme nyní, že v bodě $p \in G$ existuje směrová derivace $f'_{\mathbf{a}}(p) \forall \mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^k)$ a že zobrazení $F : \mathbf{a} \mapsto f'_{\mathbf{a}}(p)$ je **lineární formou** vektoru \mathbf{a} , tedy:

- 1) $F(c \cdot \mathbf{a}) = c \cdot F(\mathbf{a})$, tj. $f'_{c \cdot \mathbf{a}}(p) = c \cdot f'_{\mathbf{a}}(p)$, pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^k)$.

2) $F(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = F(\mathbf{a}) + F(\mathbf{b})$, tj. $f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p) = f'_\mathbf{a}(p) + f'_\mathbf{b}(p)$, pro libovolné $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathbb{R}^k)$.

Je zřejmé, že existuje-li $f'_\mathbf{a}(p)$, pak existuje i $f'_{c\cdot\mathbf{a}}(p)$, $c \in \mathbb{R}$ a platí $f'_{c\cdot\mathbf{a}}(p) = c \cdot f'_\mathbf{a}(p)$. Naproti tomu, z existence směrových derivací $f'_\mathbf{a}(p), f'_\mathbf{b}(p)$ obecně neplyne existence $f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p)$ a v případě, že $f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p)$, existuje, nemusí platit

$$f'_\mathbf{a}(p) + f'_\mathbf{b}(p) = f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p). \quad (1.7)$$

Příklad 1.8 Nechť $p = (0, 0)$, $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1)$. Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{Pak } f'_\mathbf{a}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\text{Podobně } f'_\mathbf{b}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (0, 1)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot ((1, 0) + (0, 1))) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{h^2+h^2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = \begin{cases} \infty, & h \rightarrow 0^+ \\ -\infty, & h \rightarrow 0^- \end{cases} \end{aligned}$$

Limita a tedy $f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p)$ v bodě p neexistuje.

Příklad 1.9 Nechť $p = (0, 0)$, $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1)$. Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f'_\mathbf{a}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$f'_\mathbf{b}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (0, 1)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot ((1, 0) + (0, 1))) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, h) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2(h+h)}{h^2+h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Tedy $f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p) = 1 \neq 0 = f'_\mathbf{a}(p) + f'_\mathbf{b}(p)$.

Jestliže však $f'_{\mathbf{a}}$ existuje v jistém okolí $U(p)$ bodu p a je v bodě p spojitá a existuje-li $f'_{\mathbf{b}}(p)$, pak existuje i $f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p)$, přičemž

$$f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p) = f'_{\mathbf{a}}(p) + f'_{\mathbf{b}}(p).$$

Nechť nyní $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_k \mathbf{e}_k$, pak $F(\mathbf{a}) = a_1 F(\mathbf{e}_1) + \dots + a_k F(\mathbf{e}_k)$, tj. $f'_{\mathbf{a}}(p) = F(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w} = (F(\mathbf{e}_1), \dots, F(\mathbf{e}_k)) = (f'_{\mathbf{e}_1}(p), \dots, f'_{\mathbf{e}_k}(p)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \right)$

Vektor $\mathbf{w} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \right)$ nazýváme **derivací** funkce f v bodě p nebo také **gradientem** funkce f v bodě p a značíme $f'(p)$ nebo $\text{grad } f(p)$.

Funkce f má v bodě p gradient, právě když funkce $F : \mathbf{a} \mapsto f'_{\mathbf{a}}(p)$ je lineární formou a platí

$$f'_{\mathbf{a}}(p) = \mathbf{a} \cdot \text{grad } f(p).$$

Z existence gradientu funkce f v bodě p , tedy všech parciálních derivací v bodě p , obecně neplyne spojitost funkce f v bodě p , což je podstatný rozdíl oproti funkci jedné proměnné, kde z existence derivace v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ plynula spojitost funkce f v bodě x_0 .

Příklad 1.10 Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{Platí } \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = f'_{\mathbf{e}_1}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = 0,$$

$$\text{podobně } \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = f'_{\mathbf{e}_2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (0, 1)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = 0.$$

Tedy parciální derivace v bodě $(0, 0)$ existují a platí $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$.

Nyní vyšetříme spojitost funkce f v bodě $(0, 0)$, ukážeme, že f v počátku není spojitá. K tomu stačí ukázat, že některé její zúžení (restrikce) na množinu obsahující počátek není v počátku spojité.

Nechť h je zúžení funkce f na množinu

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = kx, k \neq 0\},$$

což je svazek průměk procházejících počátkem ($h = f|_M$).

$$\text{Tedy } h(x) = f(x, kx) = \begin{cases} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vidíme, že limita zúžení $h(x)$ pro $x \rightarrow 0$ závisí na konstantě k , tedy například pro $k = 1, k = 2$, tedy průměky $y = x, y = 2x$, dostáváme dva různé výsledky:

$$k = 1 : \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{1}{2}$$

$$k = 2 : \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{2}{5}$$

Odtud plyne, že limita funkce f v počátku neexistuje, tedy f není v počátku spojitá, přičemž parciální derivace v počátku existují.

Tedy existence parciálních derivací funkce f v bodě p je poměrně slabým předpokladem o chování funkce v bodě p . Je patrné, že samotná existence parciálních derivací ve smyslu výše uvedené definice není vhodným zobecněním pojmu diferencovatelnosti funkce jedné proměnné na případ funkce více proměnných.

Jediným vhodným zobecněním je pojem diferencovatelnosti, tak jak jej nyní budeme definovat:

Řekneme, že funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^k$ je **diferencovatelná** (má **diferenciál**) v bodě $p \in G$, existuje-li $\text{grad } f(p)$ a platí-li

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(p + \mathbf{a}) - f(p) - \text{grad } f(p) \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = 0.$$

Lineární formu

$$F(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{a}}(p) = \text{grad } f(p) \cdot \mathbf{a}$$

nazveme **diferenciálem** (totálním diferenciálem) funkce f v bodě p a značíme $\text{d}f(p, \mathbf{a})$. Platí tedy

$$\text{d}f(p, \mathbf{a}) = \text{grad } f(p) \cdot \mathbf{a}$$

Je-li $p = (x_1, \dots, x_k)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$, pak

$$\begin{aligned} \text{d}f(p, \mathbf{a}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \right) \cdot (a_1, \dots, a_k) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdot a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \cdot a_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \cdot a_k \end{aligned}$$

nebo v tradičním tvaru

$$\text{d}f(p, \mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \cdot dx_k.$$

Příklad 1.11 Vypočtěte diferenciál funkce $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $p = (x, y) \neq (0, 0)$.

$$\text{Platí } \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Tedy } \text{d}f(p, \mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot dy = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Velice důležitá vlastnost diferencovatelných funkcí je, že je-li funkce f diferencovatelná v bodě $p \in G \subset \mathbb{R}^k$, pak je již v bodě p spojitá.

Řekneme, že funkce f je diferencovatelná na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^k$, je-li diferencovatelná v každém bodě $p \in G$.

Řekneme, že funkce f je **třídy C_1** na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^k$, existuje-li na G gradient funkce f a je spojitý, píšeme $f \in C_1(G)$.

Platí: $f \in C_1(G) \Rightarrow f$ je diferencovatelná na $G \Rightarrow f$ je spojitá na G .

Uvažujme nyní funkci $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^k$, která má v nějakém okolí bodu $p \in G$ směrovou derivaci $f'_{\mathbf{a}}$. Pak existuje v bodě p směrová derivace $(f'_{\mathbf{a}})'_{\mathbf{b}}(p)$ funkce $f'_{\mathbf{a}}$ ve směru vektoru \mathbf{b} , kterou nazveme směrovou derivací druhého řádu v bodě p ve směru vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} a značíme $f''_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(p)$.

Obecně indukcí definujeme směrovou derivace n-tého řádu:

$$f_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n}^{(n)} = (f_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}}^{(n-1)})'_{\mathbf{u}_n}$$

Směrové derivace n-tého řádu ve směru vektorů standardní báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ tj. směrové derivace

$$f_{\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}}^{(n)},$$

kde (j_1, j_2, \dots, j_n) je libovolná permutace s opakováním množiny indexů $(1, 2, \dots, n)$, nazýváme **parciálními derivacemi n-tého řádu** funkce f a budeme značit

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n} \cdots \partial x_{j_1}}.$$

Nechtějme $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je funkce, která má parciální derivace druhého řádu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, kde $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, pak příslušné derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ nazýváme **smíšenými parciálními derivacemi druhého řádu**. Existují-li smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$, nemusí platit rovnost

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$$

Příklad 1.12 Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

V libovolném bodě různém od počátku platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

V počátku pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$\text{podobně} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Nyní spočteme smíšené parciální derivace v počátku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}((0, 0) + h \cdot (0, 1)) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \end{aligned}$$

Tedy smíšené derivace se v počátku nerovnají.

Existují-li však smíšené derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, a jsou spojité na G , pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Řekneme, že funkce f je **třídy C_n** na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^k$, má-li f na G spojité parciální derivace n-tého rádu, píšeme $f \in C_n(G)$.

Definice 1.3 *Nechť $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^k$, pak vektor*

$$\Psi'_{\mathbf{u}}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(p + h \cdot \mathbf{u}) - \Psi(p)}{h}$$

nazveme směrovou derivací zobrazení v bodě $p \in G$ ve směru vektoru $\mathbf{u} \in V(\mathbb{R}^k)$, ($|\mathbf{u}| = 1$).

Směrové derivace $\Psi'_{\mathbf{e}_j}(p)$ nazýváme parciálními derivacemi zobrazení Ψ podle j-té proměnné. Platí, že derivace $\Psi'_{\mathbf{u}}(p)$ existuje právě tehdy, když existují derivace všech souřadnic v bodě p ve směru \mathbf{u} , tj.

$$\Psi'_{\mathbf{u}}(p) = ((\Psi_1)'_{\mathbf{u}}(p), \dots, (\Psi_n)'_{\mathbf{u}}(p))$$

Prostřednictvím souřadnic zobrazení lze analogicky zavést pojem diferencovatelnosti zobrazení.

Uvažujme nyní zobrazení $\Psi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencovatelné na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^k$, pak pro každé $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k) \in V(\mathbb{R}^k)$ platí:

$$\begin{aligned} \Psi'_{\mathbf{u}} &= ((\Psi_1)'_{\mathbf{u}}, \dots, (\Psi_n)'_{\mathbf{u}}) = (\text{grad}\Psi_1 \cdot \mathbf{u}, \dots, \text{grad}\Psi_n \cdot \mathbf{u}) = \\ &= \left(\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_k} \right) \cdot (u_1, \dots, u_k), \dots, \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \right) \cdot (u_1, \dots, u_k) \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} \cdot u_i, \dots, \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_i} \cdot u_i \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \\ &= \Psi' \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Matici Ψ' nazýváme **Jacobiovou maticí** nebo **derivací** zobrazení Ψ na G . Je-li $k = n$, pak determinant Jacobiovy matice nazýváme **jakobiánem** zobrazení Ψ a značíme $D\Psi$. Uvedené pojmy budou hrát důležitou roli při formulování věty o substituci v n-rozměrném integrálu.

Příklad 1.13 *Nechť $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,*

$$\Psi(x, y, z) = (xyz, x^2 + y^2, x + z).$$

V našem případě

$$\begin{aligned}\Psi_1(x, y, z) &= xyz \\ \Psi_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 \\ \Psi_3(x, y, z) &= x + z,\end{aligned}$$

tj. Jacobiova matice má tvar

$$\boldsymbol{\Psi}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jacobián $D\Psi$ je pak tvaru

$$D\Psi = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2y^2z - 2y^2x - 2x^2z.$$

1.4 Vektorová analýza

Uvažujme nyní otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^3$ a funkci $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C_1(G)$. Označíme-li $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektory standardní báze prostoru $V(\mathbb{R}^3)$, pak platí pro bod $p \in G$

$$\text{grad } f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \mathbf{k}.$$

Jestliže $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ je skalární pole třídy C_1 na G , pak zobrazení $\text{grad } f : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$ je vektorové pole definované na G .

Nechť $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in C_1(G)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí:

- 1) $\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$
- 2) $\text{grad}(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \text{grad } f$
- 3) $\text{grad}(f \cdot g) = f \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f$

Definice 1.4 Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3) : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$ vektorové pole, $\vec{\mathbf{F}} \in C_1(G)$. **Divergencí** pole $\vec{\mathbf{F}}$ nazýváme funkci $\text{div } \vec{\mathbf{F}} : G \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\text{div } \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Nechť $\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{H}} : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$ jsou vektorová pole třídy C_1 na G , $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ funkce třídy C_1 na G , pak platí:

- 1) $\text{div}(\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{H}}) = \text{div } \vec{\mathbf{F}} + \text{div } \vec{\mathbf{H}}$

- 2) $\operatorname{div}(\alpha \cdot \vec{\mathbf{F}}) = \alpha \cdot \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}$
 3) $\operatorname{div}(f \cdot \vec{\mathbf{F}}) = f \cdot \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}} \cdot \operatorname{grad} f$

Ukažme si například platnost identity 3). Označme L , resp. P , levou, resp. pravou stranu identity. Pak $f \cdot \vec{\mathbf{F}} = (f \cdot F_1, f \cdot F_2, f \cdot F_3)$ a platí

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{div}(f \cdot \vec{\mathbf{F}}) = \operatorname{div}(f \cdot F_1, f \cdot F_2, f \cdot F_3) = \frac{\partial(f \cdot F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(f \cdot F_2)}{\partial y} + \frac{\partial(f \cdot F_3)}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot F_1 + f \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot F_2 + f \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot F_3 + f \cdot \frac{\partial F_3}{\partial z} = \\ &= f \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \\ &= f \cdot \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} + \operatorname{grad} f \cdot \vec{\mathbf{F}} = P. \end{aligned}$$

Identita je dokázána.

Divergenci vektorového pole lze definovat obecně v \mathbb{R}^n :

Nechť $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, \dots, F_n) : G \rightarrow V(\mathbb{R}^n)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, je vektorové pole třídy C_1 na G , pak definujeme

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Definice 1.5 Nechť $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3) : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$, $G \subset \mathbb{R}^3$, je vektorové pole třídy C_1 na otevřené množině G . **Rotaci** vektorového pole $\vec{\mathbf{F}}$ nazýváme vektorové pole definované předpisem

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Rotaci vektorového pole lze přehledně napsat pomocí symbolického determinantu třetího řádu

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix},$$

kde každý součin, např. $\mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) F_3$, chápeme jako parciální derivaci násobenou vektorem standardní báze, tedy $\frac{\partial F_3}{\partial y} \mathbf{i}$.

Výhodnější je však počítat rotaci vektorového pole $\vec{\mathbf{F}}$ rozvojem výše uvedeného determinantu podle prvního řádku, viz následující příklad.

Příklad 1.14 Vypočtěte rotaci vektorového pole $\vec{\mathbf{F}} = (xyz, x+y+z, xz^2)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x+y+z & xz^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial(xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x+y+z)}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\partial(xz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xyz)}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} - \frac{\partial(xyz)}{\partial y} \right) = \\ &= \mathbf{i} \cdot (0-1) - \mathbf{j} \cdot (z^2-xy) + \mathbf{k} \cdot (1-xz) = \underline{(-1, xy-z^2, 1-xz)}.\end{aligned}$$

Nechtějme $\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{H}} : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$, $G \subset \mathbb{R}^3$, jsou vektorová pole třídy C_1 na otevřené množině G , $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ funkce třídy C_1 na G , pak platí:

- 1) $\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{H}}) = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} + \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}$
- 2) $\operatorname{rot}(f \cdot \vec{\mathbf{H}}) = f \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} + (\operatorname{grad} f) \times \vec{\mathbf{H}}$
- 3) $\operatorname{div}(\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{H}}) = \vec{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} - \vec{\mathbf{F}} \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}$
- 4) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \mathbf{0}$
- 5) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$
- 6) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

V tvrzeních 4), 5), 6) je třeba, aby $f, \vec{\mathbf{F}} \in C_2(G)$.

Ukažme si například platnost identity 2). $f \cdot \vec{\mathbf{H}} = (f \cdot H_1, f \cdot H_2, f \cdot H_3)$ a platí

$$\begin{aligned}L = \operatorname{rot}(f \cdot \vec{\mathbf{H}}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f \cdot H_1 & f \cdot H_2 & f \cdot H_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial(f \cdot H_3)}{\partial y} - \frac{\partial(f \cdot H_2)}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\partial(f \cdot H_3)}{\partial x} - \frac{\partial(f \cdot H_1)}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial(f \cdot H_2)}{\partial x} - \frac{\partial(f \cdot H_1)}{\partial y} \right) = \\ &= \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot H_3 + f \cdot \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot H_2 - f \cdot \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot H_3 + f \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot H_1 - f \cdot \frac{\partial H_1}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot H_2 + f \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot H_1 - f \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = \\ &= f \cdot \left(\mathbf{i} \left(\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \right) + \\ &+ \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot H_3 - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot H_2 \right) - \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot H_3 - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot H_1 \right) + \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot H_2 - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot H_1 \right) =\end{aligned}$$

$$= f \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} = f \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} + (\operatorname{grad} f) \times \vec{\mathbf{H}} = P.$$

Identita je dokázána.

Nechť nyní $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2) : G \rightarrow V(\mathbb{R}^2)$, $G \subset \mathbb{R}^2$, je třídy C_1 na otevřené množině G . **Rotací** rovinného pole $\vec{\mathbf{F}}$ nazýváme skalární pole

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

V aplikacích se používá operátor ∇ (čteme „nabla“), zavedený anglickým matematikem W. R. Hamiltonem:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

pomocí něhož lze $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}$, $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}$ formálně zapsat:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \nabla f && (\text{„násobek vektoru } \nabla \text{ skalárem } f \text{“}) \\ \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} &= \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} && (\text{„skalární součin vektorů } \nabla, \vec{\mathbf{F}} \text{“}) \\ \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} &= \nabla \times \vec{\mathbf{F}} && (\text{„vektorový součin vektorů } \nabla, \vec{\mathbf{F}} \text{“}) \end{aligned}$$

V teorii parciálních diferenciálních rovnic se setkáváme s **Laplaceovým operátorem** Δ definovaným předpisem

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Platí tedy $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ („skalární součin nabla operátorů“).

Samozřejmě analogickým způsobem jako u zavedení $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}$ v \mathbb{R}^n můžeme v \mathbb{R}^n zavést nabla operátor ∇ i Laplaceův operátor Δ .

Cvičení

Příklad 1 Vypočtěte derivaci funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $p \in G$ podle vektoru $\mathbf{u} \in V(\mathbb{R}^n)$, když

- a) $f(x, y) = x^y$, $p = (1, 0)$, $\mathbf{u} = (1, 1)$ $[f'_{\mathbf{u}}(1, 0) = 0]$
- b) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^3 - 3xyz$, $p = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $[f'_{\mathbf{u}}(1, 0, 1) = 1]$

Příklad 2 Zjistěte, zda existuje parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ funkce f zadáné předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \text{ neexistuje.} \right]$$

Příklad 3 Vypočtěte Jacobiovu matici zobrazení

a) $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \Psi(x, y, z) = (x^2yz, y \sin(x+z))$

$$\left[\Psi' = \begin{pmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ y \cos(x+z) & \sin(x+z) & y \cos(x+z) \end{pmatrix} \right]$$

b) $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^3, G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}, \Psi(x, y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}, xy \right)$

$$\left[\Psi' = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 4 Vypočítejte divergenci vektorových polí $\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$:

a) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + (2x + 3y + z)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ [div $\vec{\mathbf{F}} = yz + 3$]

b) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5)\mathbf{i} + (4x^3y + xz + 2)\mathbf{j} + (xy - 3xz^2 - 3)\mathbf{k}$ [div $\vec{\mathbf{F}} = 12xy^2 + 4x^3 - 6xz$]

Příklad 5 Nechť $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^3$, vypočítejte

a) div $(f \operatorname{grad} f)$ [div $(f \operatorname{grad} f) = |\operatorname{grad} f|^2 + f \cdot \Delta f$]

b) div $(f \operatorname{grad} g)$ [div $(f \operatorname{grad} g) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \cdot \Delta g$]

Příklad 6 Vypočítejte rotaci vektorového pole $\vec{\mathbf{F}}$:

a) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = y^2z\mathbf{i} + z^2x\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$ [rot $\vec{\mathbf{F}} = (x^2 - 2xz)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (z^2 - 2yz)\mathbf{k}$]

b) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + (2x + 3y - z)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ [rot $\vec{\mathbf{F}} = (2y + 1)\mathbf{i} + (xy - 2x)\mathbf{j} + (2 - xz)\mathbf{k}$]

Příklad 7 Dokažte, že pro vektorové pole $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3)$ platí

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}) - \Delta \vec{\mathbf{F}}, \quad \text{kde } \Delta \vec{\mathbf{F}} = \Delta F_1\mathbf{i} + \Delta F_2\mathbf{j} + \Delta F_3\mathbf{k}.$$

2 Integrální počet funkcí více proměnných

2.1 Pojem n-rozměrného integrálu v \mathbb{R}^n

V předmětu BMA1 jste poznali pojem Cauchyova-Riemannova integrálu ohraničené reálné funkce jedné reálné proměnné přes kompaktní (tj. ohraničený uzavřený) interval v \mathbb{R}^1 . Nyní tuto definici zobecníme na funkce více proměnných. Nejprve budeme definovat n-rozměrný objem n-rozměrného intervalu v \mathbb{R}^n (pro $n = 1$ budeme mluvit přirozeně o délce, pro $n = 2$ o obsahu).

Je-li $I \subset \mathbb{R}^1$ jednorozměrný ohraničený interval o krajních bodech a, b ($a < b$) (I může být otevřený, uzavřený či polouzavřený), pak jeho **délkou** („jednorozměrným objemem“) nazýváme číslo

$$\nu_1(I) = b - a.$$

Je-li $I \subset \mathbb{R}^n$ n-rozměrný ohraničený interval, pak se dá vyjádřit jako kartézský součin n jednorozměrných ohraničených intervalů i_1, \dots, i_n :

$$I = i_1 \times i_2 \times \cdots \times i_n.$$

Potom **n-rozměrným objemem intervalu I** nazýváme číslo

$$\nu_n(I) = \nu_1(i_1)\nu_1(i_2)\cdots\nu_1(i_n).$$

Bude-li patrné, jaké je n , budeme místo ν_n psát pouze ν . Jak jsme již poznamenali výše u dvourozměrného intervalu, mluvíme místo o „dvourozměrném objemu“ o obsahu.

Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní interval. **Dělením intervalu I** nazveme konečný soubor

$$\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_m)$$

kompaktních intervalů J_i ($i = 1, \dots, m$), které se nepřekrývají (tj. žádné dva intervaly J_i, J_k , $i \neq k$, nemají společné vnitřní body) a takových, že $I = \bigcup_{i=1}^m J_i$.

Normou dělení \mathcal{D} nazveme největší z průměrů intervalů J_i ($i = 1, \dots, m$), tuto normu označíme $\|\mathcal{D}\|$.

Poznamenejme, že pro (n-rozměrný) objem $\nu(I)$ platí rovnost

$$\nu(I) = \nu(J_1) + \cdots + \nu(J_m).$$

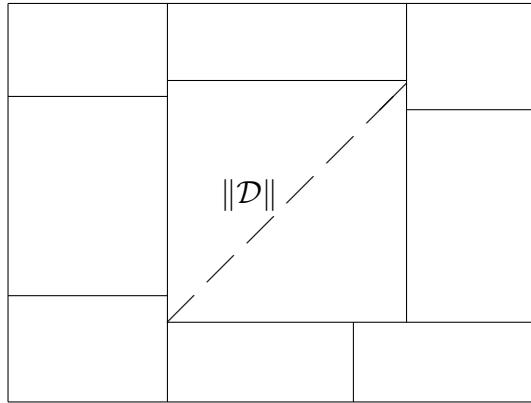
Říkáme, že objem je **aditivní funkcí intervalu**.

Příklad dělení dvourozměrného intervalu je naznačen na obr. 2.1

Jsou-li J, I dva kompaktní intervaly v \mathbb{R}^n , $J \subset I$, pak existuje takové dělení intervalu I , že J je jedním z intervalů tohoto dělení.

Jsou-li $\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_m)$, $\mathcal{D}' = (J'_1, \dots, J'_k)$ dvě dělení intervalu I , pak říkáme, že \mathcal{D}' je zjemněním dělení \mathcal{D} , jestliže každý interval J'_i je subintervalm některého intervalu J_r .

Poznámka. Jsou-li $\mathcal{D}_1 = (J_1, \dots, J_m)$, $\mathcal{D}_2 = (K_1, \dots, K_s)$ dvě dělení intervalu I , pak existuje dělení \mathcal{D}_3 , které je zjemněním dělení \mathcal{D}_1 i dělení \mathcal{D}_2 . Takové dělení můžeme



Obrázek 2.1: Dělení dvouozměrného intervalu a jeho norma.

sestrojit tak, že utvöríme všechny možné průniky $J_i \cap K_j$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, s$) a z nich vezmeme všechny ty, které jsou opět n-rozměrnými intervaly (tj. mají neprázdné vnitřky). Tyto pak tvoří zjemnění obou dělení $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$.

Nechť nyní reálná funkce f je ohraničená na kompaktním intervalu $I \subset \mathbb{R}^n$.

Nechť $\mathcal{D}_1 = (J_1, \dots, J_k)$ je dělení intervalu I . **Dolním součtem funkce f příslušným k dělení \mathcal{D}** nazveme číslo

$$\underline{S}_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{i=1}^k m_i \nu(J_i), \quad \text{kde } m_i = \inf_{p \in J_i} f(p).$$

Horním součtem funkce f příslušným k dělení \mathcal{D} nazveme číslo

$$\overline{S}_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{i=1}^k M_i \nu(J_i), \quad \text{kde } M_i = \sup_{p \in J_i} f(p).$$

Kromě dolních a horních součtů se zavádí též Cauchyovy integrální součty funkce f příslušné k dělení \mathcal{D} s vybranými body $p_i \in J_i$:

$$S_{\mathcal{D},(p_i)} = \sum_{i=1}^k f(p_i) \nu(J_i).$$

Zřejmě

$$m\nu(I) \leq \underline{S}_{\mathcal{D}}(f) \leq S_{\mathcal{D},(p_i)}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}}(f) \leq M\nu(I),$$

kde $m = \inf_{p \in I} f(p)$, $M = \sup_{p \in I} f(p)$.

Dále platí: Je-li \mathcal{D}' zjemněním dělení \mathcal{D} , pak

$$\underline{S}_{\mathcal{D}}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{D}'}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}'}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}}(f).$$

Definice 2.1 Jestliže se suprénum všech dolních součtů funkce f (příslušných všem možným dělením intervalu I) rovná infimu všech horních součtů funkce f , tj. jestliže

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}_{\mathcal{D}}(f) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}_{\mathcal{D}}(f), \quad (2.1)$$

pak tuto společnou hodnotu nazýváme **Cauchyovým-Riemannovým integrálem** funkce f přes interval $I \subset \mathbb{R}^n$. Mluvíme přesněji o n -rozměrném integrálu a značíme jej

$$\int_I f d\nu \quad \text{nebo} \quad \int_I f(p) dp \quad \text{nebo} \quad \overbrace{\int_I \cdots \int_I}^{\text{n-krát}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Množinu I nazýváme **integračním oborem**, funkci f nazýváme **integrandem**. Funkci f , která má integrál přes I , nazýváme **integrovatelnou** na I .

Dvourozměrný integrál nazýváme častěji **dvojným integrálem** funkce $f(x, y)$ a značíme jej

$$\iint_I f(x, y) dx dy;$$

trojrozměrný integrál nazýváme častěji **trojným integrálem** funkce $f(x, y, z)$ a značíme

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

Ve všech případech všek můžeme používat stručnějšího označení $\int_I f d\nu$.

K tomu, aby platila rovnost 2.1 je nutné a stačí, aby k libovolnému ε existovalo takové dělení \mathcal{D} , že

$$\overline{S}_{\mathcal{D}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{D}}(f) < \varepsilon.$$

Věta 2.1 Je-li funkce f spojitá na kompaktním intervalu I , pak $\int_I f d\nu$ existuje.

Poznámka. Dá se ukázat, že ohraničená funkce mající na I body nespojitosti je integrovatelná na I , je-li množina bodů nespojitosti v jistém smyslu „malá“, přesně, má-li nulovou míru (pojem množiny nulové míry bude zaveden později).

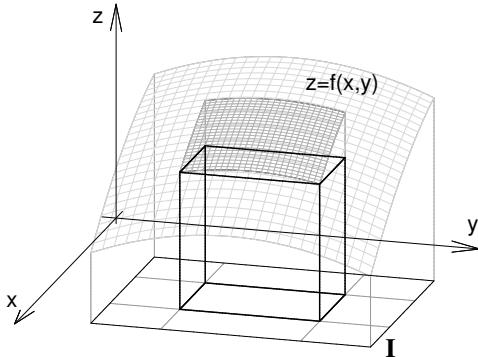
2.2 Geometrická interpretace dvojněho integrálu

Nechť funkce f je spojitá na kompaktním intervalu $I \subset \mathbb{R}^2$ a kladná na I^0 . Uvažujme podgraf funkce f

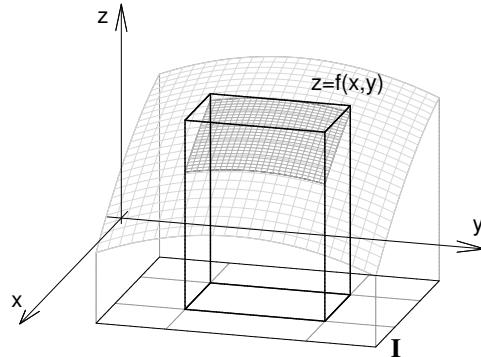
$$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in I, 0 \leq z \leq f(x, y)\} \quad (2.2)$$

Je-li f konstantní, pak \mathcal{G} je kvádrem (trojrozměrným kompaktním intervalom) v \mathbb{R}^3 . Není-li f konstantní, pak těleso \mathcal{G} připomíná svým tvarem „uražený kus“ kvádru.

Nechť $\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_k)$ je dělení intervalu I . Dolní součet $\sum_{i=1}^k m_i \nu_2(J_i)$ je objem tělesa složeného z kvádrů o podstavách J_i a výškách m_i a toto těleso je vepsané do tělesa \mathcal{G} , viz obr. 2.2. Naopak horní součet $\sum_{i=1}^k M_i \nu_2(J_i)$ je objem tělesa složeného z kvádrů o podstavách J_i a výškách M_i a toto těleso je opsané tělesu \mathcal{G} , viz obr. 2.3.



Obrázek 2.2: Kvádr o výšce m_i .



Obrázek 2.3: Kvádr o výšce M_i .

Chceme-li nějakým rozumným způsobem přiřadit tělesu \mathcal{G} objem $\nu_3(\mathcal{G})$, je přirozené požadovat splnění nerovností

$$\sum_{i=1}^k m_i \nu_2(J_i) \leq \nu_3(\mathcal{G}) \leq \sum_{i=1}^k M_i \nu_2(J_i)$$

pro každé dělení $\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_k)$. Odtud je patrné, přejdeme-li k suprému na levé straně a k infimu na pravé straně přes všechna dělení \mathcal{D} , dostaneme, že

$$\nu_3(\mathcal{G}) = \iint_I f(x, y) dx dy.$$

Tedy dvojný integrál funkce f přes interval I je objem tělesa \mathcal{G} , definovaného vztahem 2.2.

Problému zobecnění objemu na jiné množiny než jsou intervaly se budeme věnovat v odstavci 2.6.

2.3 Fyzikální interpretace trojného integrálu

Nechť $I \subset \mathbb{R}^3$ je trojrozměrný kompaktní interval (kvádr), v němž je rozložena hmota, charakterizovaná hustotou $f \geq 0$; předpokládejme, že f je spojitá funkce.

Z fyzikálního významu hustoty plyne: Je-li $J \subset I$ kompaktní subinterval, na němž platí

$$\alpha \leq f \leq \beta,$$

pak pro hmotnost $m(J)$ kvádru J platí

$$\alpha\nu_3(J) \leq m(J) \leq \beta\nu_3(J)$$

(čísla $\alpha\nu_3(J)$, resp. $\beta\nu_3(J)$ je možno interpretovat jako hmotnost tělesa J , na němž je rozložena hmota rovnoměrně s konstantní hustotou α , resp. β).

Je-li $\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_k)$ libovolné rozdělení intervalu I , pak jednou z vlastností hmotnosti je, že hmotnost tělesa I je rovna součtu hmotností těles J_i ($i = 1, 2, \dots, k$):

$$m(I) = \sum_{i=1}^k m(J_i).$$

Odtud a z předchozí nerovnosti plyne, že pro dolní a horní součty platí

$$\underline{S}_{\mathcal{D}}(f) \leq m(I) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}}(f),$$

neboť

$$m_i\nu_3(J_i) \leq m(J_i) \leq M_i\nu_3(J_i) \quad (i = 1, \dots, k)$$

a stačí tyto nerovnosti sečítst.

Analogickou úvahou jako v předchozím případě dostaneme, že

$$m(I) = \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

2.4 Výpočet n-rozměrného integrálu postupnou integrací

Výpočet n-rozměrného integrálu ($n \geq 2$) převádíme postupně na výpočet jednorozměrného integrálu. Uvažujme nejdříve dvojný integrál.

Protože integrál je jakousi „infinitezimální“ analogií součtu, přiblížíme si problém výpočtu integrálu následující úlohou:

Máme sečítst mn čísel c_{pq} ($p = 1, \dots, m$, $q = 1, \dots, n$), označme tento součet

$$\sum_{(p,q)} c_{pq}.$$

Obdobou tohoto „dvojného součtu“ je např. dvojný integrál

$$\iint_{I \times J} f(x, y) dx dy, \tag{2.3}$$

kde pro jednoduchost nechť I, J jsou kompaktní intervaly v \mathbb{R} , $I = \langle a, b \rangle$, $J = \langle c, d \rangle$, a f je spojitá funkce na $I \times J$. Uspořádejme čísla c_{pq} do matice typu (m, n) :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Můžeme nyní sčítat tak, že sečteme nejdříve čísla v jednom řádku - např. součet p-tého řádku bude $\sum_{q=1}^n c_{pq}$ - a pak sečteme tyto součty přes všechny řádky. Dostaneme tak dvojnásobný součet

$$\sum_{p=1}^m \left(\sum_{q=1}^n c_{pq} \right).$$

Obdobou tohoto součtu je tzv. **dvojnásobný integrál**

$$\int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx, \quad (2.4)$$

který dostaneme takto: Nejdříve při pevném $x \in I$ integrujeme funkci $y \mapsto f(x, y)$ přes interval J podle y . Tento integrál

$$\int_J f(x, y) dy$$

je funkcí proměnné x (o níž se za předpokladu spojitosti funkce f dá dokázat, že je spojitou funkcí na I) a tuto funkci integrujeme podle x přes interval I .

Můžeme však sčítat čísla c_{pq} tak, že sečteme čísla v jednotlivých sloupcích a pak sčítáme tyto součty přes všechny sloupce. Dostaneme tak dvojnásobný součet

$$\sum_{q=1}^n \left(\sum_{p=1}^m c_{pq} \right).$$

Obdobou tohoto součtu je dvojnásobný integrál

$$\int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy, \quad (2.5)$$

který dostaneme tak, že integrujeme nejdříve při pevném y funkci $x \mapsto f(x, y)$ podle x přes interval I a výslednou funkci proměnné y integrujeme podle y přes interval J . Víme ovšem, že platí

$$\sum_{(p,q)} c_{pq} = \sum_{p=1}^m \left(\sum_{q=1}^n c_{pq} \right) = \sum_{q=1}^n \left(\sum_{p=1}^m c_{pq} \right),$$

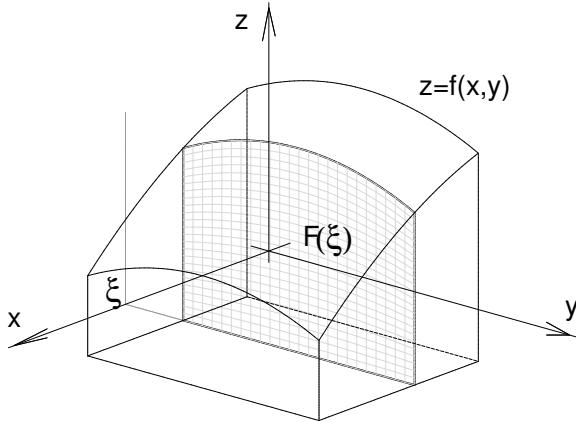
a lze očekávat, že za určitých předpokladů budou si rovny též integrály 2.3, 2.4 a 2.5. Je-li f kladná spojitá funkce na intervalu $I \times J$, je dvojný integrál 2.3 mírou podgrafu $\mathcal{G}(f, I \times J)$.

„Vnitřní“ integrál v 2.4 $F(x) = \int_J f(x, y) dy$

má tuto geometrickou interpretaci: Pro pevné $x = \xi$ je $F(\xi)$ obsah řezu podgrafu $\mathcal{G}(f, I \times J)$ rovinou $x = \xi$ (viz obr. 2.4). Rozdělíme-li interval I na intervaly délky Δx_i ($i = 1, 2, \dots, m$) a utvoříme-li Cauchyův integrální součet

$$\sum_{i=1}^m F(\xi_i) \Delta x_i,$$

je limita těchto integrálních součtů rovna integrálu $\int_I F(x)dx$, což je integrál 2.4. Přitom každý sčítanec $F(\xi_i)\Delta x_i$ je objem destičky o konstantním průřezu velikosti $F(\xi_i)$ a tloušťce Δx_i . Je tedy zřejmé, že integrální součet $\sum_i F(\xi_i)\Delta x_i$ může sloužit při dostatečně jemném dělení intervalu I jako dobrá approximace objemu tělesa $\mathcal{G}(f, I \times J)$, což je právě dvojný integrál 2.3. Obdobně můžeme interpretovat i druhý dvojnásobný integrál 2.5.



Obrázek 2.4: Řez podgrafu \mathcal{G} rovinou $x = \xi$.

Nyní k výpočtu integrálu na kompaktním intervalu můžeme zformulovat následující větu (Fubiniova věta pro kompaktní interval). Uvedeme ji nejdříve pro dvojrozměrný případ, tedy obdélník.

Věta 2.2 Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní interval, $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Je-li $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrovatelná na I , pak existují integrály (dvojnásobné)

$$\mathcal{I}_1 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad \mathcal{I}_2 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

a platí rovnost

$$\mathcal{I} = \int_I f(x, y) dx dy = \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2.$$

Dvojrozměrný integrál se tedy vypočítá pomocí dvou určitých integrálů - postupnou integrací vždy podle jedné proměnné (analogie parciální derivace). Tento postup se přirozeným způsobem rozšíří na trojní (i n-rozměrný) integrál:

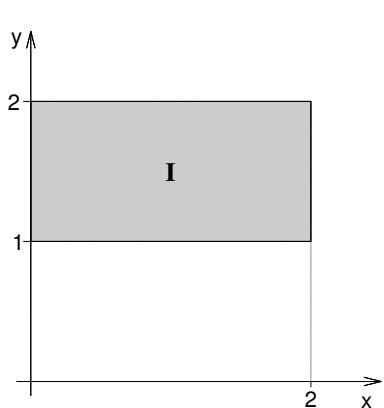
Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní interval, $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$, a nechť $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce na I . Potom platí

$$\int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1 = \\ = \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\dots \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_n} \right) \dots \right) dx_{i_2} \right) dx_{i_1}$$

pro každou permutaci (i_1, i_2, \dots, i_n) množiny indexů $\{1, 2, \dots, n\}$.

Příklad 2.1 Vypočítejte integrál $\int_I x^2 y \, dx dy$, $I = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

V tomto případě je kompaktní interval I obdélník.



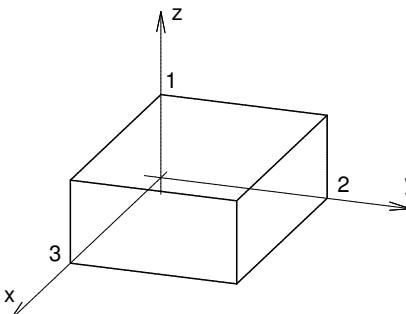
$$\int_I x^2 y \, dx dy = \int_0^2 \left(\int_1^2 x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} dx = \\ = \frac{3}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \underline{4}.$$

Nebo

$$\int_I x^2 y \, dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^2 x^2 y \, dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=2} dy = \\ = \frac{8}{3} \int_1^2 y \, dy = \frac{8}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \underline{4}.$$

Příklad 2.2 Vypočítejte integrál $\int_I (x + y + z) \, dx dy dz$, $I = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

V tomto případě je kompaktní interval kvádr.



$$\int_I (x + y + z) \, dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 (x + y + z) \, dx \right) dy \right) dz = \\ = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy + xz \right]_{x=0}^{x=3} dy \right) dz = \\ = 3 \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\frac{3}{2} + y + z \right) dy \right) dz = 3 \int_0^1 \left[\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y^2 + yz \right]_{y=0}^{y=2} dz = \\ = 3 \int_0^1 (5 + 2z) dz = 3 [5z + z^2]_0^1 = \underline{18}.$$

2.5 Měřitelné množiny, elementární oblasti

Jistě není prakticky možné omezit se při integraci pouze na kompaktní intervaly. V tomto odstavci si budeme všímat těch množin, přes které budeme schopni našimi prostředky integrovat.

Definice 2.2 Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je množina. Řekneme, že M je **měřitelná**, tj. má míru $\nu_n(M)$, jestliže pro nějaký kompaktní interval $I \supset M$ existuje integrál z charakteristické funkce χ_M množiny M na I . Pak definujeme

$$\nu_n(M) := \int_I \chi_M(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Připomeňme, že charakteristická funkce množiny je definovaná předpisem

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \notin M \end{cases}$$

Při integraci funkcí \mathbb{R}^n v budou mít nepodstatnou úlohu množiny, které jsou objemově „malé“, budeme je nazývat nulové.

Definice 2.3 Množinu $N \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme **nulovou množinou** v \mathbb{R}^n (nebo **množinou nulové míry**), jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje konečná posloupnost intervalů (J_k) , která pokrývá množinu N , tj.

$$N \subset \bigcup_k J_k,$$

přičemž

$$\sum_k \nu(J_k) < \varepsilon.$$

Zřejmě prázdná množina a každá jednobodová množina jsou nulové množiny.

Je-li N nulová, $M \subset N$, pak M je nulová.

Sjednocení konečného souboru nulových množin je nulová množina.

Příklad. Hranice kompaktního intervalu $I \subset \mathbb{R}^n$ je nulová množina. Hranice I je sjednocením $2n$ stěn (pro $n = 2$ mluvíme o stranách). Je-li

$$I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle,$$

pak stěny I jsou množiny

$$\begin{aligned} & \{a_1\} \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle, \\ & \{b_1\} \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle, \\ & \langle a_1, b_1 \rangle \times \{a_2\} \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle, \\ & \langle a_1, b_1 \rangle \times \{b_2\} \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle, \\ & \text{atd.} \end{aligned}$$

Vezměme např. první stěnu a pokryjme ji intervalmem

$$J = \langle a_1 - \delta, a_1 + \delta \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle, \quad \delta > 0.$$

Objem tohoto intervalu je

$$\nu(J) = 2\delta(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Zvolíme-li nyní δ tak, aby

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)}, \quad \text{pak} \quad \nu(J) < \varepsilon.$$

Je tedy stěna intervalu nulová množina, tedy také celá hranice je nulová množina.

Zobecněním tohoto příkladu je následující tvrzení.

Věta 2.3 *Nechť I je kompaktní interval v \mathbb{R}^n . Pak graf spojité funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je nulová množina v \mathbb{R}^{n+1} .*

Dá-li se tedy některá množina $M \subset \mathbb{R}^n$ vyjádřit jako konečné sjednocení grafů spojitých funkcí na kompaktních intervalech, pak M je nulová množina.

Tímto způsobem se dá ukázat, že rozmanité křivky v \mathbb{R}^2 nebo plochy v \mathbb{R}^3 jsou nulové množiny.

Věta 2.4

- a) Je-li M ohraničená množina a $\nu_n(hM) = 0$ (hranice má nulovou míru), pak M je měřitelná v \mathbb{R}^n .
- b) Sjednocení a průnik konečného systému měřitelných množin je měřitelná množina.
- c) Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.
- d) Každá otevřená oblast G je měřitelná, každá uzavřená oblast je měřitelná a platí $\nu_n(G) = \nu_n(\overline{G})$.

Právě pro měřitelné množiny, tedy takové, jejichž charakteristická funkce je integrovatelná, je obecně definován pojem n-rozměrného integrálu. My se speciálně zaměříme na takzvané elementární oblasti, které, jak uvidíme z definice (užitím předchozích tvrzení) jsou měřitelné:

Definice 2.4 *V rovině rozumíme **elementární oblasti typu** $[x, y]$ množinu všech bodů $(x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnostem*

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x), \end{aligned}$$

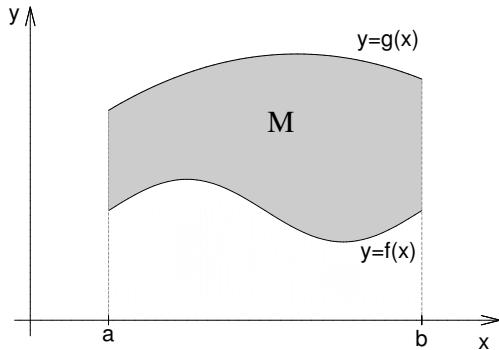
kde $a, b, a < b$ jsou čísla a f, g jsou funkce spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$. Tedy $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$. Viz obr. 2.5

Podobně je jistě množno definovat elementární oblast typu $[y, x]$; je jí taková množina $A \subset \mathbb{R}^2$ v rovině, pro jejíž body $(x, y) \in A$ platí nerovnosti

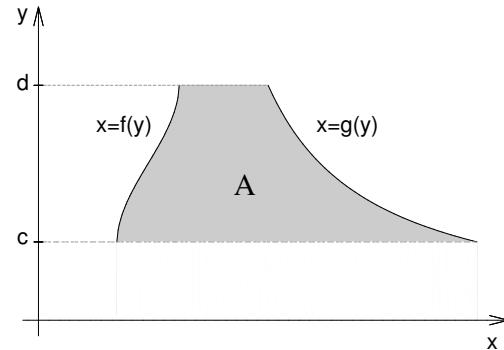
$$\begin{aligned} c \leq y \leq d \\ f(y) \leq x \leq g(y), \end{aligned}$$

kde funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle c, d \rangle$, tedy

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, f(y) \leq x \leq g(y)\}$. Viz obr. 2.6



Obrázek 2.5: Elem. oblast typu $[x, y]$



Obrázek 2.6: Elem. oblast typu $[y, x]$

Jak tyto pojmy zobecníme do trojrozměrného prostoru?

Předně průměr do některé ze souřadních rovin musí být elementární oblast v rovině; mějme tedy množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ takovou, že pro její body $(x, y, z) \in M$ platí $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq g_1(x)$ - to znamená, že průměr množiny M do roviny xy je elementární oblast typu $[x, y]$.

Dále je potřeba omezit z-ové souřadnice; zde se již mohou vyskytovat funkce dvou proměnných. Tedy elementární oblasti typu $[x, y, z]$ v prostoru rozumíme množinu M , pro jejíž body $(x, y, z) \in M$ platí

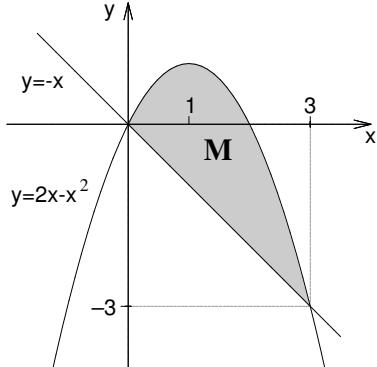
$$\begin{aligned} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq g_1(x) \\ f_2(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \end{aligned}$$

Podobně je možno definovat elementární oblasti typu $[y, z, x]$, $[z, y, x]$ atd.

Chceme-li tedy nějakou množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ popsat jako elementární oblast, promítneme ji do některé souřadné roviny, průměr popíšeme jako elementární oblast a zbývající proměnnou ohrazeníme dvěma funkcemi (plochami) obecně dvou proměnných.

Příklad 2.3 Rozhodněte, zda dané množiny jsou elementárními množinami.

a) Množina M ohraničená parabolou $y = 2x - x^2$ a přímkou $y = -x$.

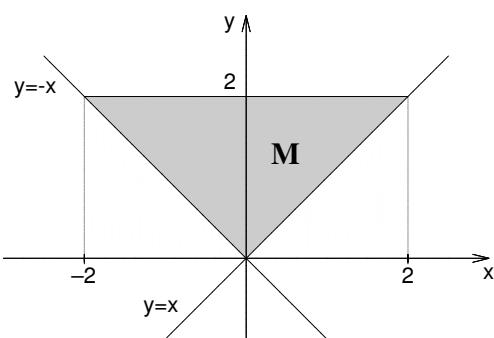


Parabola $y = 2x - x^2$ má rovnici $y - 1 = -(x - 1)^2$, tedy vrchol v bodě $(1, 1)$, otevřená směrem dolů. Průsečíky s přímkou $y = -x$ jsou v bodech $(0, 0)$, $(3, -3)$.
Pro $(x, y) \in M$ tedy platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 3 \\ -x &\leq y \leq -x^2 + 2x \end{aligned}$$

Tedy M je elementární oblasti typu $[x, y]$.

b) Množina M zadaná nerovností $|x| \leq y \leq 2$.



Grafy funkcí $y = |x|$ a $y = 2$ se protínají v bodech $(-2, 2)$ a $(2, 2)$. Platí

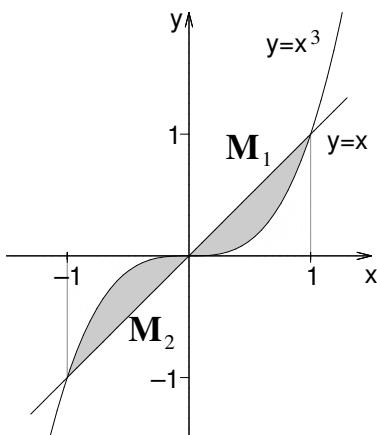
$$(x, y) \in M \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ |x| \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Výhodnější je v tomto případě vyjádření

$$(x, y) \in M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ -y \leq x \leq y \end{cases}$$

Tedy M je elementární oblasti typu $[y, x]$.

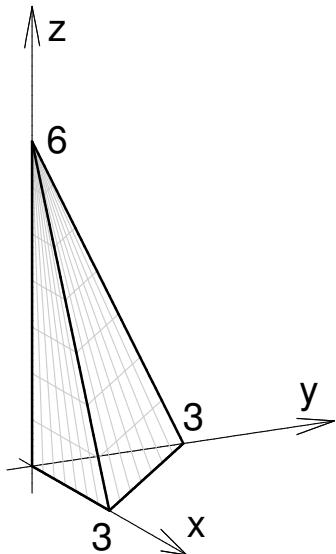
c) Množina M ohraničená grafy funkcí $y = x$, $y = x^3$.



Množina M v tomto případě není elementární oblast; dá se vyjádřit jako sjednocení dvou elementárních oblastí, např. typu $[x, y]$:

$$\begin{aligned} M &= M_1 \cup M_2 \\ M_1 &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\} \\ M_2 &= \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, x \leq y \leq x^3\}. \end{aligned}$$

d) M je ohraničená plochami $2x + 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$.



Rovina $2x + 2y + z = 6$ protíná souřadné osy v bodech o souřadnicích $x = 3, y = 3, z = 6$. Průmět množiny M do roviny je trojúhelník o vrcholech $(0, 0), (0, 3), (3, 0)$. Platí tedy

$$(x, y, z) \in M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 - x \\ 0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y \end{cases}$$

M je v tomto případě čtyřstěn a jedná se o elementární oblast typu $[x, y, z]$.

2.6 Integrály na měřitelných množinách

V této kapitole rozšíříme pojem n-rozměrného integrálu na měřitelné množiny:

Definice 2.5 Řekneme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}^n$ je integrovatelná na množině M , tj. že existuje integrál (Riemannův) z funkce f na množině M , existuje-li interval $I \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $M \subset I$ a funkce $f \cdot \chi_M$ je na I integrovatelná.

Potom klademe

$$\int_M f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_I (f \cdot \chi_M)(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

V následujících úvahách se omezíme na $n = 2, 3$.

Postačující podmínu pro existenci integrálu udává následující věta:

Věta 2.5 Je-li $M \subset \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ měřitelná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je na M ohraničená a skoro všude spojitá, pak je f na M integrovatelná.

(Připomeňme, že nějaké tvrzení platí na množině M skoro všude, jestliže platí $\forall x \in M \setminus A \subset \mathbb{R}^k$ a neplatí $\forall x \in A$, kde $\nu_k(A) = 0$ (tj. platí s výjimkou množiny nulové míry).) Fubiniova věta pro výpočet integrálů se dá snadno rozšířit na elementární oblasti:

Věta 2.6 Nechť

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, d(x) \leq y \leq h(x)\}, \quad resp.$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, d_1(x) \leq y \leq h_1(x), d_2(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

kde d, h , resp. d_1, h_1, d_2, h_2 jsou spojité funkce. Pak, existuje-li

$$\mathcal{I} = \iint_M f(x, y) dx dy \quad \text{resp.} \quad \mathcal{I} = \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz,$$

platí

$$\mathcal{I} = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

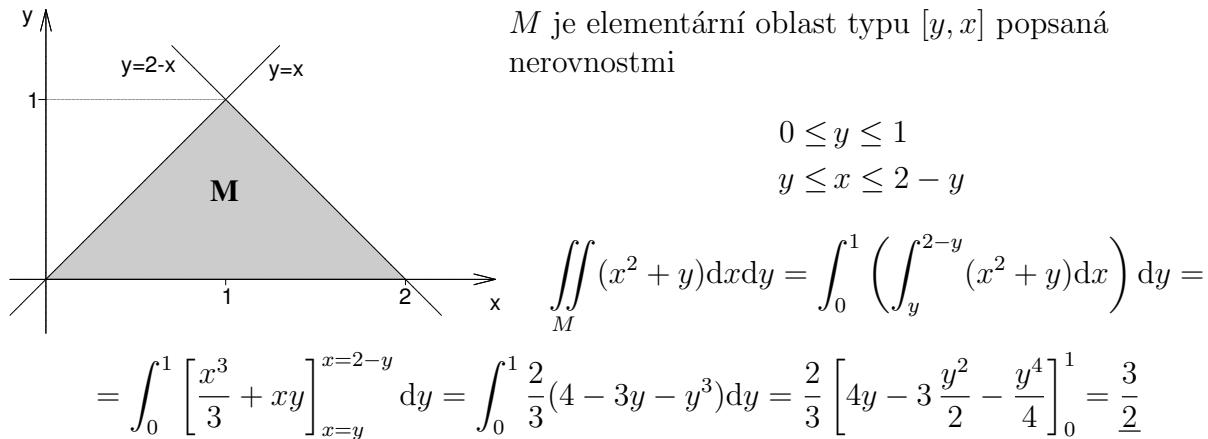
resp.

$$\mathcal{I} = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} \left(\int_{d_2(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

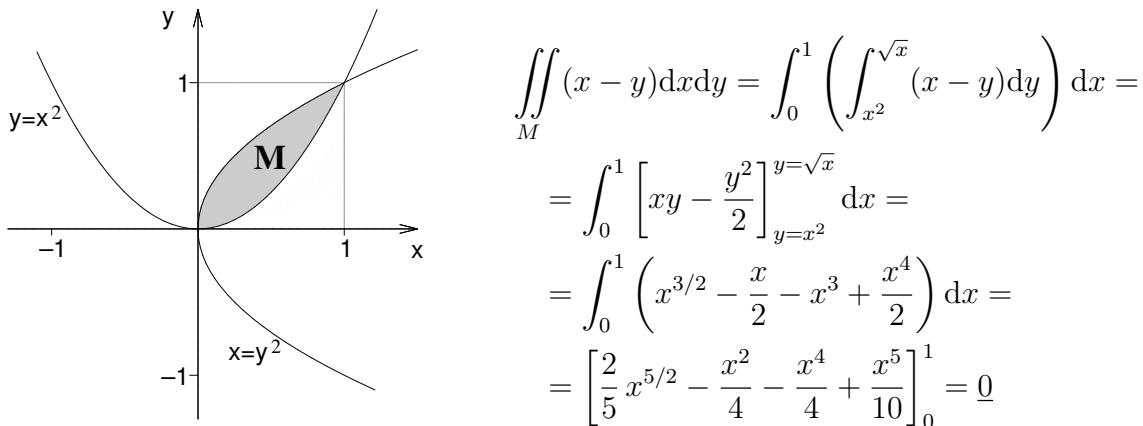
Věta platí analogicky pro elementární oblasti typu $[y, x]$ nebo $[y, x, z]$ atd.

Příklad 2.4 Vypočtěte integrály

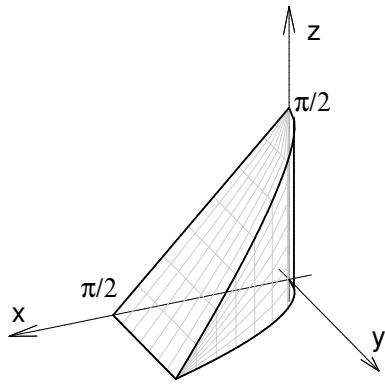
a) $\iint_M (x^2 + y) dx dy$, kde M je ohrazená přímkami $y = 0, y = x, x + y = 2$.



b) $\iint_M (x - y) dx dy$, kde M je ohrazená křivkami $y = x^2, y^2 = x$.



c) $\iiint_M y \cos(z+x) dx dy dz$, kde M je ohraničená plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x+z = \frac{\pi}{2}$.



Množina M je shora ohraničená rovinou $x + z = \frac{\pi}{2}$, dále souřadnými rovinami a parabolickou válcovou plochou $y = \sqrt{x}$. Průmět do souřadné roviny xy je shora ohraničen grafem funkce $y = \sqrt{x}$, dále osou x a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$. Proto platí

$$\begin{aligned} \iiint_M y \cos(z+x) dx dy dz &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y \cos(z+x) dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} [y \sin(z+x)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x} dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} y(1 - \sin x) dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - \sin x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x \cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cvičení

V následujících příkladech vypočítejte zadané integrály

Příklad 8 $\iint_B dx dy$, kde B je množina ohraničená přímkami $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$. [3]

Příklad 9 $\iint_B (2x + 3y + 1) dx dy$, kde B je množina ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a její tětivou jdoucí body $A = (2, -2)$, $B = (8, 4)$. [187\frac{1}{5}]

Příklad 10 $\iint_B dx dy$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4 - x^2\}$ [\frac{16}{3}\sqrt{2}]

Příklad 11 $\iint_B xy^2 dx dy$, kde B je množina ohraničená parabolou $y^2 = 2px$ a přímkou $x = \frac{p}{2}$. [\frac{p^5}{21}]

Příklad 12 $\iint_B xy dx dy dz$, kde B je množina ohraničená plochami $z = xy$, $x + y = 1$ a $z = 0$. [\frac{1}{180}]

Příklad 13 $\iint_B dx dy dz$, kde B je množina ohraničená plochami $z = xy$, $y = \sqrt{x}$ a rovinami $x + y = 2$, $y = 0$, $z = 0$. [\frac{3}{8}]

Příklad 14 $\iint_B dx dy dz$, kde B je množina ohraničená plochami $z = 1 - 4x^2 - y^2$ a $z = 0$. [\frac{\pi}{4}]

Příklad 15 $\iint_B xyz dx dy dz$, kde B je množina ohraničená plochami $x = 1$, $y = x$, $z = y$ a souřadnými rovinami. [\frac{1}{48}]

2.7 Transformace integrálů

Připomeňme, jak se počítal určitý integrál pomocí věty o substituci - stručně můžeme formulovat tuto větu takto:

Nechť f je integrovatelná funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, φ diferencovatelná funkce. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

přitom nové meze jsme obdrželi jako řešení rovnic $a = \varphi(t)$, $b = \varphi(t)$; tedy je-li φ prosté zobrazení, je $\langle \alpha, \beta \rangle = \varphi^{-1}(\langle a, b \rangle)$ -úplný vzor intervalu $\langle a, b \rangle$.

Analogicky budeme postupovat u transformací vícerozměrných integrálů, ovšem integrační obory již budou složitější a cílem při transformaci bude hlavně zjednodušit integrační obor - v určitém integrálu jsme zaváděli substituci, abychom zjednodušili integrand (k tomu budeme jistě přihlížet také).

Věta o transformaci vícerozměrného integrálu má tedy následující tvar

Věta 2.7 Nechť Φ je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n , které je prosté a regulární (tj. jakobián zobrazení $D\Phi \neq 0$) na měřitelné otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi \in C_1(G)$. Nechť $A \subset G$ je měřitelná množina, $B = \Phi(A)$ a funkce f ohraničená a skoro všude spojitá na B , pak platí

$$\int_B f d\nu = \int_A (f \circ \Phi) |D\Phi| d\nu \quad (2.6)$$

Vzorec 2.6 též zapisujeme ve tvaru

$$\int_B f(p) dp = \int_A f(\Phi(q)) \cdot |D\Phi| dq. \quad (2.7)$$

Je-li $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ a označíme-li $p = (x_1, \dots, x_n)$, $q = (u_1, \dots, u_n)$, pak vzorec 2.7 můžeme zapsat v „klasickém tvaru“

$$\int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_A f(\varphi(u_1, \dots, u_n), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_n)) \cdot |D\Phi(u_1, \dots, u_n)| du_1 \cdots du_n$$

Pro $n = 2$ je $\Phi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ a platí

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) |D\Phi(u, v)| du dv$$

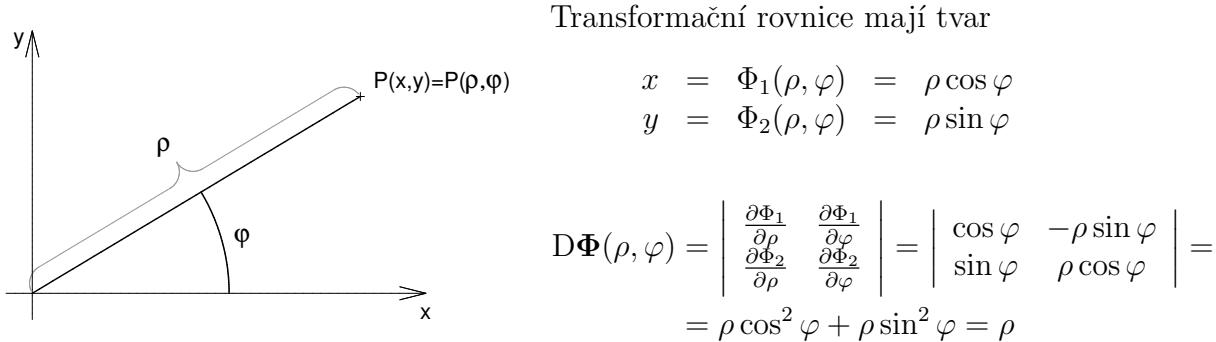
Pro $n = 3$ je $\Phi(u, v, w) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$ a platí

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) |D\Phi(u, v, w)| du dv dw.$$

Poznámka: V případě vícerozměrných integrálů hovoříme místo o substituci o transformaci, protože přecházíme od kartézských souřadnic k novým tzv. křivočarým souřadnicím - transformujeme souřadnice.

Polární souřadnice

Nejčastěji užívanou transformací v rovině je zobrazení pomocí **polárních souřadnic**. Zobrazení Φ je tvaru $\Phi(\rho, \varphi) = (\Phi_1(\rho, \varphi), \Phi_2(\rho, \varphi)) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$.



Jedná se o zobrazení $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ (nebo též $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$) a platí tedy vzorec

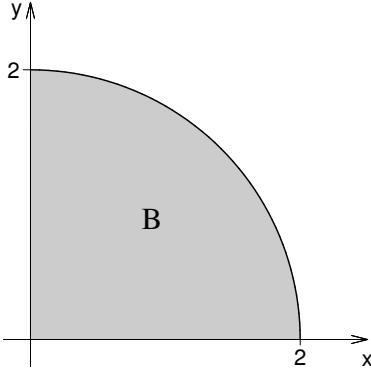
$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi$$

Příklad 2.5 Vypočtěte $\iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ y &= \rho \sin \varphi & \rho \in \langle 0, 2 \rangle \end{aligned}$$

V našem případě je tedy

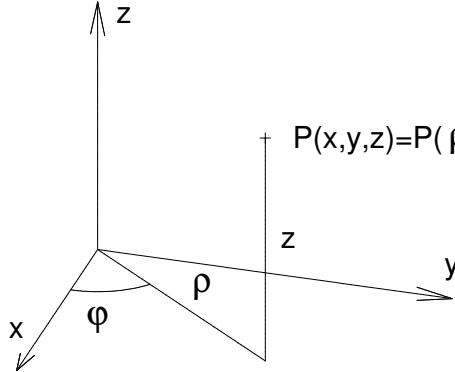
$$A = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$



$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_A \sqrt{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \rho^2 d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 d\varphi = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi}} \end{aligned}$$

Cylindrické souřadnice

Zobrazení Φ je tvaru $\Phi(\rho, \varphi, z) = (\Phi_1(\rho, \varphi, z), \Phi_2(\rho, \varphi, z), \Phi_3(\rho, \varphi, z)) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$



Transformační rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi \\ y &= \Phi_2(\rho, \varphi, z) = \rho \sin \varphi \\ z &= \Phi_3(\rho, \varphi, z) = z \end{aligned}$$

$$D\Phi(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

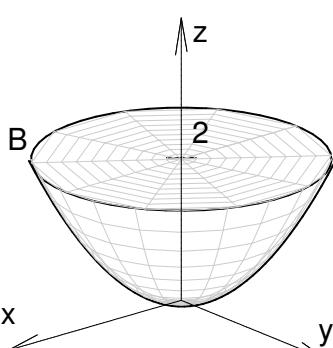
Jedná se o zobrazení $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ (nebo též $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$) a platí

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho d\rho d\varphi dz$$

Cylindrické souřadnice používáme u integračních oborů, jejichž průměty do vhodné souřadnicové roviny lze vyšetřovat v polárních souřadnicích.

Příklad 2.6 Vypočtěte $\iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz$, kde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\}$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi & \rho \in \langle 0, 2 \rangle & |D\Phi| = \rho \\ z &= z & z \in \left\langle \frac{\rho^2}{2}, 2 \right\rangle \end{aligned}$$



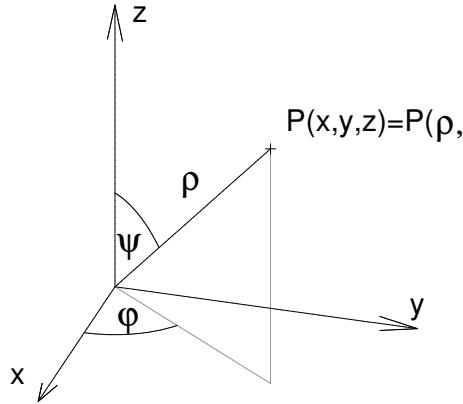
Tedy

$$A = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_A \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 \rho^3 dz \right) d\rho \right) d\varphi = \dots = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Sférické souřadnice

Zobrazení Φ je tvaru $\Phi(\rho, \varphi, \psi) = (\Phi_1(\rho, \varphi, \psi), \Phi_2(\rho, \varphi, \psi), \Phi_3(\rho, \varphi, \psi)) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \psi)$



Transformační rovnice mají tvar

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(\rho, \varphi, \psi)$$

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(\rho, \varphi, \psi) = \rho \cos \varphi \sin \psi \\ y &= \Phi_2(\rho, \varphi, \psi) = \rho \sin \varphi \sin \psi \\ z &= \Phi_3(\rho, \varphi, \psi) = \rho \cos \psi \end{aligned}$$

$$D\Phi(\rho, \varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \psi & -\rho \sin \varphi \sin \psi & \rho \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & \rho \cos \varphi \sin \psi & \rho \sin \psi \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -\rho \sin \psi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \psi.$$

Jedná se o zobrazení $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ (nebo též $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$) a platí

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\rho \cos \varphi \sin \psi, \rho \sin \varphi \sin \psi, \rho \cos \psi) \cdot \rho^2 \sin \psi d\rho d\varphi d\psi$$

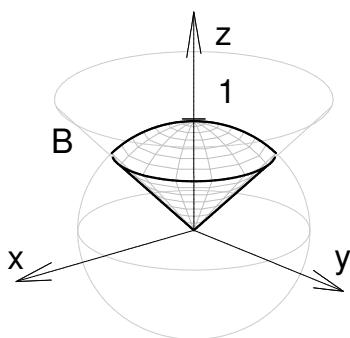
Příklad 2.7 Vypočtěte $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$,

kde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \psi & \rho &\in \langle 0, 1 \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \psi & \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ z &= \rho \cos \psi & \psi &\in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \end{aligned}$$

Tedy

$$A = \{(\rho, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}\}$$



$$\begin{aligned} \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \iiint_A \sqrt{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \psi d\rho d\varphi d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 \rho^3 \sin \psi d\rho \right) d\psi \right) d\varphi = \dots = \frac{\pi}{4} (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Cvičení

Vypočtěte následující dvojné integrály pomocí transformace do polárních souřadnic:

Příklad 1 $\iint_M (1 - x^2 - y^2) dx dy, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $[\frac{\pi}{2}]$

Příklad 2 $\iint_M (x^2 + y^2) dx dy, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq |x|\}$ $[\frac{15\pi}{8}]$

Příklad 3 $\iint_M e^{-(x^2+y^2)} dx dy, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ $[\frac{\pi}{2}(1 - e^{-a^2})]$

Příklad 4 $\iint_M \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ $[-6\pi^2]$

Příklad 5 $\iint_M x dx dy, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - R)^2 \leq R^2, y \geq x, y \geq -x\}$ $[0]$

Vypočtěte následující trojná integrály pomocí transformace do cylindrických nebo sférických souřadnic

Příklad 6 $\iiint_M dx dy dz, M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, 0 \leq z \leq 6\}$ $[3\pi]$

Příklad 7 $\iiint_M z dx dy dz, M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ $[\frac{\pi}{16} a^4]$

Příklad 8 $\iiint_M dx dy dz, M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2, z \leq y\}$ $[\frac{\pi}{32}]$

Příklad 9 $\iiint_M z dx dy dz, M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$ $[\frac{13}{4}\pi]$

Příklad 10 $\iiint_M dx dy dz, M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4x, z \geq 0, z \leq x + 1\}$ $[12\pi]$

2.8 Míra neohraničených množin

Je účelné definovat geometrickou míru i pro neohraničené množiny.

Definice 2.6 Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **měřitelná**, jestliže pro každé $k \in \mathbb{N}$ je měřitelná ohraničená množina $A_k = A \cap \langle -k, k \rangle^n$ ($\langle -k, k \rangle^n$ je n -tá kartézská mocnina jednorozměrného intervalu $\langle -k, k \rangle$). V tom případě definujeme míru $\nu(A)$ takto:

$$\nu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k). \quad (2.8)$$

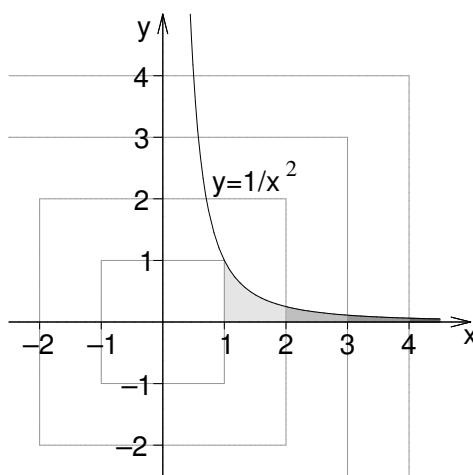
Množina A se nazývá **nulová**, je-li $\nu(A) = 0$.

Platí

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots,$$

takže $\nu(A_1) \leq \nu(A_2) \leq \dots \leq \nu(A_k) \leq \dots$. Posloupnost čísel $\nu(A_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) má tedy limitu. Tato limita však může být rovna $+\infty$. Například $\nu(\mathbb{R}^n) = +\infty$. Je-li A ohraničená množina, pak pro všechna dostatečně velká k je $A_k = A$, a tedy limita 2.8 je rovna mře $\nu(A)$, jak byla definována dříve.

Příklad 2.8 Nechť $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 1, \infty \rangle, 0 \leq y \leq 1/x^2\}$. Zjistěte, zda je A měřitelná, a v kladném případě stanovte míru $\nu(A)$.



Zde

$$\begin{aligned} A_k &= A \cap (\langle -k, k \rangle \times \langle -k, k \rangle) = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 1, k \rangle, 0 \leq y \leq 1/x^2\} \end{aligned}$$

(viz obrázek). Množina A_k je zřejmě měřitelná a

$$\nu(A_k) = \int_1^k \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{k},$$

takže

$$\nu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1.$$

Je vidět, že lze psát $\nu(A) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Někdy je vhodnější k vyšetřování měřitelnosti množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ použít jiné posloupnosti množin, než jsou intervaly $\langle -k, k \rangle^n$.

Nechť $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost ohraničených měřitelných množin v prostoru \mathbb{R}^n taková, že platí:

$$(1) \quad K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m \subset \dots,$$

(2) ke každému $k \in \mathbb{N}$ existuje množina K_m tak, že $K_m \supset \langle -k, k \rangle^n$.

V tomto případě budeme psát $K_m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ (množiny K_m „stejnoměrně zaplňují prostor \mathbb{R}^n “). Je zřejmé, že

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$$

a že ke každé množině K_m existuje $l \in \mathbb{N}$ tak, že $K_m \subset \langle -l, l \rangle^n$, neboť K_m je ohraničená množina.

Příkladem posloupnosti $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost koulí

$$\{p \in \mathbb{R}^n : |p - p_0| \leq r_m\},$$

kde $(r_m)_{m=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost, $r_m \rightarrow \infty$.

Věta 2.8 Nechť $K_m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, kde K_m jsou ohraničené měřitelné množiny. Pak množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná, právě když $A \cap K_m$ je měřitelná množina pro každé $m \in \mathbb{N}$. Přitom platí

$$\nu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu(A \cap K_m).$$

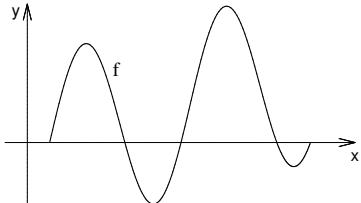
V dalších úvahách budeme používat následující označení:

Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je libovolná funkce, pak

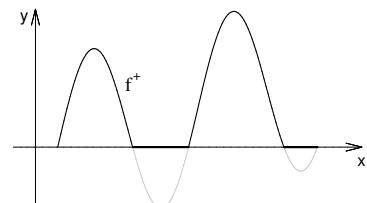
$f^+ = \max\{f, 0\}$ (tzv. kladná část funkce, viz obrázek 2.8 pro funkci jedné proměnné)

$f^- = \max\{-f, 0\}$ (tzv. záporná část funkce, viz obrázek 2.9 pro funkci jedné proměnné)

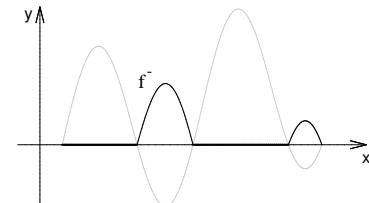
Je zřejmé, že platí $f = f_+ - f_-$, $|f| = f^+ + f^-$.



Obrázek 2.7: f



Obrázek 2.8: f^+



Obrázek 2.9: f^-

2.9 Integrál neohraničené funkce přes ohraničenou množinu

Teorii nevlastních jednorozměrných integrálů z BMA1 nelze dost dobře modifikovat pro funkce více proměnných. V této teorii byla dosti podstatná uspořádanost oboru reálných čísel. V jednorozměrném případě jsme měli jednak absolutně konvergentní, jednak neabsolutně konvergentní integrály. Ve vícerozměrném případě budeme uvažovat pouze absolutně konvergentní integrály. Základní schéma je toto: Nejdříve se definuje integrál pro nezáporné funkce. Pro funkce nabývající i záporných hodnot se použije rozklad

$$f = f^+ - f^-$$

a integrál funkce f se pak definuje vztahem

$$\int_A f d\nu = \int_A f^+ d\nu - \int_A f^- d\nu$$

(Je třeba říci, že pro neohraničené funkce a množiny nekonečné míry se integrální součty již nehodí, limita integrálních součtů by ve většině případů neexistovala.)

Nechť f je nezáporná funkce na ohraničené měřitelné množině $A \subset \mathbb{R}^n$. Integrál

$$\int_A f d\nu = \int_A f d\nu_n$$

chceme definovat tak, aby byl mírou podgrafa P funkce f na A :

$$P = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in A, 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

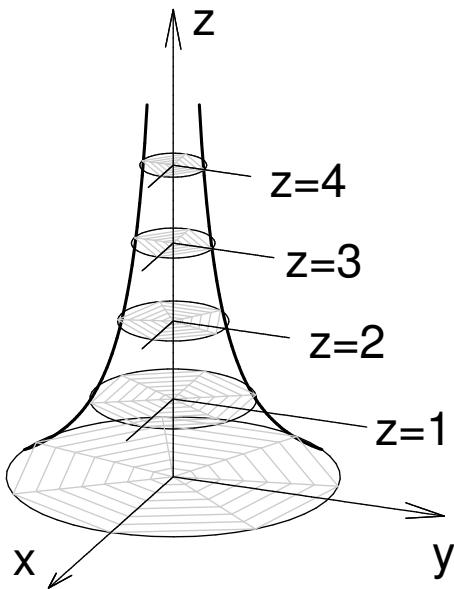
Zvolíme metodu „uřezávání“ podgrafa P . Pro každé přirozené k definujme množinu

$$P_k = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in A, 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n), 0 \leq x_{n+1} \leq k\},$$

tedy

$$P_k = P \setminus \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in A, x_{n+1} > k\},$$

takže jsme „odřízli“ část podgrafa ležící nad rovinou $x_{n+1} = k$ (viz obr. 2.10)



Obrázek 2.10: „Uřezávání“ podgrafa.

Přitom

$$P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_k \subset \dots, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = P.$$

Pro dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ je $A \subset \langle -k, k \rangle^n$ (A je ohraničená množina), takže pro $m \geq k$ je $P \cap \langle -m, m \rangle^{n+1} = P_m$. Jsou-li tudíž množiny P_k měřitelné v \mathbb{R}^{n+1} , je též P měřitelná množina a

$$\nu_{n+1}(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n+1}(P_k).$$

Množina P_k je podgrafem funkce $f_{\langle k \rangle}$ na A :

$$f_{\langle k \rangle} = \min\{f(p), k\} = \begin{cases} f(p), & \text{je-li } f(p) \leq k, \\ k, & \text{je-li } f(p) > k. \end{cases}$$

Funkce $f_{\langle k \rangle}$ jsou nezáporné a ohraničené a platí

$$f_{\langle 1 \rangle} \leq f_{\langle 2 \rangle} \leq \cdots \leq f_{\langle k \rangle} \leq \cdots \leq f,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\langle k \rangle}(p) = f(p)$$

pro každé $p \in A$; je-li f ohraničená, je $f_{\langle k \rangle} = f$ od určitého k_0 počínaje.
Jsou-li funkce $f_{\langle k \rangle}$ integrovatelné, platí

$$\int_A f_{\langle 1 \rangle} d\nu \leq \int_A f_{\langle 2 \rangle} d\nu \leq \cdots \leq \int_A f_{\langle k \rangle} d\nu \leq \cdots,$$

takže existuje limita této posloupnosti. Přitom je

$$\nu_{n+1}(P_k) = \int_A f_{\langle k \rangle} d\nu,$$

takže

$$\nu_{n+1}(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_{\langle k \rangle} d\nu.$$

Chceme-li tudíž, aby platilo

$$\nu_{n+1}(P) = \int_A f d\nu$$

jako v případě ohraničené funkce, jeví se rozumné definovat integrál nezáporné funkce takto:

Definice 2.7 I. Nechť A je ohraničená měřitelná množina a f nezáporná funkce definovaná na A . Jsou-li funkce $f_{\langle k \rangle}$ ($k = 1, 2, \dots$) integrovatelné na A , definujeme

$$\int_A f d\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_{\langle k \rangle} d\nu \tag{2.9}$$

a říkáme, že tento **integrál existuje**.

Je-li limita v 2.9 konečná, říkáme, že $\int_A f d\nu$ **konverguje**, a funkci f nazýváme **integrovatelnou** na A . Je-li limita v 2.9 $+\infty$, říkáme, že $\int_A f d\nu$ **diverguje** ($k = +\infty$).

II. Nechť f je funkce definovaná na A . Pak definujeme

$$\int_A f d\nu = \int_A f^+ d\nu - \int_A f^- d\nu, \quad (2.10)$$

existují-li integrály na pravé straně 2.10 a je-li aspoň jeden z nich konečný (rozdíl uvažujeme v \mathbb{R}^*). Jsou-li oba integrály konečné, říkáme, že integrál $\int_A f d\nu$ **konverguje**, a funkci f nazýváme **integrovatelnou** na A . Jsou-li oba integrály nekonečné nebo některý z nich neexistuje, říkáme, že $\int_A f d\nu$ **neexistuje**.

Poznámka. Integrál nezáporné funkce f přes množinu A existuje, právě když existují integrály $\int_A f_{(k)} d\nu$. K tomu stačí, aby funkce f byla skoro všude spojitá v A .

Příklad 2.9 Zjistěte, pro která $p > 0$ konverguje integrál

$$S = \iint_A \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^p}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Integrovaná funkce je kladná a spojitá pro $(x, y) \neq (0, 0)$ a tedy neohraničená v libovolném okolí počátku. Platí tedy pro $k \in \mathbb{N}$

$$f_{(k)}(x, y) = \min\{f(x, y), k\} = \begin{cases} \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} & \text{pro } \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} \leq k \\ k & \text{pro } \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} > k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} \leq k &\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} - \text{což je vnějšek kružnic se středem v počátku} \\ \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} > k &\Leftrightarrow x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} - \text{což je vnitřek kružnic se středem v počátku} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Položme} \quad A_k &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \\ A \setminus A_k &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \end{aligned}$$

$$\iint_A f_{(k)}(x, y) dxdy = \iint_{A_k} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^p} + \iint_{A \setminus A_k} k dxdy$$

$$\iint_{A \setminus A_k} k dxdy = k \cdot \nu_2(A \setminus A_k) = k \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A \setminus A_k} k dxdy = \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } p > 1 \\ \pi & \text{pro } p = 1 \\ 0 & \text{pro } p < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S_k &= \iint_{A_k} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^p} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \left(\int_{(\frac{1}{k})^{\frac{1}{2p}}}^1 \rho \cdot \frac{1}{\rho^{2p}} d\rho \right) d\varphi = \\
&= (\text{pro } p \neq 1) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^{2-2p}}{2-2p} \right]_{(\frac{1}{k})^{\frac{1}{p}}}^1 d\varphi = 2\pi \frac{1}{2(1-p)} \left(1 - \left(\frac{1}{k} \right)^{(1-p)/p} \right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \begin{cases} \frac{\pi}{1-p} & \text{pro } p < 1 \\ +\infty & \text{pro } p > 1 \end{cases}$$

$$\text{Pro } p = 1 \text{ je } S_k = \int_0^{2\pi} [\ln \rho]_{(\frac{1}{k})^{\frac{1}{2}}}^1 d\varphi = 2\pi \left(-\ln \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = -2\pi \ln \sqrt{\frac{1}{k}} \rightarrow +\infty$$

Závěr:

$$\iint_A \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_A f_{\langle k \rangle}(x, y) dxdy = \begin{cases} \frac{\pi}{1-p} & \text{pro } p < 1 \\ +\infty & \text{pro } p \geq 1. \end{cases}$$

Uvedeme nyní druhý přístup k výpočtu integrálu neohraničené funkce přes ohraničenou množinu, který je výhodný v případě nezáporné neohraničené funkce:

Nechť $X \in \mathbb{R}^n$ je bod, $(A_k)_1^\infty$ posloupnost množin z \mathbb{R}^n s následujícími vlastnostmi:

- 1) $X \in A_k$ pro $k = 1, 2, \dots$
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$ (d_k je průměr množiny A_k , tj. $d_k = \sup_{(X,Y) \in A_k} \rho(X, Y)$.)

Pak posloupnost $(A_k)_1^\infty$ nazveme **zužující** posloupností k bodu X .

Nechť M je měřitelná, ohraničená oblast, $M \subset \mathbb{R}^n$, $X \in M$. Dále nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ je neohraničená na nějakém okolí bodu X , ale ohraničená a integrovatelná na každé množině $M \setminus A$, kde A je měřitelná oblast obsahující bod X . Jestliže pro každou zužující posloupnost $(A_k)_1^\infty$ k bodu X měřitelných množin A_k existuje

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{M \setminus A_k} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = I, \text{ pak } \int_M f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = I.$$

Lze dokázat, že v případě nezáporné funkce stačí vyšetřit existenci limity pro jednu zužující posloupnost.

Tedy v předcházejícím příkladě, jelikož f je na A kladná, stačí zvolit zužující posloupnost $(A_k)_1^\infty$ k bodu $(0, 0)$ ve tvaru

$$A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{k}\},$$

tedy $A \setminus A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{k} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ a bude platit

$$\iint_A \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A \setminus A_k} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^p}$$

Ověřte si výpočtem, že výsledek je totožný s výsledkem příkladu 2.9.

2.10 Integrál funkce přes neohraničenou měřitelnou množinu

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, která nemusí být ohraničená, f funkce definovaná na A .

Nejdříve budeme definovat integrál pro případ, že f je na A nezáporná. Chceme opět, aby integrál byl mírou podgrafu funkce f . Tentokrát budeme podgraf „uřezávat ze stran“, aby podstava podgrafu byla ohraničená množina.

Nechť $A_k = A \cap \langle -k, k \rangle^n$, množina A_k je pro každé $k \in \mathbb{N}$ ohraničená a měřitelná, má zřejmě konečnou míru. Přitom

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \dots, \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Existuje-li pro každé $k \in \mathbb{N}$ integrál $\int_{A_k} f d\nu$, plyne z nezápornosti funkce f , že

$$\int_{A_1} f d\nu \leq \int_{A_2} f d\nu \leq \cdots \leq \int_{A_k} f d\nu \leq \cdots;$$

existuje tedy limita posloupnosti těchto integrálů.

Definice 2.8 Je-li f nezáporná funkce na měřitelné množině A a existují-li integrály $\int_{A_k} f d\nu$, kde $A_k = A \cap \langle -k, k \rangle^n$, ($k = 1, 2, \dots$), definujeme

$$\int_A f d\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f d\nu$$

a říkáme, že tento **integrál existuje**.

Je-li tato limita konečná, říkáme, že $\int_A f d\nu$ **konverguje**, a funkci f nazýváme **integrovatelnou** na A . Je-li limita $+\infty$, říkáme, že $\int_A f d\nu$ **diverguje** ($k \rightarrow +\infty$).

Nabývá-li f na množině A i záporných hodnot, definujeme integrál $\int_A f d\nu$ úplně stejně jako v II. části definice odst. 2.9.

Poznámka. Integrál nezáporné funkce existuje např. tehdy, je-li funkce f skoro všude spojitá na A .

V definici integrálu nezáporné funkce jsme se omezili na speciální množiny A_k (viz definici míry v odst. 2.8). Místo nich můžeme vzít množiny $A \cap K_m$, kde $K_m \Rightarrow \mathbb{R}^n$ (viz odst. 2.9). To nám umožňuje tato věta:

Věta 2.9 Nechť K_m , ($m = 1, 2, \dots$) jsou ohraničené měřitelné množiny a $K_m \Rightarrow \mathbb{R}^n$. Nechť f je nezáporná funkce na A . Integrály $\int_{A_k} f d\nu$ ($k = 1, 2, \dots$) existují, právě když existují integrály $\int_{A \cap K_m} f d\nu$ ($m = 1, 2, \dots$), přičemž platí

$$\int_A f d\nu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A \cap K_m} f d\nu.$$

Příklad 2.10 Vypočtěte integrál

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}, p > 0$$

a zjistěte, pro která $p > 0$ konverguje.

Integrand je kladná spojitá funkce, daný integrál tedy existuje. Je třeba zjistit, kdy bude mít konečnou hodnotu. Vzhledem k „tvaru“ integračního oboru A i k „tvaru“ integrované funkce se nabízí možnost volit množiny $K_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq m^2\}$ ($m = 1, 2, \dots$). Zřejmě $K_m \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ a množiny $A \cap K_m$ jsou pro $m > 1$ mezikruží. Je vhodné zavést polární souřadnice.

$$\begin{aligned} \iint_{A \cap K_m} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} &= \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq m^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_1^m \frac{\rho}{\rho^{2p}} d\rho \right) d\varphi = \\ &= \begin{cases} 2\pi \ln m & \text{pro } p = 1 \\ \frac{\pi}{p-1} \left(1 - \frac{1}{m^{2(p-1)}} \right) & \text{pro } p \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Odtud

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{A \cap K_m} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1} & \text{pro } p > 1 \\ +\infty & \text{pro } p \leq 1. \end{cases}$$

Daný integrál konverguje pouze pro $p > 1$ a má hodnotu $\frac{\pi}{p-1}$.

Příklad 2.11 Vypočtěte integrál

$$S = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

Integrovaná funkce je kladná spojitá funkce, daný integrál tedy existuje. Přitom podle definice je

$$\begin{aligned} S &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{(-k,k) \times (-k,k)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \cdot \int_{-k}^k e^{-y^2} dy \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Podle uvedené věty je však také

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq k^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

a po zavedení polárních souřadnic dostaneme

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^k \rho e^{-\rho^2} d\rho \right) d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi.$$

Je tedy $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Příklad 2.12 Vypočtěte $\iint_A xy e^{-x^2-y^2} dx dy$, $A = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, \infty \rangle$.

I. Jelikož $f(x, y)$ je nezáporná funkce, stačí vzít posloupnost čtvrtkruhů $(K_k)_1^\infty$ se středem v počátku, které stejnoměrně zaplňují množinu A .

$$K_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq k^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \iint_{K_k} xy e^{-x^2-y^2} dx dy &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right| = \int_0^k \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \cdot \rho \cdot e^{-\rho^2} d\varphi \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^k \left[-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^k \rho^3 \cdot e^{-\rho^2} d\rho = \left| \begin{array}{l} \rho^2 = t \\ 2\rho d\rho = dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{k^2} t \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{4} [-t e^{-t} - e^{-t}]_0^{k^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{-k^2 - 1}{e^{k^2}} + 1 \right) \\ \iint_A xy e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{K_k} xy e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{k^2 + 1}{e^{k^2}} \right) = \underline{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

II. Provedeme výpočet postupnou integrací:

$$\begin{aligned} \iint_A xy e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b xy e^{-x^2-y^2} dx \right) dy = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} y e^{-x^2-y^2} \right]_0^b \right) dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} y e^{-b^2-y^2} + \frac{1}{2} y e^{-y^2} \right) dy = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^a y e^{-y^2} dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{4} e^{-y^2} \right]_0^a = \underline{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Cvičení

Vypočtěte uvedené nevlastní integrály

Příklad 1 $\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x\}$ [2]

Příklad 2 $\iint_A e^{\frac{x}{y}} dx dy$, A je množina ohraničená křivkami $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $y = \sqrt{x}$. [$\frac{1}{2}$]

Příklad 3 $\iint_A \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ [$\frac{\pi}{2}$]

Příklad 4 $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} dx dy$ [Diverguje.]

Příklad 5 $\iint_A e^{-(x+y)} dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y, 0 < y < \infty\}$ [$\frac{1}{2}$]

Příklad 6 $\iiint_A \frac{1}{x^{1/3} y^{1/4} z^{1/5}} dx dy dz$, $A = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ [$\frac{5}{2}$]

Příklad 7 $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$ [$\pi^{3/2}$]

Příklad 8 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n$ [$\sqrt{\pi^n}$]

3 Křivkové a plošné integrály

3.1 Křivky v \mathbb{R}^n

Intuitivně jasný pojem křivky je třeba v matematice přesně definovat. To lze udělat mnoha způsoby, které nemusí být všechny ekvivalentní. Pro naše účely postačí omezit se na kompaktní křivky takové, které se dají složit z tzv. **regulárních oblouků**. Takový oblouk si můžeme představit, že vznikne pružnou deformací elastické tyčinky (úsečky); tato deformace je popsána zobrazením jistých vlastností, které nazýváme parametrizací daného oblouku. S pojmem parametrizece jsme se seznámili již dříve. Abychom nemuseli diskutovat zvlášť případy křivek v \mathbb{R}^2 a v \mathbb{R}^3 , budeme pracovat v prostoru \mathbb{R}^n .

Nechť je dáno zobrazení $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbb{R}$. Toto zobrazení je určeno n-ticí reálných funkcí $\varphi_i : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Píšeme jako obvykle

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Zobrazení φ nazýváme **parametrizací** množiny $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ a rovnici

$$p = \varphi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \tag{3.1}$$

nazýváme **parametrickou rovnici** množiny $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$; v souřadnicovém tvaru pak píšeme místo 3.1

$$\left. \begin{array}{lcl} x_1 & = & \varphi_1(t) \\ x_2 & = & \varphi_2(t) \\ \vdots & & \\ x_n & = & \varphi_n(t) \end{array} \right\} t \in \langle \alpha, \beta \rangle \tag{3.2}$$

($p = (x_1, \dots, x_n)$) a rovnice 3.2 nazýváme **parametrickými rovnicemi** množiny $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$; proměnnou t nazýváme **parametrem**. Množina $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ může být dosti složitá, neklademe-li na φ další omezující podmínky. I při spojitém zobrazení mohou body $\varphi(t)$ vyplnit v \mathbb{R}^n až n-rozměrnou množinu (např. čtverec v \mathbb{R}^2 či krychli v \mathbb{R}^3), ačkoliv se zdá, že při jediném reálném parametru t by měla být množina $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ z intuitivního hlediska jednorozměrná. Je proto třeba učinit o φ další předpoklady.

Definice 3.1 Množina $A \subset \mathbb{R}^n$, ($n \geq 2$) se nazývá **hladký oblouk** v \mathbb{R}^n , existuje-li prosté zobrazení $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ třídy C_1 (tj. φ má spojitou derivaci) takové, že $\varphi'(t) \neq \mathbf{0}$ pro každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle) = A$.

Zobrazení φ se nazývá **(regulární) parametrizace oblouku** A .

Vyjádříme-li φ v kartézském tvaru, tedy např. pro $n = 3$

$$\vec{r}(t) = \varphi_1(t)\mathbf{i} + \varphi_2(t)\mathbf{j} + \varphi_3(t)\mathbf{k},$$

hovoříme o **vektorové rovnici** oblouku A .

Nechť $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je regulární parametrizace oblouku A . Nechť $g : \langle \alpha', \beta' \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, která zobrazuje interval $\langle \alpha', \beta' \rangle$ na interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ a má v intervalu $\langle \alpha', \beta' \rangle$ spojitou

derivaci, jež je v každém bodě tohoto intervalu různá od nuly. Takovou funkci budeme dále nazývat **transformací parametru**. Zobrazení

$$\psi = \varphi \circ g : \langle \alpha', \beta' \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$$

je rovněž regulární parametrizací oblouku A ; říkáme, že **parametrizace ψ vznikla z parametrizace φ transformací g** .

(Zřejmě $\psi(\langle \alpha', \beta' \rangle) = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$, ψ je prosté zobrazení, spojitost a nenulovost derivace ψ' plyne z pravidla pro derivování složeného zobrazení: $\psi'(s) = \varphi'(g(s))g'(s)$, $s \in \langle \alpha', \beta' \rangle$.) Oblouk má tedy nekonečně mnoho (regulárních) parametrizací. Vezmeme-li některou jeho parametrizaci, dostaneme z ní každou další parametrizaci vhodnou transformací parametru. To plyne z tohoto tvrzení:

Jsou-li $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : \langle \alpha', \beta' \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ dvě regulární parametrizace téhož oblouku A , je funkce g

$$g(s) = \varphi^{-1}(\psi(s)), \quad s \in \langle \alpha', \beta' \rangle,$$

transformací parametru a $\psi = \varphi \circ g$.

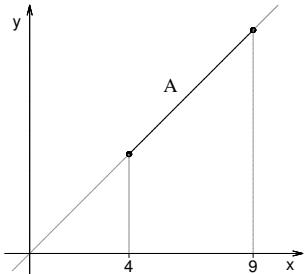
Je-li transformace parametru g rostoucí funkce, říkáme, že φ, ψ jsou **souhlasné parametrizace**; je-li g klesající, říkáme, že φ, ψ jsou **nesouhlasné**.

Speciálně, parametrizace

$$\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi : \langle -\beta, -\alpha \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(t) = \varphi(-t)$$

jsou nesouhlasné parametrizace, nazývají se **opačné**.

Příklad 3.1 Uvažujme parametrické rovnice oblouku A tvaru



$$\varphi : \begin{aligned} x &= t \\ y &= t \end{aligned} \quad t \in \langle 4, 9 \rangle$$

Jedná se tedy o úsečku ležící na přímce $y = x$ (viz obrázek).
Tedy $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t, t)$, $\varphi : \langle 4, 9 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$
V našem případě $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle 4, 9 \rangle$.

1) Zvolme transformaci parametru $g_1 : \langle 2, 3 \rangle \rightarrow \langle 4, 9 \rangle$ (tj. $\langle \alpha', \beta' \rangle = \langle 2, 3 \rangle$), $g_1(s) = s^2$
Jinou parametrizaci ψ_1 dostaneme následovně:

$$\psi_1(s) = (\varphi \circ g_1)(s) = \varphi(g_1(s)) = \varphi(s^2) = (s^2, s^2)$$

$$\text{Tedy } \psi_1 : \begin{aligned} x &= s^2 \\ y &= s^2 \end{aligned} \quad t \in \langle 2, 3 \rangle$$

je také parametrizace úsečky A .

2) Zvolme nyní transformaci parametru $g_2 : \langle 16, 81 \rangle \rightarrow \langle 4, 9 \rangle$ (tj. $\langle \alpha', \beta' \rangle = \langle 16, 81 \rangle$), $g_2(u) = \sqrt{u}$

Takže další parametrizace je tvaru

$$\psi_2(u) = (\varphi \circ g_2)(u) = \varphi(g_2(u)) = \varphi(\sqrt{u}) = (\sqrt{u}, \sqrt{u})$$

$$\text{a zřejmě } \psi_2 : \begin{aligned} x &= \sqrt{u} \\ y &= \sqrt{u} \end{aligned} \quad t \in \langle 16, 81 \rangle$$

je opět parametrizace úsečky A . Jelikož jak g_1 , tak g_2 jsou rostoucí funkce, φ, ψ_1, ψ_2 jsou souhlasné parametrizace.

Pojmy, které se vztahují k oblouku a jež nezávisejí na parametrizaci, jsou **geometrickými pojmy**. Je to např. pojem krajního bodu oblouku.

Krajními body oblouku A jsou body a, b takové, že pro některou parametrizaci $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ oblouku A je $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Množina $\partial A = \{a, b\}$ se nazývá **okraj oblouku**, množina $A \setminus \partial A$ se nazývá (**geometrický**) **vnitřek oblouku A** (pozor, nejde o vnitřek množiny A v \mathbb{R}^n , jak by definován v kap. 1, to je ovšem prázdná množina). Další pojem, který nezávisí na parametrizaci, je pojem jednotkového tečného vektoru oblouku.

Je-li $p = \varphi(t)$ libovolný bod oblouku A , pak v něm existují právě dva **jednotkové tečné vektory**:

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}, \quad -\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}. \quad (3.3)$$

O prvním z nich řekneme, že je **indukován parametrizací φ** . Je-li ψ další parametrizace oblouku A a je-li $p = \varphi(t) = \psi(s)$, pak indukované jednotkové tečné vektory

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}, \quad \frac{\psi'(s)}{|\psi'(s)|}$$

jsou si rovny, jde-li o souhlasné parametrizace, a jsou opačné, jde-li o nesouhlasné parametrizace. (To se snadno dokáže, použijeme-li vzorec pro derivování složeného zobrazení $\psi = \varphi \circ g$, kde g je transformace parametru.)

Orientace oblouku

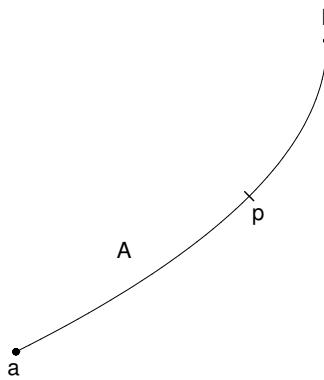
Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk a $\varphi = \varphi(t) : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ některá jeho parametrizace. Interpretujeme-li parametr t jako čas, pak $p = \varphi(t)$ je poloha pohybujícího se bodu v okamžiku t . Bod $a = \varphi(\alpha)$ je v tomto případě počáteční poloha a $b = \varphi(\beta)$ koncová poloha pohybujícího se bodu.

Jestliže měl pohybující se bod v čase t_1 polohu $p_1 = \varphi(t_1)$ a v čase $t_2 > t_1$ polohu $p_2 = \varphi(t_2)$, je přirozené říci, že p_2 je za p_1 (nebo také, že p_1 je před p_2), a píšeme $p_2 \succ p_1$ (nebo $p_1 \prec p_2$).

Tedy

$$p_1, p_2 \in A : p_1 \prec p_2 \Leftrightarrow t_1 = \varphi^{-1}(p_1) < t_2 = \varphi^{-1}(p_2).$$

Tím jsme zavedli na A relaci \prec , která je uspořádáním v množině A .



O tomto uspořádání řekneme, že určuje **orientaci** oblouku A , a oblouk s tímto uspořádáním nazveme **orientovaným obloukem**. Budeme jej značit \mathbf{A} . O parametrizaci φ říkáme, že určuje **orientaci oblouku A** nebo že **souhlasí s orientací \mathbf{A}** . (Říkáme též, že orientace je dána růstem parametru dané parametrizace.)

Pro každý bod $p \in A$, $p \neq a$, $p \neq b$, zřejmě platí $a \prec p \prec b$ (viz obr.).

Bod $a = \varphi(\alpha)$, resp. $b = \varphi(\beta)$ nazveme **počátečním**, resp. **konecovým bodem orientovaného oblouku A** .

Jestliže parametrizace φ souhlasí s orientací \mathbf{A} a je-li φ_1 parametrizace souhlasná s φ , pak φ_1 rovněž souhlasí s orientací \mathbf{A} .

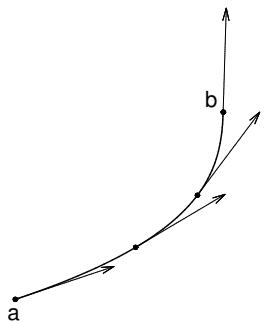
Dále platí: Je-li \prec^{-1} inverzní relace k \prec , pak určuje rovněž orientaci oblouku A , která se nazývá **opačná**; oblouk A s tímto uspořádáním nazýváme **opačně orientovaným obloukem** k oblouku \mathbf{A} . Označíme jej $-\mathbf{A}$.

Z předchozího výkladu plyne, že **orientace oblouku je určena tím, který z krajních bodů prohlásíme za počáteční a který za konecový**. Dále je zřejmé, že **jsou možné právě dvě orientace oblouku**, neboť všechny parametrizace oblouku lze rozdělit do dvou tříd tak, že v jedné třídě jsou všechny parametrizace souhlasné a libovolné dvě parametrizace z různých tříd jsou nesouhlasné. Parametrizace z jedné třídy určují vždy tutéž orientaci, parametrizace z druhé třídy určují pak orientaci opačnou.

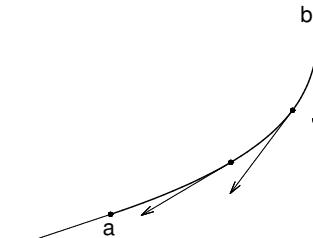
Orientace oblouku úzce souvisí s volbou jednotkového tečného pole.

Jednotkové tečné pole oblouku $A \subset \mathbb{R}^n$ je spojité vektorové pole $\vec{\tau} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^n)$ takové, že $\tau(p)$ je jednotkový tečný vektor oblouku A v bodě $p \in A$.

Na oblouku existují právě dvě jednotková tečná pole $\vec{\tau}$ a $-\vec{\tau}$, která jsou navzájem opačná (viz obr. 3.1 a 3.2)



Obrázek 3.1: Jednotkové tečné pole...



Obrázek 3.2: ...a pole k němu opačné

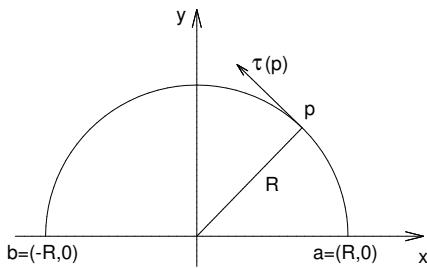
Je-li $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizace oblouku A , která souhlasí se zvolenou orientací \mathbf{A} ,

nazýváme jednotkové tečné pole definované vztahem

$$\vec{\tau}(p) = \frac{\varphi'(\varphi^{-1}(p))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(p))|}, \quad p \in A, \quad (3.4)$$

(viz 3.3) **orientujícím polem oblouku \mathbf{A} .** Orientovaný oblouk \mathbf{A} je účelné chápat jako dvojici $(A, \vec{\tau})$, oblouk $-\mathbf{A}$ jako dvojici $(A, -\vec{\tau})$.

Příklad 3.2 Nechť A je polokružnice v \mathbb{R}^2 poloměru R se středem v počátku, ležící v polovině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ (viz obrázek). Zvolme orientaci \mathbf{A} tak, aby bod $a = (R, 0)$ byl počáteční, bod $b = (-R, 0)$ koncový.



Parametrizace, která souhlasí s touto orientací, je např. $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.
Je $\varphi'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$, $|\varphi'(t)| = R$,
 $\varphi'(t)/|\varphi'(t)| = (-\sin t, \cos t)$.
Je-li $p = (x, y) \in A$, $x = R \cos t$, $y = R \sin t$,
je $\vec{\tau} = (-\frac{y}{R}, \frac{x}{R})$, kde $p = (x, y) \in A$.
Pole $\vec{\tau}$ je orientující pole.

V předmětu BMA1 jsme se seznámili s pojmem **délky oblouku**. Každý hladký oblouk $A \subset \mathbb{R}^n$ má konečnou délku $s(A)$. Je-li $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ libovolná parametrizace oblouku A , pak

$$s(A) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt.$$

Příklad 3.3 Nechť $A = \varphi(\langle 0, 4\pi \rangle)$, kde

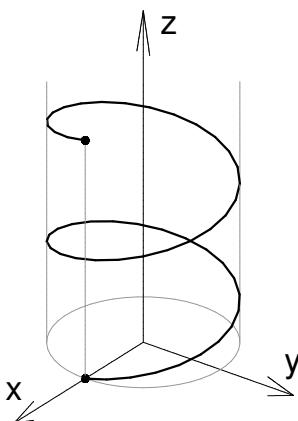
$$\varphi : \langle 0, 4\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

A jsou dva závity šroubovice na rotačním válci $x^2 + y^2 = a^2$ (viz obrázek).

Tedy

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b) \\ |\varphi'(t)| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0. \end{aligned}$$

Zobrazení φ je třídy C_1 , má nenulovou derivaci a je prosté (všimněte si třetí komponenty), je tedy regulární parametrizací oblouku A a platí



$$s(A) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 4\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Hladké oblouky jsou nejjednodušší jednorozměrné útvary v \mathbb{R}^n . Složitější jednorozměrné útvary lze tvořit z oblouků. Můžeme-li oblouky spojovat, vznikne křivka. Představíme-li si křivku, jak vzniká souvislým tahem hrotu tužky na papíře jako postupné vytváření oblouků, aniž by některý oblouk byl proběhnut více než jednou, můžeme definovat křivku takto:

Definice 3.2 *Množinu $C \subset \mathbb{R}^n$ nazveme (po částech hladkou) křivkou, existuje-li konečná posloupnost oblouků v \mathbb{R}^n*

$$(A_1, A_2, \dots, A_r), \quad (r \geq 1) \quad (3.5)$$

a konečná posloupnost bodů

$$(a_0, a_1, \dots, a_r) \quad (3.6)$$

tak, že platí

(1) *A_i je oblouk s krajními body a_{i-1}, a_i ($a_{i-1} \neq a_i$) ($i = 1, \dots, r$)*

(2) *libovolné dva oblouky A_i, A_j ($i \neq j$) mají společné nejvyšše krajní body*

$$(3) \quad C = \bigcup_{i=1}^r A_i.$$

Je-li kromě podmínek (1) až (3) splněna ještě podmínka

(4) *$A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$ pro $i \neq j \neq k \neq i$ (tj. každý z bodů a_i je krajním bodem nejvyšše dvou oblouků),*

nazveme křivku C jednoduchou (též prostou nebo neprotínající se) křivkou.

Je-li splněna podmínka

(5) *$a_0 = a_r$,*

nazveme C uzavřenou křivkou.

Soubor (A_1, A_2, \dots, A_r) nazveme rozkladem křivky C . Jednoduchá křivka C , pro niž $a_0 \neq a_r$, se nazývá po částech hladký oblouk, body a_0, a_r krajní body oblouku C .

Z podmínky (1) vyplývá, že $a_i \in A_i \cap A_{i+1}$, což znamená, že oblouky A_i, A_{i+1} se spojují v bodě a_i .

Definice 3.3 *Bod $p \in C$ nazýváme regulárním bodem křivky C , existuje-li otevřené okolí $U(p)$ tak, že $\overline{U(p)} \cap C$ je hladký oblouk, v opačném případě se p nazývá singulární bod křivky C .*

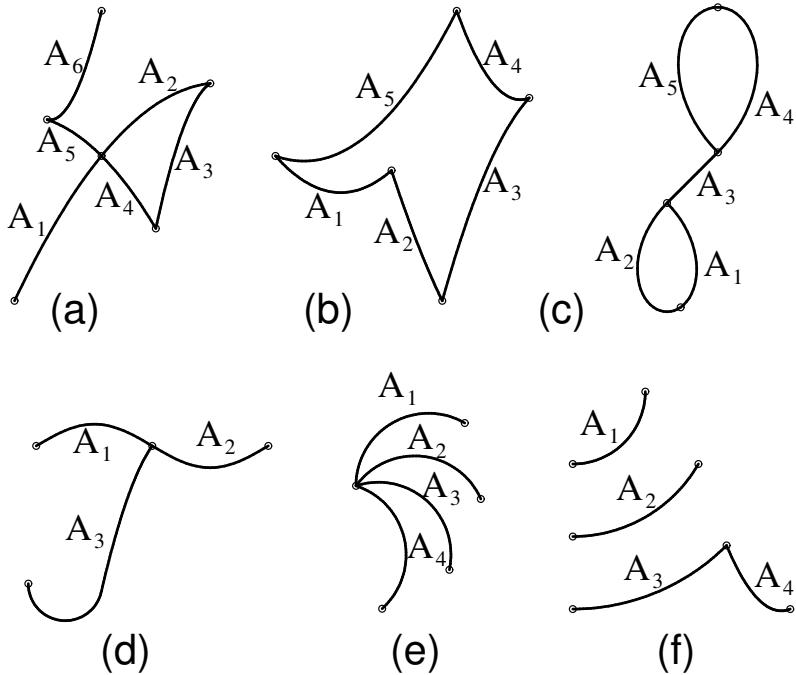
Singulárními body mohou být nejvyšše body a_i ($i = 0, \dots, n$). Jednoduchá křivka bez singulárních bodů se nazývá hladká. Hladký oblouk je zřejmě speciální případ jednoduché hladké křivky. Příkladem jednoduché hladké uzavřené křivky je např. kružnice.

Podle definice křivky jsou z geometrických útvarů na obr. 3.3 křivkami pouze útvary (a),(b),(c), přitom křivka (b) je jednoduchá uzavřená křivka.

Délkou křivky C s rozkladem 3.5 nazýváme číslo

$$s(C) = \sum_{i=1}^r s(A_i).$$

Pomocí zjednění se snadno dokáže, že číslo $s(C)$ nezávisí na rozkladu křivky C na oblouky.



Obrázek 3.3: Příklady útvarů, které jsou ((a),(b),(c)) a nejsou ((d),(e),(f)) křivkami

3.2 Neorientovaný křivkový integrál v \mathbb{R}^n

Nechť $C \subset \mathbb{R}^n$ je křivka. Tak jako při výstavbě n-rozměrného integrálu v \mathbb{R}^n měly základní význam n-rozměrné intervaly a jejich objem, mají při výstavbě křivkového integrálu analogický význam oblouky, jejich délka a tzv. stupňovité funkce na C .

Definice 3.4 *Stupňovitou funkcí na C nazveme takovou funkci $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, k níž existuje rozklad C na oblouky (A_1, \dots, A_k) takový, že na každém vnitřku oblouku A_i je f konstantní. Je-li a_i hodnota funkce f na vnitřku oblouku A_i ($i = 1, \dots, k$), pak integrál stupňovité funkce f po křivce C definujeme vztahem*

$$\int_C f \, ds = \sum_{i=1}^k a_i s(A_i), \quad (3.7)$$

kde $s(A_i)$ je délka oblouku A_i ($i = 1, \dots, k$).

Řekneme, že $N \subset C$ je **nulová množina na C (množina křivkové míry 0)**, existuje-li k libovolnému $\varepsilon > 0$ konečná posloupnost oblouků A'_j , $j = 1, \dots, k$, $A'_j \subset C$, pokrývající N a taková, že $\sum_{j=1}^k s(A'_j) < \varepsilon$.

Nulové množiny na C mají tytéž vlastnosti jako nulové množiny v \mathbb{R}^n (vzhledem k n-rozměrné geometrické míře ν_n). Nulovou množinou na C je každá konečná množina.

Označme $\mathcal{E}(C)$ množinu všech stupňovitých funkcí na C a nechť $\bar{\mathcal{E}}(C)$ je množina všech reálných funkcí definovaných skoro všude na C , pro něž platí:

Ke každé funkci $f \in \bar{\mathcal{E}}(C)$ existuje neklesající posloupnost stupňovitých funkcí $(f_k)_{k=1}^\infty$ tak, že $f_k \rightarrow f$ skoro všude na C . Pro takovou funkci definujeme

$$\int_C f \, ds = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_C f_k \, ds$$

V množině $\bar{\mathcal{E}}(C)$ se nedá obecně odčítat ani násobit zápornou konstantou. Provedeme proto ještě jedno rozšíření, a to tvořením rozdílů funkcí z $\bar{\mathcal{E}}(C)$.

Označme $\bar{\mathcal{L}}(C)$ množinu všech reálných funkcí definovaných skoro všude na C , pro něž platí:

Ke každé funkci $f \in \bar{\mathcal{L}}(C)$ existují funkce $g, h \in \bar{\mathcal{E}}(C)$ takové, že $f = g - h$ skoro všude na C , přičemž aspoň jeden z integrálů $\int_C g \, ds$, $\int_C h \, ds$ je konečný. Pro takovou funkci f definujeme

$$\int_C f \, ds = \int_C g \, ds - \int_C h \, ds$$

Jestliže $\int_C f \, ds$ je konečný, říkáme, že f má na C konvergentní integrál nebo že f je **integrovatelná** na C a píšeme $f \in \mathcal{L}(C)$ ($\mathcal{L}(C)$ je tedy množina všech integrovatelných funkcí na C .)

Platí

$$\mathcal{E}(C) \subset \bar{\mathcal{E}}(C) \subset \bar{\mathcal{L}}(C), \quad \mathcal{E}(C) \subset \mathcal{L}(C) \subset \bar{\mathcal{L}}(C).$$

Aby uvedená definice byla korektní, je zřejmé, že $\int_C f \, ds$ nesmí záviset na vyjádření f pomocí funkcí z množiny $\bar{\mathcal{E}}(C)$. (Viz [?])

Integrál takto vybudovaný se nazývá **neorientovaný křivkový integrál** na C .

Integrál funkce $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ přes podmnožinu $M \subset C$ definujeme vztahem

$$\int_M f \, ds = \int_C f \chi_M \, ds,$$

existuje-li integrál vpravo (χ_M je charakteristická funkce množiny M).

Vlastnosti neorientovaného křivkového integrálu jsou stejné jako vlastnosti n-rozměrného integrálu v \mathbb{R}^n . Zejména pak platí věta:

Věta 3.1 Je-li (A_1, \dots, A_k) rozklad C , pak

$$\int_C f \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f \, ds, \tag{3.8}$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Postačující podmínku konvergence křivkového integrálu dává věta:

Věta 3.2 Nechť $N \subset C$ je nulová množina a nechť f je spojitá na $C \setminus N$ a ohraničená. Pak $\int_C f \, ds$ konverguje.

Vzorec 3.8 ukazuje, že budeme-li umět počítat integrál po oblouku, budeme umět počítat integrál i po libovolné křivce.

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk, $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ jeho parametrizace. Nechť nejdříve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je stupňovitá funkce taková, že f nabývá hodnotu a_i na vnitřku oblouku A_i ($i = 1, \dots, k$), kde (A_1, \dots, A_k) je rozklad oblouku A .

Oblouky A_i můžeme uspořádat tak, aby parametrizace oblouku A_i byla

$$\varphi_i : \langle t_{i-1}, t_i \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (i = 1, \dots, k),$$

kde $t_0 = \alpha$, $t_k = \beta$, $\varphi_i = \varphi| \langle t_{i-1}, t_i \rangle$. Potom

$$s(A_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'_i(t)| \, dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| \, dt.$$

Použijeme-li 3.7, dostaneme

$$\int_A f \, ds = \sum_{i=1}^k a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| \, dt = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} a_i |\varphi'(t)| \, dt. \quad (3.9)$$

Pro $t \in (t_{i-1}, t_i)$ je $\varphi(t)$ vnitřním bodem oblouku A_i , takže $f(\varphi(t)) = a_i$. Můžeme proto 3.9 psát ve tvaru

$$\int_A f \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| \, dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| \, dt.$$

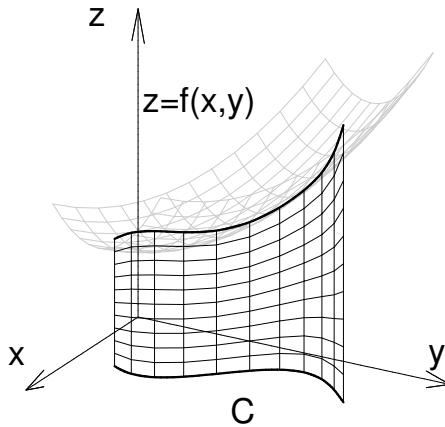
Platí tedy pro stupňovitou funkci f na oblouku A vzorec

$$\int_A f \, ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| \, dt. \quad (3.10)$$

Limitním procesem a použitím linearity integrálu zjistíme, že 3.10 platí pro **každou integrovatelnou funkci** na A a naopak, konverguje-li integrál vpravo v 3.10, je f integrovatelná na A a platí 3.10. Přitom integrál vpravo konverguje, právě když funkce $f \circ \varphi : t \mapsto f(\varphi(t))$ je integrovatelná na $\langle \alpha, \beta \rangle$ (omezujeme se zde pouze na konvergentní integrál, neboť pro aplikace to zcela postačí). Platí tedy:

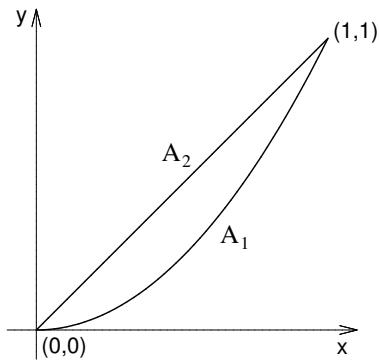
Věta 3.3 Nechť A je oblouk v \mathbb{R}^n , $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ jeho parametrizace. Pak f je integrovatelná na A , právě když funkce $f \circ \varphi$ je integrovatelná na $\langle \alpha, \beta \rangle$ a platí vzorec 3.10.

Je-li f nezáporná funkce na křivce $C \subset \mathbb{R}^n$, udává $\int_C f(x, y) \, ds$ obsah části válcové plochy s řídící křivkou C shora ohraničené funkcí f (viz obr. 3.4).



Obrázek 3.4: Geometrický význam neorientovaného křivkového integrálu

Příklad 3.4 Vypočtěte $\int_C x \, ds$, kde křivka C se skládá z oblouku A_1 paraboly $y = x^2$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a z úsečky $A_2 : y = x$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $C = A_1 \cup A_2$ (viz obrázek).



Parametrizace oblouku A_1 je $\varphi_1(t) = (t, t^2)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

Parametrizace oblouku A_2 je $\varphi_2(t) = (t, t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Přitom $\varphi'_1(t) = (1, 2t)$, $|\varphi'_1(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$,

$\varphi'_2(t) = (1, 1)$, $|\varphi'_2(t)| = \sqrt{2}$, $f(\varphi_1(t)) = t$, $f(\varphi_2(t)) = t$.

$$\begin{aligned} \text{Tedy } \int_C x \, ds &= \int_{A_1} x \, ds + \int_{A_2} x \, ds = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} \, dt + \\ &+ \int_0^1 t \cdot \sqrt{2} \, dt = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Cvičení

Příklad 1 Vypočtěte $\int_C \frac{1}{x-y} \, ds$, kde C je úsečka AB , $A = (0, -2)$, $B = (4, 0)$. $[\sqrt{5} \ln 2]$

Příklad 2 Vypočtěte $\int_C (x + y) \, ds$, kde C je obvod trojúhelníka s vrcholy $A = (1, -1)$, $B = (2, -1)$, $C = (1, 0)$. $[1 + \sqrt{2}]$

Příklad 3 Vypočtěte $\int_C x \, ds$, kde C je oblouk AB paraboly $y = x^2$, $A = (2, 4)$, $B = (1, 1)$. $[(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/12]$

Příklad 4 Vypočtěte $\int_C xy \, ds$, kde C je obvod obdélníka ohraničeného přímkami $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$.

[24]

Příklad 5 Vypočtěte $\int_C xyz \, ds$, kde C je křivka $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 2$. [0]

Příklad 6 Vypočtěte obsah pláště plochy ohraničené zdola rovinou $z = 0$, jejíž řídící křivka C leží v rovině $z = 0$, kterou vytíná plocha $z = f(x, y)$

a) $C : y = \frac{3}{8}x^2$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$, $f : z = x$. $[\frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)]$

b) $C : x^2 + y^2 = r^2$, $f : z = mx$, $m > 0$. $[2mr^2]$

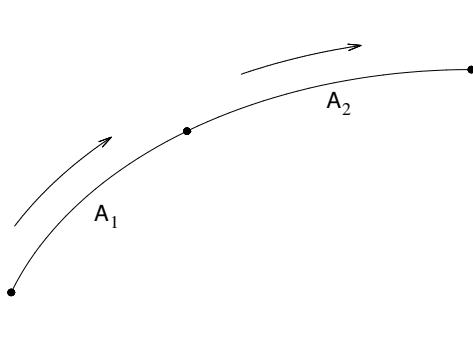
c) $C : x^2 + y^2 = rx$, $r > 0$, $f : x^2 + y^2 = z^2$. $[2r^2]$

3.3 Orientovaný křivkový integrál

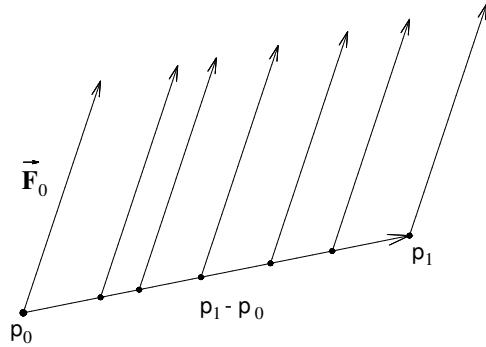
Uvažujme orientovaný oblouk \mathbf{A} ; budeme jej dále pojímat jako dvojici $(A, \vec{\tau})$, kde $\vec{\tau}$ je orientující tečné pole na A . Orientovaný oblouk $\mathbf{A}_1 = (A_1, \vec{\tau}_1)$ nazveme **orientovaným podobloukem** orientovaného oblouku $\mathbf{A} = (A, \vec{\tau})$, jestliže $A_1 \subset A$ a $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}|_{A_1}$. Řekneme, že orientovaný oblouk \mathbf{A} je **součtem orientovaných oblouků** $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$, a píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, jestliže $\{A_1, A_2\}$ je rozklad oblouku A . Je-li $\mathbf{A} = (A, \vec{\tau})$, $\mathbf{A}_1 = (A_1, \vec{\tau}_1)$, $\mathbf{A}_2 = (A_2, \vec{\tau}_2)$, pak $A = A_1 \cup A_2$, $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}|_{A_1}$, $\vec{\tau}_2 = \vec{\tau}|_{A_2}$.

Analogicky definujeme, že orientovaný oblouk \mathbf{A} je součet orientovaných oblouků $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$. Píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k$.

Zřejmě platí: Je-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, pak $-\mathbf{A} = (-\mathbf{A}_1) + (-\mathbf{A}_2)$. Orientovaný oblouk \mathbf{A} znázorňujeme tak, že u oblouku A šipkou vyznačíme orientaci. Součet $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ je znázorněn na obr. 3.5.



Obrázek 3.5: Součet oblouků A_1 a A_2

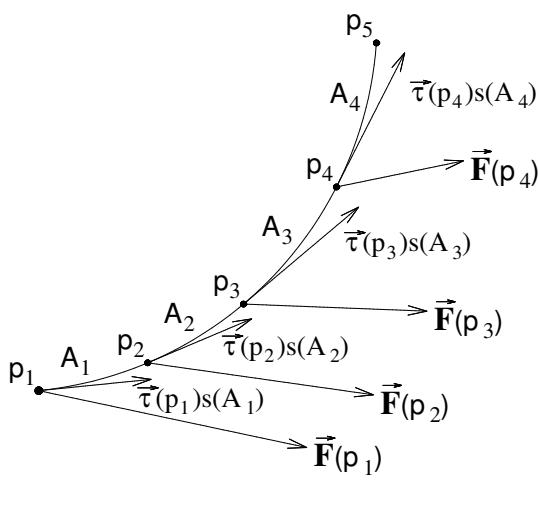


Obrázek 3.6: Konst. vektorové pole

Nechť \mathbf{L} je orientovaná úsečka s počátečním bodem p_0 a koncovým bodem p_1 a nechť na \mathbf{L} je definováno konstantní vektorové pole $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_0$ (viz obr. 3.6). Z fyziky je známo, že práce pole po orientované úsečce \mathbf{L} je

$$\mathcal{A} = \vec{\mathbf{F}}_0 \cdot (p_1 - p_0)$$

(kde vpravo je skalární součin). Nechť nyní $\mathbf{A} = (A, \vec{\tau})$ je orientovaný oblouk. Rozdělme jej na orientované podoblouky $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k$; počáteční bod oblouku \mathbf{A}_i nechť je p_i ($i = 1, \dots, k$).



Nechť $\vec{\mathbf{F}}$ je spojité vektorové pole na A . Bude-li dělení na podoblouky dostatečně jemné, můžeme oblouk \mathbf{A}_i nahradit přibližně orientovanou úsečkou vycházející z bodu p_i a určenou vektorem $\vec{\tau}(p_i)s(A_i)$, kde $\vec{\tau}(p_i)$ je tečný vektor oblouku A_i v bodě p_i . Vzhledem k tomu, že pole $\vec{\mathbf{F}}$ je spojité, můžeme jej na malém oblouku A_i approximovat konstantním polem $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}(p_i)$ (viz obrázek). Práce pole $\vec{\mathbf{F}}$ na \mathbf{A} je tedy přibližně rovna

$$\mathcal{A} \approx \sum_{i=1}^k \vec{\mathbf{F}}(p_i) \cdot \vec{\tau}(p_i)s(A_i). \quad (3.11)$$

Součet vpravo bude tím přesněji určovat práci pole $\vec{\mathbf{F}}$ po oblouku A , čím jemnější bude dělení oblouku A . Součet 3.11 je integrální součet pro křivkový integrál

$$\int_A (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau}) ds,$$

kde integrujeme skalární funkci $f = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau}$. Lze ukázat, že pro spojité pole $\vec{\mathbf{F}}$ integrální součty v 3.11 konvergují k tomuto integrálu, jestliže rozdelení na podoblouky mají normy konvergující k nule (**normou rozdelení na podoblouky** $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ s danými počátečními body p_1, \dots, p_k nazýváme největší z délek $|p_2 - p_1|, |p_3 - p_2|, \dots$). To nás vede k této definici:

Definice 3.5 Orientovaným křivkovým integrálem pole $\vec{\mathbf{F}}$ po orientovaném oblouku \mathbf{A} nazýváme integrál

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_A (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau}) ds, \quad (3.12)$$

existuje-li neorientovaný integrál vpravo. Přitom $\vec{\tau}$ je orientující tečné pole oblouku \mathbf{A} a $\vec{\mathbf{F}}$ je pole definované na A .

Z předchozích úvah je patrné, že **integrál 3.12 určuje práci pole $\vec{\mathbf{F}}$ po orientovaném oblouku \mathbf{A}** .

Integrál existuje např. tehdy, **je-li $\vec{\mathbf{F}}$ spojité pole na A** , což budeme dále předpokládat. Protože orientovaný integrál jsme vztahem 3.12 definovali pomocí neorientovaného integrálu, plynou vlastnosti orientovaného integrálu z vlastností neorientovaného integrálu.

Tak např. platí:

Je-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k$, je

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathbf{A}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} + \dots + \int_{\mathbf{A}_k} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}. \quad (3.13)$$

Tento vzorec vyjadřuje **aditivitu práce**.

Dále platí

$$\int_{-\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = - \int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}, \quad (3.14)$$

neboť pro $\mathbf{A} = (A, \vec{\tau})$ je $-\mathbf{A} = (A, -\vec{\tau})$.

Výpočet orientovaného integrálu lze provést převedením na neorientovaný integrál.

Je-li $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ **parametrizace orientovaného oblouku \mathbf{A}** (tj. parametrizace oblouku A souhlasí s danou orientací), pak pro $p = \varphi(t)$ je $\vec{\tau}(p) = \varphi'(t)/|\varphi'(t)|$, takže

$$(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau})(p) = \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

Odtud

$$\int_A (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau}) ds = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} |\varphi'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Máme tedy vzorec

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (3.15)$$

Je-li $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, \dots, F_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, můžeme 3.15 rozepsat ve „složkovém tvaru“:

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha}^{\beta} (F_1(\varphi(t))\varphi'_1(t) + \dots + F_n(\varphi(t))\varphi'_n(t)) dt, \quad (3.16)$$

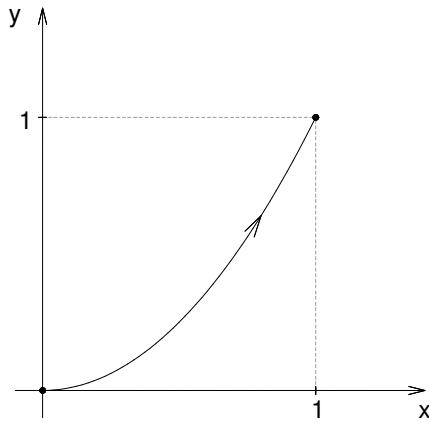
kde $F_i(\varphi(t)) = F_i(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, ($i = 1, \dots, n$).

Tradiční označení integrálu $\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}$ je

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathbf{A}} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n \quad (3.17)$$

(v \mathbb{R}^2 zpravidla $\int_{\mathbf{A}} F_1 dx + F_2 dy$, v \mathbb{R}^3 $\int_{\mathbf{A}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$). Označení na pravé straně 3.17 naznačuje, jak máme integrál převést na jednorozměrný: Za dx_1, \dots, dx_n dosadíme diferenciály funkcí $x_i = \varphi_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), za proměnné vystupující ve funkcích $F_i(x_1, \dots, x_n)$ dosadíme $x_i = \varphi_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) a integrujeme pak v mezích od α do β , jak je uvedeno ve vzorci 3.16.

Příklad 3.5 Vypočtěte práci rovinného pole $\vec{F} = (y, -x)$ po oblouku \mathbf{A} paraboly $y = x^2$ z bodu $(0, 0)$ do bodu $(1, 1)$ (viz obrázek).



Parametrizace oblouku \mathbf{A} je

$$\varphi(t) = (t, t^2), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

a je souhlasná se zadanou orientací.

Přitom $\varphi'(t) = (1, 2t)$, $\vec{F}(\varphi(t)) = (t^2, -t)$.

Tedy

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_A \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (t^2, -t) \cdot (1, 2t) dt = \\ &= \int_0^1 (t^2 - 2t^2) dt = - \int_0^1 t^2 dt = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

S orientovanými křivkovými integrály po orientovaných obloucích bychom v aplikacích nevystačili. Pohyb v daném vektorovém poli nemusí být vždy jednoduchý pohyb po oblouku (tj. pohyb od počátečního ke koncovému bodu), může jít např. i o takový pohyb, kdy bod se po proběhnutí určité dráhy opět vrací po téžme oblouku apod. Abychom matematicky popsali takové situace, zavedeme pojemy cesty.

Definice 3.6 Konečný soubor orientovaných oblouků

$$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k \tag{3.18}$$

takový, že koncový bod oblouku \mathbf{A}_i se rovná počátečnímu bodu oblouku \mathbf{A}_{i+1} ($i = 1, \dots, k-1$), nazveme **cestou**. Budeme tuto cestu zapisovat ve tvaru

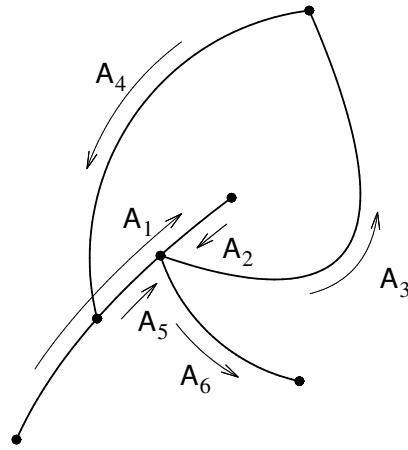
$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k. \tag{3.19}$$

Počáteční bod \mathbf{A}_1 , resp. koncový bod \mathbf{A}_k nazýváme **počátečním**, resp. **koncovým bodem cesty \mathbf{L}** . Jestliže je počáteční bod \mathbf{A}_1 roven koncovému bodu \mathbf{A}_k , nazýváme cestu \mathbf{L} **uzavřenou**. Množinu

$$\bigcup_{i=1}^k A_i$$

nazýváme **trajektorií** (též **nosičem**) cesty \mathbf{L} (zpravidla bývá tato trajektorie křivka). Je-li (A_1, \dots, A_k) rozklad křivky, nazýváme \mathbf{L} též **orientovanou křivkou**; tento termín budeme užívat zejména tehdy, je-li (A_1, \dots, A_k) rozklad jednoduché křivky. Pak \mathbf{L} nazýváme **jednoduchou cestou** nebo **jednoduchou orientovanou křivkou**.

Může se ovšem stát, že některé úseky cesty (tj. oblouky A_i) mají společnou část, přičemž jejich orientace může být na společném úseku shodná nebo opačná (viz obrázek 3.7). Potom vytvoření cesty sečtením orientovaných oblouků, jak ukazuje vztah 3.19, neznamená pouhé sjednocení množin A_i , ale zároveň obsahuje předpis, že trajektorie se má probíhat



Obrázek 3.7: Cesta $\mathbf{L} = \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_6$

v pořadí, jak tento součet naznačuje. Pojem cesty není geometrický pojem, má vyjádřit dynamický proces pohybu bodu.

Cestou opačnou k cestě 3.19 nazýváme cestu

$$-\mathbf{L} = (-\mathbf{A}_k) + (-\mathbf{A}_{k-1}) + \cdots + (-\mathbf{A}_1).$$

Je-li $\mathbf{L}' = \mathbf{A}'_1 + \cdots + \mathbf{A}'_j$ taková cesta, že počáteční bod \mathbf{A}'_1 je roven koncovému bodu \mathbf{A}_k , nazýváme cestu

$$\mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_k + \mathbf{A}'_1 + \cdots + \mathbf{A}'_j$$

součtem cest \mathbf{L}, \mathbf{L}' a značíme jej $\mathbf{L} + \mathbf{L}'$. **Rozdíl** $\mathbf{L} - \mathbf{L}'$ definujeme jako součet $\mathbf{L} + (-\mathbf{L}')$, pokud tento součet je cestou.

Je-li \mathbf{L} uzavřená cesta (např. kružnice orientovaná ve směru hodinových ručiček), pak má smysl tvořit např. $\mathbf{L} + \mathbf{L} = 2\mathbf{L}$, $\mathbf{L} + \mathbf{L} + \mathbf{L} = 3\mathbf{L}$ atd. (což je např. dvakrát, třikrát, ... proběhnutá kružnice).

Definice 3.7 Nechť $\mathbf{L} = \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_k$ je cesta, $\vec{\mathbf{F}}$ vektorové pole definované na trajektorii

$$\bigcup_{i=1}^k A_i.$$

Orientovaný integrál pole $\vec{\mathbf{F}}$ po cestě \mathbf{L} definujeme vzorcem

$$\int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbf{A}_i} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}, \quad (3.20)$$

existují-li integrály na pravé straně.

*Integrál 3.20 nazýváme **prací pole** $\vec{\mathbf{F}}$ po cestě \mathbf{L} . Integrál po uzavřené cestě \mathbf{L} nazýváme **cirkulaci pole** $\vec{\mathbf{F}}$ na \mathbf{L} .*

Integrál po uzavřené cestě \mathbf{L} se značí v literatuře též $\oint_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}$.

Zřejmě platí

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{L}+\mathbf{L}'} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} &= \int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} + \int_{\mathbf{L}'} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}, \\ \int_{-\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} &= - \int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}.\end{aligned}$$

Příklad 3.6 Je-li \mathbf{L} dvakrát proběhnutá kružnice

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = R^2\}$$

s počátečním bodem $(R, 0)$, je parametrizace této cesty

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (R \cos t, R \sin t), \quad t \in \langle 0, 4\pi \rangle, \\ \int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} &= \int_0^{4\pi} \vec{\mathbf{F}}(R \cos t, R \sin t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt.\end{aligned}$$

Máme-li vyjádřit tuto cestu jako součet orientovaných oblouků, lze to udělat mnoha způsoby, výsledný integrál bude vždy tentýž. Lze dokonce vyjít i z jiného bodu než z bodu $(R, 0)$ a opět dostaneme tentýž výsledek. Abychom mohli tuto situaci vyjádřit obecně, zavedeme pojem ekvivalence cest.

Definice 3.8 Řekneme, že cesty $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ jsou **ekvivalentní**, a píšeme $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{L}_2$, jestliže od cesty $\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k$ k cestě $\mathbf{L}_2 = \mathbf{A}'_1 + \dots + \mathbf{A}'_m$ lze dospět konečným počtem těchto transformací:

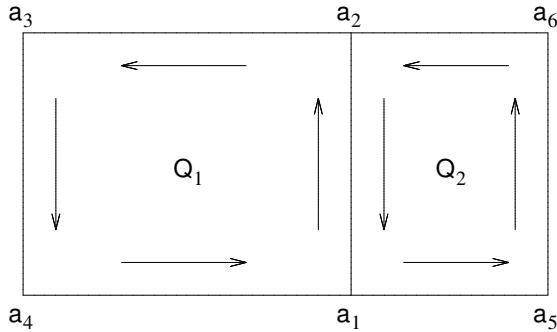
- a) záměna pořadí sčítanců (oblouků \mathbf{A}_i)
- b) vyjádření oblouku \mathbf{A}_i součtem podoblouků
- c) vyskytuje-li se v součtu oblouky $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j$ tak, že $\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j$ je orientovaný oblouk \mathbf{A} , nahrazení sčítanců $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j$ tímto obloukem
- d) odstranění sčítanců $\mathbf{A}, -\mathbf{A}$, vyskytuje-li se v součtu, nebo naopak
- e) přidání těchto sčítanců k danému součtu

Je zřejmé, že po každé z uvedených transformací se součet orientovaných integrálů nezmění.

Platí tedy:

Jestliže $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{L}_2$, pak $\int_{\mathbf{L}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathbf{L}_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}$.

Příklad 3.7 Uvažujme dvě cesty (viz obrázek):



$$\begin{aligned}\mathbf{L}_1 &= \overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{a_2a_3} + \overrightarrow{a_3a_4} + \overrightarrow{a_4a_1} \\ \mathbf{L}_2 &= \overrightarrow{a_1a_5} + \overrightarrow{a_5a_6} + \overrightarrow{a_6a_2} + \overrightarrow{a_2a_1},\end{aligned}$$

které jsou orientovanými obvody obdélníků Q_1, Q_2 . Tyto cesty lze sečíst; dostaneme tak cestu

$$\mathbf{L}_3 = \overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{a_2a_3} + \overrightarrow{a_3a_4} + \overrightarrow{a_4a_1} + \overrightarrow{a_1a_5} + \overrightarrow{a_5a_6} + \overrightarrow{a_6a_2} + \overrightarrow{a_2a_1}.$$

Tato cesta je ekvivalentní s cestou

$$\mathbf{L}_4 = \overrightarrow{a_2a_3} + \overrightarrow{a_3a_4} + \overrightarrow{a_4a_1} + \overrightarrow{a_1a_5} + \overrightarrow{a_5a_6} + \overrightarrow{a_6a_2}$$

(cesty $\overrightarrow{a_1a_2}, \overrightarrow{a_2a_1}$ se zruší) a tato cesta je opět ekvivalentní s cestou

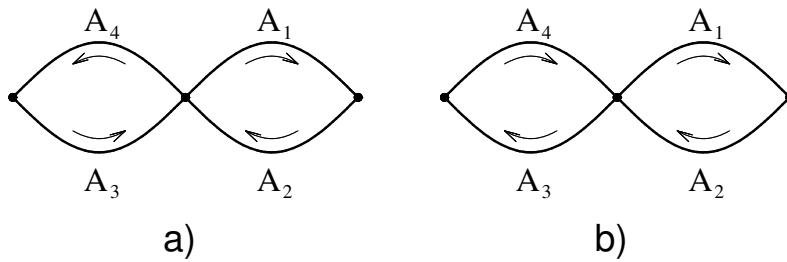
$$\mathbf{L} = \overrightarrow{a_4a_5} + \overrightarrow{a_5a_6} + \overrightarrow{a_6a_3} + \overrightarrow{a_3a_4}$$

která je orientovaným obvodem obdélníka $Q_1 \cup Q_2$. Platí tedy $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \equiv \mathbf{L}$.

Je pak

$$\int_{\mathbf{L}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} + \int_{\mathbf{L}_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = \int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}.$$

Nechť nyní C je křivka (neorientovaná) s rozkladem A_1, \dots, A_k , $C = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Každý z oblouků A_i lze orientovat dvojím způsobem; tak dostaneme řadu cest tvaru $A_1 + \dots + A_k$ (k pořadí členů nyní vzhledem k ekvivalenci nepřihlížíme). Z těchto cest budou pouze některé orientovanými křivkami, ne každé dvě pak budou spolu ekvivalentní. Jistě nebudou ekvivalentní opačně orientované křivky, avšak mohou se vyskytovat i dvojice neekvivalentních orientovaných křivek, které nebudou vzájemně opačné.

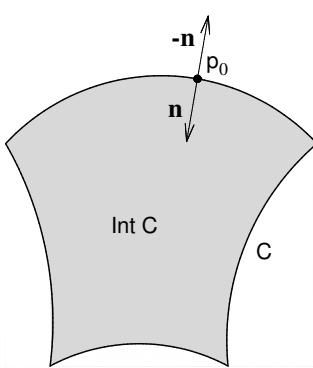


Na obrázku je vidět, jak z oblouků A_1, A_2, A_3, A_4 , které tvoří rozklad křivky, lze utvořit neekvivalentní orientované křivky, které nejsou k sobě opačné. Tato situace však nemůže nastat u **prostých křivek**. Je-li C prostá křivka s rozkladem (A_1, \dots, A_k) , pak existují

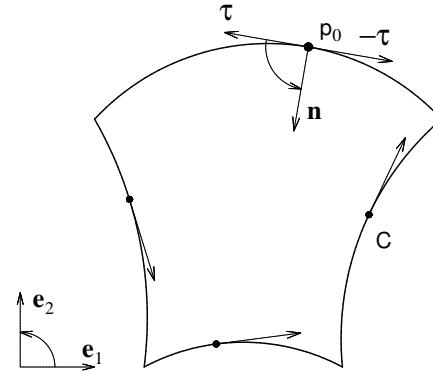
(až na ekvivalenci) právě dvě orientované křivky tvaru $A_1 + \dots + A_k$, které jsou k sobě opačné.

K orientaci jednoduché uzavřené křivky $C \subset \mathbb{R}^2$ stačí stanovit jednotkové tečné pole a k tomu stačí určit tečný vektor $\tau(p_0)$ v jednom regulárním bodě $p_0 \in C$. Tento bod je vnitřním bodem některého oblouku $A \subset C$. Tím získáme orientovaný oblouk \mathbf{A} ; tato orientace se přenese na navazující oblouk, až je orientovaná celá křivka.

Je-li p_0 regulární bod křivky C , pak v něm existují právě dva jednotkové normálové vektory, z nichž právě jeden - označme jej \mathbf{n} - „vniká“ do $\text{Int}C$ (vnitřek křivky C). Vektor \mathbf{n} nazveme **vnitřním normálovým vektorem**, opačný vektor $-\mathbf{n}$ nazveme **vnějším normálovým vektorem** (viz obr. 3.8)



Obrázek 3.8:



Obrázek 3.9:

Nyní zvolíme ze dvou jednotkových tečných vektorů křivky C v bodě p_0 vektor $\tau = \tau(p_0)$ takový, že uspořádaná dvojice (τ, \mathbf{n}) určuje tutéž orientaci roviny jako dvojice $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ standardní báze, tj. je-li $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$, pak

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 1$$

(viz obr. 3.9). Vektorem $\tau = \tau(p_0)$ je určena orientace celé křivky C . Takto orientovanou křivku \mathbf{C} nazýváme **kladně orientovanou**, o opačně orientované křivce $-\mathbf{C}$ říkáme, že je **záporně orientována**.

(Názorně řečeno, kladně orientovanou uzavřenou křivkou budeme rozumět orientaci uzavřené křivky „proti směru hodinových ručiček“, záporně orientovanou „ve směru hodinových ručiček“.)

Cvičení

Příklad 1 Vypočtěte $\int_C (x - y) dx + (x + y) dy$, kde

- a) C je úsečka \overrightarrow{AB} , $A = (2, 3)$, $B = (3, 5)$, A je počáteční a B koncový bod. $[\frac{23}{2}]$
- b) C je oblouk paraboly $y = x^2$, $A = (0, 0)$ je počáteční, $B = (2, 4)$ koncový bod. $[\frac{38}{3}]$
- c) C je oblouk paraboly $y^2 = x$, $A = (0, 0)$ je počáteční, $B = (4, 2)$ koncový bod. $[\frac{22}{3}]$

Příklad 2 Vypočtěte $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, kde C je obvod trojúhelníka ABC , $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, který je orientován pořadím vrcholů. $[0]$

Příklad 3 Vypočtěte $\int_C (x+y) dx + (x-y) dy$, kde C kladně orientovaná uzavřená křivka $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $[0]$

Příklad 4 Vypočtěte $\int_C x dx + y dy + (x+y-1) dz$, kde C je úsečka s počátečním bodem $A = (0, 0, 0)$ a koncovým bodem $B = (2, 3, 4)$. $[13]$

Příklad 5 Vypočtěte $\int_C y dx + z dy + x dz$, kde C je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, kladně orientovaná. $[\pi]$

Příklad 6 Vypočtěte práci sily 1) $\vec{F} = 3\mathbf{j}$, 2) $\vec{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ po orientované křivce C , kde C je

- a) půlkružnice $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, orientovaná od bodu $(-2, 0)$ k bodu $(2, 0)$. $[1) 0; 2) 0]$
- b) parabola $y^2 = 2(x-1)$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$, orientovaná od bodu $(1, 0)$ k bodu $(3, 2)$ $[1) 3; 2) \frac{39}{8}]$

3.4 Nezávislost orientovaného křivkového integrálu na cestě

Je známo, že v gravitačním poli práce, která se vykoná při pohybu hmotného bodu v tomto poli, nezávisí na dráze, ale pouze na počátečním a koncovém bodu. Budeme nyní formulovat problém nezávislosti práce (tj. křivkového integrálu) pole obecně.

Definice 3.9 Nechť \vec{F} je vektorové pole definované v oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že **křivkový integrál pole \vec{F} nezávisí v D na cestě**, jestliže pro libovolné cesty $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ ležící v D , které mají týž počáteční a týž koncový bod, platí

$$\int_{\mathbf{C}_1} \vec{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{C}_2} \vec{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Pole \vec{F} v takovém případě nazýváme **konzervativním** v D .

Tento název souvisí s tím, že v takovém poli platí zákon zachování energie.

Pojem nezávislosti integrálu pole na cestě lze též formulovat pomocí pojmu cirkulace pole. Jsou-li $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ dvě cesty s týmž počátečním a s týmž koncovým bodem, pak $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + (-\mathbf{C}_2) = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$ je uzavřená cesta. Naopak každou uzavřenou cestu \mathbf{C} můžeme vyjádřit jako rozdíl dvou cest s týmž počátečním a s týmž koncovým bodem. Odtud již snadno plyne:

Věta 3.4 *Křivkový integrál pole $\vec{\mathbf{F}}$ nezávisí na cestě, právě když cirkulace pole $\vec{\mathbf{F}}$ po libovolné uzavřené cestě \mathbf{C} ležící v D je nulová.*

Označení. Jestliže křivkový integrál pole $\vec{\mathbf{F}}$ nezávisí v oblasti D na cestě, pak znakem $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{s}$ označujeme křivkový integrál pole $\vec{\mathbf{F}}$ po libovolné cestě \mathbf{C} ležící v D takové, že a je počáteční, b koncový bod cesty \mathbf{C} .

Definice 3.10 *Nechť $\vec{\mathbf{F}}$ je spojité vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$. Říkáme, že $\vec{\mathbf{F}}$ je **potenciální** v D , existuje-li reálná funkce $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $\vec{\mathbf{F}} = \text{grad } f$ v D . Funkci f pak nazýváme **potenciálem** pole $\vec{\mathbf{F}}$ v D .*

Je-li f potenciál pole $\vec{\mathbf{F}}$, je zřejmě také $f + k$, kde k je libovolná konstanta, potenciál. Jsou-li f, g potenciály pole $\vec{\mathbf{F}}$ v oblasti D , pak $\text{grad}(f - g) = 0$ v D , takže $\frac{\partial(f-g)}{\partial x_i} = 0$ v D ($i = 1, \dots, n$) a odtud $f - g = k$, kde k je konstanta. Liší se tedy každé dva potenciály pole $\vec{\mathbf{F}}$ v dané oblasti o aditivní konstantu.

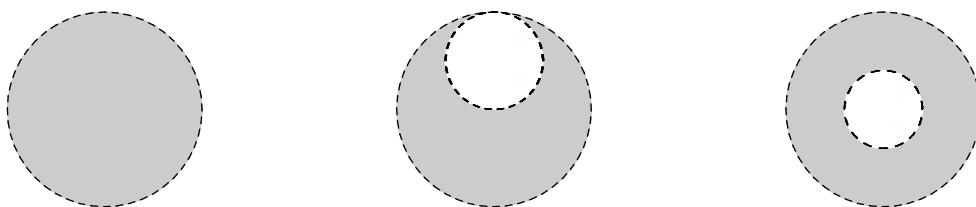
Než zformulujeme nutné a postačující podmínky nezávislosti na integrační cestě, připomeňme si některé důležité pojmy:

Množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3$) nazveme **souvislou**, jestliže libovolné dva body v Ω lze spojit křivkou γ tak, že $\gamma \subset \Omega$.

Oblastí rozumíme otevřenou a souvislou množinu.

Oblast Ω , v níž libovolnou jednoduchou uzavřenou křivku lze spojit „stáhnout“ do bodu, přičemž při této deformaci neopustíme Ω , nazveme **jednoduše souvislou oblastí**.

Na obrázku jsou znázorněny tři oblasti - první dvě jsou jednoduše souvislé, třetí ne.



Nyní můžeme zformulovat příslušnou větu.

Věta 3.5 Nechť pole $\vec{\mathbf{F}}$ je spojité na Ω .

- a) Křivkový integrál $\int_{\mathbf{C}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}$ nezávisí v Ω na integrační cestě právě tehdy, když pole $\vec{\mathbf{F}}$ je potenciální.
- b) Je-li f potenciál pole $\vec{\mathbf{F}}$, pak pro libovolnou cestu \mathbf{C} ležící v Ω s počátečním bodem p_0 a koncovým bodem p platí

$$\int_{\mathbf{C}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = f(p) - f(p_0). \quad (3.21)$$

Nyní uvedeme kritérium udávající, kdy je vektorové pole $\vec{\mathbf{F}}$ potenciální.

Věta 3.6 Nechť vektorové pole $\vec{\mathbf{F}}$ je třídy C_1 na Ω .

- a) Nutnou podmínkou k tomu, aby vektorové pole $\vec{\mathbf{F}}$ bylo potenciální, je, aby v každém bodě Ω platilo

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathbf{F}} &= \mathbf{0}, & \text{je-li } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{rot } \vec{\mathbf{F}} &= \mathbf{o}, & \text{je-li } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (3.22)$$

- b) Jestliže Ω je jednoduše souvislá oblast, pak podmínka 3.22 je postačující k tomu, aby $\vec{\mathbf{F}}$ bylo potenciální.

Příklad 3.8 Nechť $\vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Ověřme nutnou podmítku věty 3.6

$$\text{rot } \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{x}{x^2+y^2})}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{-y}{x^2+y^2})}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \underline{0}.$$

Tedy podmínka a) je splněna, přičemž jenom její platnost obecně nezaručuje, že $\vec{\mathbf{F}}$ je potenciální pole, protože podmínka b) věty 3.6 splněna není.

Lze dokonce ukázat, že pro kladně orientovanou kružnici $C \subset \Omega$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$ platí:

Je-li $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, parametrizace kružnice C , pak $\varphi'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ a

$$\begin{aligned} \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} &= \int_0^{2\pi} (\vec{\mathbf{F}} \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R \sin t}{R^2}, \frac{R \cos t}{R^2} \right) \cdot (-R \sin t, R \cos t) = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Tedy $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} \neq 0$ a integrál je závislý na integrační cestě, tudíž $\vec{\mathbf{F}}$ nemůže být potenciální.

Je-li $\vec{\mathbf{F}}$ potenciální pole na Ω , vzniká úloha, jak najít potenciál. Víme, že potenciál je určen jednoznačně, až na aditivní konstantu. Pro jeho výpočet můžeme použít vzorec 3.21, kde bod p_0 zvolíme v Ω poevně, bod p je proměnný bod z Ω a za integrační cestu můžeme vzít libovolnou orientovanou křivku v Ω spojující bod p s bodem p_0 . Je-li například Ω jednoduše souvislá množina, lze za integrální cestu zvolit úsečku.

Příklad 3.9 Ověrte, zda vektorové pole $\vec{\mathbf{F}} = (2xy, x^2 + 9y^2)$ je potenciální na \mathbb{R}^2 a stanovte potenciál f .

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + 9y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x - 2x = 0.$$

Jelikož \mathbb{R}^2 je jednoduše souvislá oblast, je $\vec{\mathbf{F}}$ potenciální.

Určeme nejdříve potenciál f užitím vzorce 3.21.

Za bod p_0 zvolme počátek, tj. $p_0 = (0, 0)$, $p = (x, y)$.

Parametrizace úsečky $\overrightarrow{p_0 p}$ je $\varphi(t) = (tx, ty)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\varphi'(t) = (x, y)$. V našem případě je vzorec 3.21 tvaru

$$\int_{\overrightarrow{p_0 p}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = f(p) - f(p_0) = f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y).$$

Tedy potenciál

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^1 (2t^2 xy, t^2 x^2 + 9t^2 y^2) \cdot (x, y) dt = \int_0^1 (2t^2 x^2 y + t^2 x^2 y + 9t^2 y^3) dt = \\ &= (3x^2 y + 9y^3) \cdot \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} (3x^2 y + 9y^3) = x^2 y + 3y^3. \end{aligned}$$

Každý potenciál je tedy tvaru $x^2 y + 3y^3 + C$.

Potenciál můžeme též určit řešením rovnice

$$\vec{\mathbf{F}} = \operatorname{grad} f$$

$$(F_1, F_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \text{ tedy } F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \text{ tj.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 9y^2$$

Z první rovnice plyne

$$f(x, y) = \int 2xy dx = x^2 y + g(y) \tag{3.23}$$

Dosazením do druhé rovnice dostaneme pro neznámou funkci $g(y)$

$$x^2 + g'(y) = x^2 + 9y^2 \Rightarrow g'(y) = 9y^2 \Rightarrow g(y) = \int 9y^2 dy = 3y^3 + C$$

Dosadíme-li za $g(y)$ do 3.23, potenciál f je pak tvaru $f(x, y) = x^2 y + 3y^3 + C$.

Příklad 3.10 Ověřte, zda vektorové pole $\vec{\mathbf{F}} = (\frac{1}{y} + yz)\mathbf{i} + (xz - \frac{x}{y^2})\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$ je potenciální na oblasti $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$ a stanovte potenciál f .

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{y} + yz & xz - \frac{x}{y^2} & xy + 2z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}(xz - \frac{x}{y^2}) \right) \mathbf{i} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{y} + yz) \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(xz - \frac{x}{y^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y} + yz) \right) \mathbf{k} = \\ &= (x - x)\mathbf{i} - (y - y)\mathbf{j} + (z - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} - z)\mathbf{k} = \mathbf{o}\end{aligned}$$

Jelikož $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{o}$ a Ω je jednoduše souvislá oblast, je pole $\vec{\mathbf{F}}$ potenciální a tudíž potenciál f existuje. Platí tedy

$$\operatorname{grad} f = \vec{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (F_1, F_2, F_3) \quad \text{tj.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - \frac{x}{y^2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + 2z$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int \left(\frac{1}{y} + yz \right) dx = \frac{x}{y} + xyz + g(y, z) \quad (3.24)$$

Dosazením tohoto výsledku do druhé rovnice dostaneme pro neznámou funkci $g(y, z)$

$$-\frac{x}{y^2} + xz + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + xz \Rightarrow \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y, z) = \int 0 dy = h(z).$$

Dosadíme-li tento vztah do 3.24, tak platí

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y} + xyz + h(z) \quad (3.25)$$

Dosazením tohoto výsledku do třetí rovnice dostaneme pro $h(z)$

$$xy + h'(z) = xy + 2z \Rightarrow h'(z) = 2z \Rightarrow h(z) = \int 2z dz = z^2 + C.$$

Celkově $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + xyz + z^2 + C$.

Cvičení

Příklad 1 Ukažte, že křivkový integrál vektorového pole \vec{F} je nezávislý na integrační cestě a stanovte jeho hodnotu přes křivku s počátečním bodem A a koncovým bodem B.

a) $\vec{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $A = (0, 1)$, $B = (3, -4)$. [12]

b) $\vec{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$. [4]

c) $\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2}, -\frac{1}{x}\right)$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $A = (2, 1)$, $B = (1, 2)$. $[-\frac{3}{2}]$

d) $\vec{F} = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k}$, $\Omega = \mathbb{R}^3$, $A = (1, -2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$. $[\frac{169}{3}]$

e) $\vec{F} = \left(\frac{a}{y}, -\frac{ax+by}{y^2}, \frac{b}{z}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z > 0\}$,
 $A = (0, 1, 1)$, $B = (-1, 1, 3)$. $[-\frac{3}{2}]$

Příklad 2 Ukažte, že vektorové pole \vec{F} je potenciální a najděte jeho potenciál f.

a) $\vec{F} = z\mathbf{i} + (y^2 + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$, $\Omega = \mathbb{R}^3$. $[f(x, y, z) = xz + \frac{y^3}{3} + yz + C]$

b) $\vec{F} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\Omega = \mathbb{R}^3$. $[f(x, y, z) = 3x - 4y + z + C]$

c) $\vec{F} = (3x^2y^2 - 2z^4)\mathbf{i} + 2x^3y\mathbf{j} - 8xz^3\mathbf{k}$, $\Omega = \mathbb{R}^3$. $[f(x, y, z) = x^3y^2 - 2xz^4 + C]$

3.5 Greenova věta

V tomto odstavci zformulujeme základní větu rovinné vektorové analýzy, která charakterizuje vztah orientovaného křivkového integrálu a dvojnitého integrálu v případě tzv. regulérních oblastí:

Definice 3.11 Ohraničenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ nazveme **regulární oblastí**, je-li její hranice disjunktním sjednocením končeného počtu jednoduchých uzavřených křivek. Je-li těchto křivek $k \geq 1$, hovoříme o **k-násobně souvislém oblasti** (je-li $k = 1$, o jednoduše souvislé oblasti).

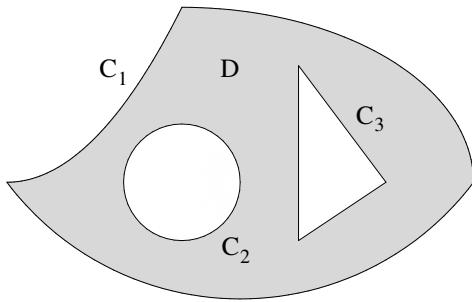
Uzávěr $D = \overline{G}$ nazveme **uzavřenou regulární oblastí**.

Je-li $k \geq 2$, nazýváme hraniční křivku C_1 takovou, že $D^0 \subset \text{Int } C_1$, **vnější**, ostatní hraniční křivky C_1, \dots, C_k nazýváme **vnitřními**.

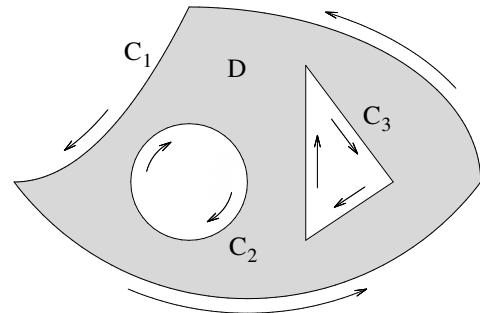
Hranici oblasti D označíme ∂D (hranici množiny D jsme značili hD , symbolem ∂D chceme zdůraznit, že hranice má speciální tvar).

Na obrázku 3.10 je příklad trojnásobně souvislé oblasti.

Nechť D je uzavřená regulární oblast v \mathbb{R}^2 , jejíž hranice ∂D je tvořena jednoduchou uzavřenou křivkou C . **Kladně orientovanou hranicí** ∂D pak nazveme kladně orientovanou křivku C .



Obrázek 3.10: Trojnásobně souvislá oblast.



Obrázek 3.11: Kladně orientovaná hranice trojnásobně souvislé oblasti.

Je-li hranice ∂D tvořena uzavřenými křivkami C_1, C_2, \dots, C_k , z nichž C_1 je vnější a C_2, \dots, C_k vnitřní, budeme kladně orientovanou hranici ∂D rozumět kladně orientovanou křivku C_1 a záporně orientované křivky C_2, \dots, C_k (viz obr. 3.11).

Symbolicky píšeme

$$\partial D = C_1 + C_2 + \dots + C_k$$

a definujeme integrál pole \vec{F} po orientované hranici ∂D jako

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \dots + \int_{C_k} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Věta 3.7 (Greenova) Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je regulární uzavřená oblast, ∂D kladně orientovaná hranice oblasti D . Nechť $\vec{F} = (F_1, F_2)$ je vektorové pole třídy C_1 na D , pak platí

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \, d\nu_2$$

neboli ve složkovém tvaru

$$\oint_{\partial D} F_1 \, dx + F_2 \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

Příklad 3.11 Vypočtěte cirkulaci vektorového pole $\vec{F} = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ podél kladně orientované kružnice C se středem v počátku a poloměrem $r > 0$.

Jelikož předpoklady věty jsou splněny, platí

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \oint_C -x^2y \, dx + xy^2 \, dy = \iint_D (y^2 + x^2) \, dx \, dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \quad , \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y = \rho \sin \varphi \quad \rho \in \langle 0, r \rangle \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho^3 \, d\rho \right) \, d\varphi = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi r^4}}. \end{aligned}$$

Uvedeme si nyní důsledek Greenovy věty:

Zvolíme-li vektorové pole $\vec{F} = \frac{1}{2}(-y, x)$, dostáváme $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$,

a tudíž $\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy = \nu_2(D)$.

Platí tedy:

Obsah regulární oblasti D s kladně orientovanou hranicí ∂D se vypočte dle vzorce

$$\nu_2(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} -y dx + x dy.$$

Cvičení

Vypočtěte cirkulaci vektorového pole \vec{F} podél kladně orientované křivky C , jestliže

Příklad 1 $\vec{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + (x - y^2)\mathbf{j}$,

C je hranice oblasti $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4\}$. [64]

Příklad 2 $\vec{F} = (x - y)\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, C je hranice čtverce o stranách $x = \pm 2, y = \pm 2$. [16]

Příklad 3 $\vec{F} = (y - x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, C je půlkružnice $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$ a úsečka spojující body $(-2, 0), (2, 0)$. [-2π]

Příklad 4 $\vec{F} = 2y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, C je hranice trojúhelníka o vrcholech $(-3, 0), (3, 0), (0, 3)$. [-18]

Příklad 5 $\vec{F} = 3xy\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$, $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, kde

C_1 je $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \leq 0$

C_2 je úsečka spojující body $(1, 0), (1, 1)$

C_3 je úsečka spojující body $(0, 0), (1, 1)$

C_4 je úsečka spojující body $(0, 0), (0, -1)$. [-2]

3.6 Plochy v \mathbb{R}^3

Při definici po částech hladké plochy budeme postupovat obdobně jako u křivek. Nejdříve se omezíme na hladké kusy ploch s okrajem, které nazveme „listy“ a jež budou dvourozměrnou analogií hladkých oblouků, další plochy z nich dostaneme „slepováním“.

Můžeme si představit, že hladký kus plochy s okrajem vznikne pružnou deformací rovinné elastické destičky. Pro popis takové plochy se hodí parametrický popis

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(u, v) \\ y &= \Phi_2(u, v) \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z &= \Phi_3(u, v) \end{aligned} \tag{3.26}$$

kde zobrazení $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ má vhodné vlastnosti. Chceme-li přitom dostat plochu s po částech hladkým okrajem, je třeba uvažovat i toto zobrazení na hranici oblasti D , přičemž hranice musí být po částech hladkou křivkou nebo sjednocením takových křivek.

Definice 3.12 Zobrazení $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ nazveme **regulárním** na D , je-li třídy C_1 na D a Jacobiova matice

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

má hodnost 2 na D .

Definice 3.13 Množinu $B \subset \mathbb{R}^3$ nazveme **kusem hladké plochy** nebo krátce **listem**, existuje-li prosté regulární zobrazení

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

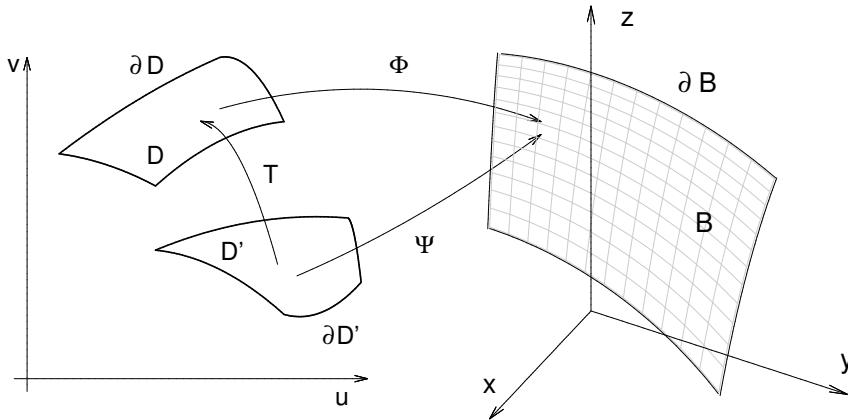
kde $D \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená regulární oblast, takové, že $\Phi(D) = B$.

Zobrazení Φ nazýváme (regulární) **parametrizací listu** B , rovnice 3.26 **parametrickými rovnicemi listu** B , proměnné u, v **parametry** a oblast D **oborem parametrů**.

Množinu $\Phi(\partial D)$ nazýváme **okrajem listu** B a značíme ∂B , množinu $B^0 = B \setminus \partial B$ **vnitřkem listu** B (nejde o vnitřek v \mathbb{R}^3 , ten je \emptyset).

Okraj listu je jednoduchá uzavřená křivka (je-li D jednoduše souvislá oblast) nebo disjunktní sjednocení konečného počtu takových křivek (je-li D vícenásobně souvislá).

Nechť $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace listu B a nechť $\mathbf{T} : D' \rightarrow D$ je prosté regulární zobrazení uzavřené regulární oblasti $D' \subset \mathbb{R}^2$ na uzavřenou regulární oblast $D \subset \mathbb{R}^2$ (takové zobrazení budeme dále nazývat **transformací parametrů**). Pak složené zobrazení $\Psi = \Phi \circ \mathbf{T} : D' \rightarrow \mathbb{R}^3$ je rovněž parametrizací listu B . Říkáme, že **parametrizace** Ψ vznikla z parametrizace Φ transformací parametrů \mathbf{T} . Tuto situaci ukazuje obrázek.



Má-li transformace \mathbf{T} kladný Jacobiův determinant, nazývají se parametrizace Ψ, Φ **souhlasné**, v opačném případě (tj. determinant je záporný) **nesouhlasné**.

List má zřejmě nekonečně mnoho (regulárních) parametrizací. Zvolíme-li jednu z nich, pak každou další parametrizaci dostaneme vhodnou transformací parametrů.

Definice 3.14 Nechť B je list. Spojité vektorové pole $\vec{\nu} : B \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$ takové, že pro každý bod $p \in B$ je $\vec{\nu}(p)$ jednotkový normálový vektor listu B v bodě p , se nazývá **orientace listu B** . Dvojici $(B, \vec{\nu})$ nazýváme **orientovaným listem**, dvojici $(B, -\vec{\nu})$ **opačně orientovaným listem** k $(B, \vec{\nu})$. Označíme-li orientovaný list $(B, \vec{\nu})$ znakem \mathbf{B} , označíme $(B, -\vec{\nu})$ znakem $-\mathbf{B}$.

Každý list má právě dvě orientace, jež jsou opačné.

Zvolíme-li jednu z nich, říkáme, že jsme na B zvolili **stranu plochy**; list má tedy dvě strany - je „**dvoustranný**“ (to u některých jiných ploch neplatí).

Je-li $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizace listu B , $p = \Phi(u, v) \in B$, určují vektory $\frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial v}$ tečnou rovinu v bodě p , takže jednotkové normálové vektory k ploše B v bodě p jsou vektory

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)(u, v)}{\left| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)(u, v) \right|}, \quad -\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)(u, v)}{\left| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)(u, v) \right|}.$$

Zvolíme-li orientaci B pomocí prvního vektoru, tj. definujeme-li orientaci $\vec{\nu}$ vztahem

$$\vec{\nu}(p) = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)(\Phi^{-1}(p))}{\left| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)(\Phi^{-1}(p)) \right|}, \quad p \in B, \quad (3.27)$$

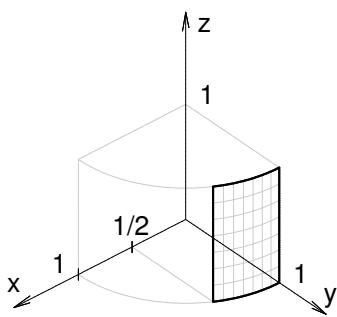
říkáme, že **orientace $\vec{\nu}$ je dána (indukována) parametrizací Φ** nebo také že Φ souhlasí s orientací $\vec{\nu}$ (je-li $\vec{\nu}$ dáno a priori).

Platí toto tvrzení:

Souhlasné parametrizace listu dávají tutéž orientaci, nesouhlasné parametrizace dávají opačné orientace.

Příklad 3.12 Uvažujme část válcové plochy

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$$



B lze parametrizovat například takto:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad x &= u \\ y &= \sqrt{1-u^2} \quad (u, v) \in D = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \\ z &= v \end{aligned}$$

Parametrizace $\Phi(u, v) = (u, \sqrt{1-u^2}, v)$ je prostým regulárním zobrazením. Určíme orientaci $\vec{\nu}$ indukovanou parametrizací Φ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \left(1, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, 0 \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 0, 1), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, -1, 0 \right), \\ \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} &= \frac{\left(\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}, -1, 0 \right)}{\sqrt{\frac{u^2}{1-u^2} + 1}} = (-u, -\sqrt{1-u^2}, 0). \end{aligned}$$

Je tedy orientace listu B indukovaná parametrizací Φ

$$\vec{\nu}(x, y, z) = (-x, -y, 0) \quad [u = x, \sqrt{1 - u^2} = y].$$

Normálové vektory směřují k ose z , jde tudiž o stranu plochy přivrácenou k rovině xz .

Daný list lze parametrizovat také např. parametrizací

$$\Psi(t, s) = (\cos t, \sin t, s), \quad (t, s) \in D' = \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \langle 0, 1 \rangle.$$

Tuto parametrizaci dostaneme z Φ transformací parametrů $\mathbf{T}(t, s) = (T_1(t, s), T_2(t, s)) = (\cos t, s)$, která je prostým regulárním zobrazením D' na D . Jacobiův determinant

$$\mathbf{DT} = \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial t} & \frac{\partial T_1}{\partial s} \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} & \frac{\partial T_2}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sin t$$

je v každém bodě $(t, s) \in D'$ záporný; parametrizace Φ, Ψ jsou nesouhlasné.

Pro parametrizaci Ψ dostaneme

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-\sin t, \cos t, 0), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s} = (0, 0, 1), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \times \frac{\partial \Psi}{\partial s} = (\cos t, \sin t, 0) = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial t} \times \frac{\partial \Psi}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \times \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|}.$$

Je tedy orientace listu B indukovaná parametrizací Ψ

$$\vec{\nu}_1(x, y, z) = (x, y, 0) \quad [\cos t = x, \sin t = y];$$

tedy $\vec{\nu}_1 = -\vec{\nu}$, což souhlasí s tím, že parametrizace Φ, Ψ jsou nesouhlasné.

Nechť nyní $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce třídy C_1 na uzavřené regulární oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$, pak graf funkce f vzhledem k rovině xy :

$$B_{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

je list. Parametrizaci B_{xy} dostaneme, zvolíme-li x, y za parametry: $x = u, y = v, z = f(u, v)$, tj. $\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)) = (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in D$. Je pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}), & \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right), & \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} &= \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Orientace listu B_{xy} určená touto parametrizací je „horní strana“ grafu B_{xy} , tj. normálový vektor svírá s osou z ostrý úhel. Také množiny

$$\begin{aligned} B_{yz} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, x = f(y, z)\} \quad (\text{graf } f \text{ vzhledem k rovině } yz) \\ B_{zx} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z, x) \in D, y = f(z, x)\} \quad (\text{graf } f \text{ vzhledem k rovině } zx) \end{aligned}$$

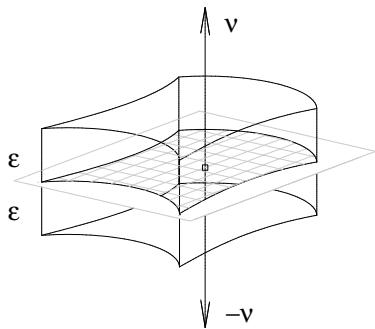
jsou listy.

Dá se ukázat (pomocí věty o implicitních funkcích), že každý list je v jistém okolí každého svého bodu jednou z ploch typu B_{xy}, B_{yz}, B_{zx} .

Obsah listu

List je jakousi dvourozměrnou analogií oblouku. Při zavádění pojmu délky oblouku jsme vpisovali do oblouku lomené čáry a délkou oblouku jsme nazvali limitu délek těchto lomených čar, když strany lomených čar konvergovaly k nule.

Kdybychom chtěli postupovat u ploch analogicky, vpisovali bychom do dané plochy polyedrické plochy, tj. plochy, které jsou složeny z mnohoúhelníků (např. z trojúhelníků) a jejichž obsah definujeme jako v elementární geometrii, a za obsah dané plochy bychom považovali limitu obsahů těchto polyedrických ploch, když průměry mnohoúhelníků konvergují k nule. Jak ukázal koncem 19. století H. A. Schwarz (viz [?]), není tento postup vhodný a nemusí dát rozumný výsledek ani u tak jednoduché plochy, jako je plášť rotačního válce. Je tedy nutné zvolit jiný postup. Takových postupů je několik. Zde zvolíme ten, který se opírá o pojem objemu, který již máme definován.



Požadujeme, aby obsah plochy měl vlastnosti míry a aby obsah rovinné plochy byl stejný jako její dvourozměrná míra ν_2 . Máme-li rovinný list B a posuneme-li jej o $\varepsilon > 0$ ve směru normálového vektoru $\vec{\nu}$ a o ε ve směru vektoru $-\vec{\nu}$, dostaneme vrstvu B_ε tloušťky 2ε (viz obrázek). Označíme-li $\omega(B)$ obsah plochy B a $\nu_3(B_\varepsilon)$ objem vrstvy B_ε , pak zřejmě $\nu_3(B_\varepsilon) = 2\varepsilon\omega(B)$, tedy $\omega(B) = \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon}$.

Nechť nyní list B není rovinný. Opět jej budeme „posouvat“ tak, že v každém bodě $p \in B$ jej posuneme o ε ve směru jednotkového normálového vektoru $\vec{\nu}(p)$ a o ε ve směru jednotkového normálového vektoru $-\vec{\nu}(p)$ (předpokládáme, že na B jsme zvolili některé spojité normálové pole $\vec{\nu}$), přitom $\varepsilon > 0$ nechť je dostatečně malé číslo. Dostaneme tak opět tenkou vrstvu B_ε , v níž B je jakýmsi „středním řezem“. Podíl $\frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon}$ bude tím lépe approximovat obsah plochy B , čím bude ε menší.

Definujme proto obsah listu B takto:

$$\omega(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon},$$

přitom $B_\varepsilon = \{p + t\vec{\nu}(p) : p \in B, t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle\}$.

Ukažme si na známém příkladě kulové plochy, že dostaneme tentýž výsledek, který se uvádí v elementární geometrii.

Je-li B kulová plocha poloměru R se středem $a \in \mathbb{R}^3$, pak $B_\varepsilon = K_{R+\varepsilon} - K_{R-\varepsilon}$, kde K_r je koule se středem a o poloměru r . Objem koule máme přesně definován (pomocí trojného integrálu), je $\nu_3(K_r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Tedy

$$\begin{aligned} \nu_3(B_\varepsilon) &= \nu_3(K_{R+\varepsilon}) - \nu_3(K_{R-\varepsilon}) = \frac{4}{3}\pi ((R+\varepsilon)^3 - (R-\varepsilon)^3) = \\ &= \frac{4}{3}\pi (6R^2\varepsilon + 2\varepsilon^3) = \frac{8}{3}\pi(3R^2\varepsilon + \varepsilon^3). \end{aligned}$$

Tedy

$$\omega(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{8}{3}\pi(3R^2\varepsilon + \varepsilon^3)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (4\pi R^2 + \frac{4\pi}{3}\varepsilon^2) = 4\pi R^2,$$

což souhlasí se známým vzorcem pro obsah kulové plochy.

Věta 3.8 Nechť $B \subset \mathbb{R}^3$ je list, bud' $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ jeho parametrizace. Pak pro obsah $\omega(B)$ listu B platí:

$$\omega(B) = \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv. \quad (3.28)$$

Máme tedy ukázat, že

$$\omega(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon} = \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv.$$

Odvození si pouze naznačíme:

$$B_\varepsilon = \{p + t\vec{\nu}(p) : p \in B, t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle\} = \{\Phi(u, v) + t \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} : (u, v) \in D, t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle\}.$$

Označme $\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} = \vec{n}(u, v) = (n_1(u, v), n_2(u, v), n_3(u, v))$.

Je tedy

$$B_\varepsilon = \{(\Phi_1(u, v) + t \cdot n_1(u, v), \Phi_2(u, v) + t \cdot n_2(u, v), \Phi_3(u, v) + t \cdot n_3(u, v)) : (u, v) \in D, t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle\}.$$

Definujme zobrazení $G : D \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$G(u, v, t) = (\Phi_1(u, v) + t \cdot n_1(u, v), \Phi_2(u, v) + t \cdot n_2(u, v), \Phi_3(u, v) + t \cdot n_3(u, v)).$$

Zobrazení G je třídy C_1 a platí $G(D \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle) = B_\varepsilon$.

Jakobián DG je pak tvaru

$$DG = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + t \frac{\partial n_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + t \frac{\partial n_1}{\partial v} & n_1(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + t \frac{\partial n_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + t \frac{\partial n_2}{\partial v} & n_2(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} + t \frac{\partial n_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} + t \frac{\partial n_3}{\partial v} & n_3(u, v) \end{vmatrix}$$

Tento determinant se dá vyjádřit podle součtové věty jako součet čtyř determinantů, ze tří se dá vytknout t , dostaneme tak

$$DG = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} & n_1(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & n_2(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} & n_3(u, v) \end{vmatrix} + t \cdot f(u, v, t),$$

kde $f(u, v, t)$ je hodnota zbývajících tří determinantů a je spojitá a ohraničená. Rozvinutím uvedeného determinantu podle třetího sloupce dostaváme

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| > 0.$$

je tedy Jakobián $DG = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| + t \cdot f$.

Podle věty o transformaci trojného integrálu platí

$$\begin{aligned} \nu_3(B_\varepsilon) &= \iiint_{B_\varepsilon} dx dy dz = \iiint_{D \times (-\varepsilon, \varepsilon)} |DG| dudvdz = \\ &= \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt + \rho = 2\varepsilon \cdot \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv + \rho, \end{aligned}$$

$$\text{kde } \rho = \iint_D \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t \cdot f(u, v, t) dt \right) dudv.$$

$$\text{Je tedy } \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon} = \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv + \frac{\rho}{2\varepsilon}.$$

Jelikož f je spojitá a ohraničená, tj. $|f| \leq K$, tak platí

$$|\rho| \leq \iint_D \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |t \cdot f(u, v, t)| dt \right) dudv \leq \iint_D dudv \cdot K \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |t| dt = K \cdot \nu_2(D) \cdot \varepsilon^2,$$

takže $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\rho}{2\varepsilon} = 0$. Odtud

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon} = \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv.$$

Je-li list B grafem funkce $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $g \in C_1(D)$, a zvolíme-li parametrizaci $\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$, pak

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial v}, -\frac{\partial g}{\partial u}, 1 \right) \Rightarrow \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)^2}.$$

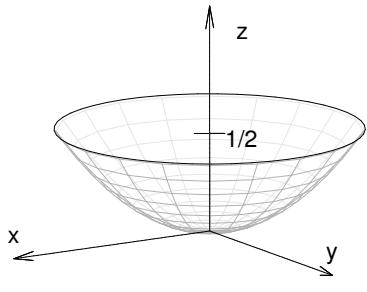
V tomto případě pro obsah listu B platí

$$\omega(B) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

(místo proměnných u, v můžeme psát opět x, y).

Příklad 3.13 Vypočtěte obsah části rotačního paraboloidu

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2 + y^2}{2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

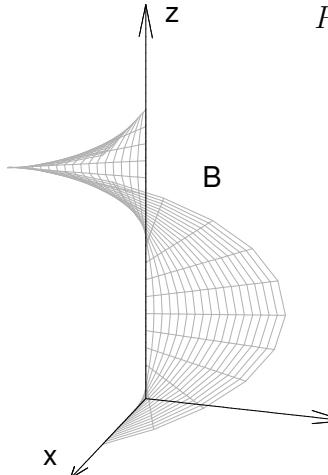


Jde o graf funkce $g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$, D je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$ a platí

$$\begin{aligned}\omega(B) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y = \rho \sin \varphi \quad \rho \in \langle 0, 1 \rangle \end{array} \right| =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1+\rho^2} \, d\varphi \right) \, d\rho = 2\pi \cdot \int_0^1 \rho \sqrt{1+\rho^2} \, d\rho = \left| \begin{array}{l} 1+\rho^2 = t \\ 2\rho \, d\rho = dt \end{array} \right| = \\ &= \pi \cdot \int_1^2 \sqrt{t} \, dt = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

Příklad 3.14 Vypočtěte obsah části B šroubové plochy o parametrických rovnicích $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$ nacházející se ve válci $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 4\pi$.



Parametrizace listu B má tvar

$$\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad \text{kde } (u, v) \in \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u),$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{u^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned}\omega(B) &= \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \, du \, dv = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{u^2 + 1} \, dv \right) \, du = \\ &= 2\pi \cdot \int_0^2 \sqrt{u^2 + 1} \, du = 2\pi \cdot \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right).\end{aligned}$$

Nechť nyní $\Phi = \Phi(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Psi = \Psi(s, t) : D' \rightarrow \mathbb{R}^3$ jsou parametrisace listu $B \subset \mathbb{R}^3$. Pak platí

$$\iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du dv = \iint_{D'} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right| ds dt,$$

což značí, že obsah listu nezávisí na jeho parametrisaci.

Listy jsou nejjednodušší dvourozměrné útvary v \mathbb{R}^3 . Složitější dvourozměrné útvary lze tvořit spojováním listů. Při studiu následující definice nechť si čtenář představí např. povrch jehlanu; listy, které tento povrch tvoří, jsou stěny jehlanu.

Definice 3.15 Souvislou množinu $S \subset \mathbb{R}^3$ nazveme (*po částech hladkou*) **plochou**, existuje-li takový konečný systém listů

$$\{B_1, \dots, B_m\}, \quad (3.29)$$

že platí:

- (1) $S = B_1 \cup \dots \cup B_m$,
- (2) je-li $i \neq j$, je $B_i \cap B_j \subset \partial B_i \cap \partial B_j$ a $B_i \cap B_j$ oblouk, nebo množina prázdná nebo jednobodová,
- (3) je-li $i \neq j \neq k \neq i$, je $B_i \cap B_j \cap B_k$ bud' množina prázdná, nebo jednobodová.

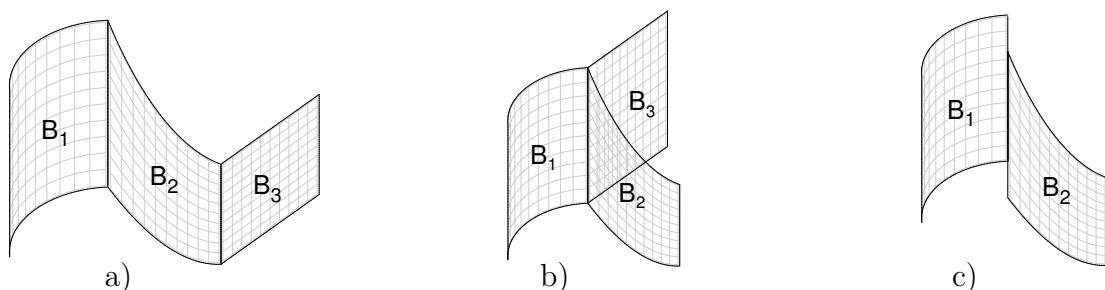
Systém 3.29 nazýváme **rozkladem plochy S na listy**.

Jestliže ke každému bodu $p \in S$ existuje okolí $U(p)$ tak, že $B = \overline{U(p)} \cap S$ je list (a tedy na B existuje spojité normálové pole), říkáme, že plocha S je **hladká**.

Je-li $B_i \cap B_j$ oblouk, říkáme, že listy B_i, B_j jsou **přilehlé (podél tohoto oblouku)**.

Krajním obloukem plochy S nazveme oblouk, který je částí okraje právě jednoho listu rozkladu plochy S . Nemá-li plocha S krajní oblouky, nazývá se **uzavřená**.

Uzavřená plocha nemá okraj. Není-li S uzavřená plocha, nazývá se sjednocení všech krajních oblouků **okraj plochy S**, označíme jej ∂S . Množina ∂S je uzavřenou křivkou nebo sjednocením konečného počtu uzavřených křivek.



Na obrázku a) je příklad množiny, která je po částech hladkou plochou, b) je příklad množiny, která není plochou, c) jsou přilehlé listy B_1, B_2 podél oblouku $B_1 \cap B_2$.

Bod $p \in S$ se nazývá **regulární bod plochy** S , existuje-li otevřené okolí $U(p)$ v \mathbb{R}^3 tak, že $\overline{U(p)} \cap S$ je list; v opačném případě se bod p nazývá **singulární bod plochy** S .

Hladká plocha nemá singulární body. Množina singulárních bodů plochy S o rozkladu 3.29 je podmnožinou množiny $\bigcup_{i=1}^m \partial B_i$ a u plochy, která není hladká, ji tvoří křivky nebo izolované body (představte si např. povrch kužele).

Na ploše S můžeme definovat plošnou míru ω pomocí plošné míry na listech.

Řekneme, že množina $M \subset S$ je **měřitelná** na S , jestliže pro každý list $B \subset S$ je množina $M \cap B$ měřitelná na listu B .

Řekneme, že množina $M \subset S$ je **nulová** (nebo že **má plošnou míru 0**), jestliže pro každý list $B \subset S$ má množina $M \cap B$ plošnou míru 0, píšeme $\omega(M) = 0$.

Platí: $M \subset S$ má plošnou míru 0, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný systém listů $\{L_1, \dots, L_r\}$, $L_i \subset S$ ($i = 1, \dots, r$) tak, že

$$M \subset \bigcup_{i=1}^r L_i \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^r \omega(L_i) < \varepsilon.$$

Jestliže $\omega(M) = 0$ a $N \subset M$, pak $\omega(N) = 0$.

Každá křivka má plošnou míru 0.

Sjednocení konečného počtu křivek má plošnou míru 0. Odtud plyne, že **množina singulárních bodů má plošnou míru 0**.

Jsou-li $B_1, \dots, B_r \subset S$ listy, $M \subset \bigcup_{i=1}^r B_i$ a je-li každá množina $M \cap B_i$ ($i = 1, \dots, r$) měřitelná, pak M je měřitelná, neboť $M = \bigcup_{i=1}^r (B_i \cap M)$ a vpravo je sjednocení měřitelných množin.

Je-li M měřitelná množina na S a je-li 3.29 rozklad plochy S , definujeme **plošnou míru množiny M** vzorcem

$$\omega(M) = \sum_{i=1}^m \omega(M \cap B_i).$$

Speciálně S je měřitelná a

$$\omega(S) = \sum_{i=1}^m \omega(B_i).$$

Dá se dokázat (viz [?]), že číslo $\omega(S)$ nezávisí na rozkladu plochy S na listy.

Z praktického hlediska je užitečné poněkud zobecnit pojem parametrizace z definice listu, aby se i některé jiné plochy než listy daly popsat parametricky.

Definice 3.16 Nechť S je plocha. **Parametrizací plochy** S nazveme spojité zobrazení $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ (kde D je regulární uzavřená oblast v \mathbb{R}^2) takové, že $\Phi(D) = S$ a existuje rozdělení oblasti D na regulární uzavřené oblasti D_1, \dots, D_m tak, že platí

(1) Φ je prosté regulární zobrazení na $G = \bigcup_{i=1}^m D_i^0$,

(2) Φ zobrazuje $\bigcup_{i=1}^m \partial D_i$ na množinu $C \subset S$, která je disjunktní s $\Phi(G)$ a je sjednocením konečného počtu po částech hladkých křivek.

To znamená, že předpoklady prostého zobrazení a regularity parametrizace Φ mohou být porušeny na konečném počtu křivek, tedy na nulové množině, která nebude mít vliv na hodnotu integrálu přes danou plochu.

U některých ploch, jako je např. povrch mnohostěnu, pláště jehlanu apod., je lépe rozložit tyto plochy na listy (ve jmenovaných případech na mnohoúhelníky) a tyto listy parametrizovat zvláště. U jiných ploch, jako je např. kulová plocha, anuloid („pneumatika“) aj., lze pochopitelně udělat totéž, bylo by to však zbytečně komplikované.

Příklad 3.15 Kulová plocha S se středem v počátku a poloměrem R ,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

se dá rozložit na listy různým způsobem.

Jedna možnost rozkladu plochy S na listy je tato: Do vnitřku kulové plochy S umístíme krychli se středem v počátku O a pak každou stěnu krychle promítneme z O na S .

Avšak danou kulovou plochu S můžeme popsat parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= R \cos u \sin v \\ y &= R \sin u \sin v \\ z &= R \cos v, \end{aligned}$$

kde $(u, v) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$ (u, v jsou sférické souřadnice). Parametrizace

$$\Phi(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v) : \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$$

je sice dokonce třídy C_∞ , je však prostá a regulární pouze na vnitřku obdélníku $D = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$. Snadno spočítáme, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= -R^2 \sin v (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), \\ \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| &= R^2 \sin v, \end{aligned}$$

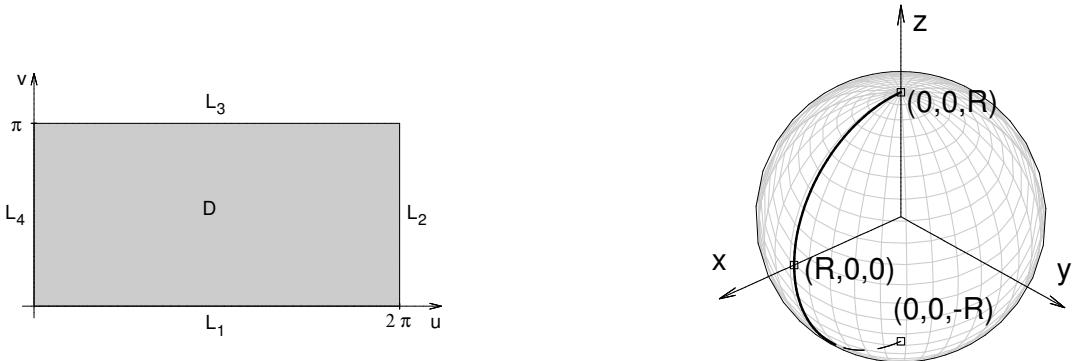
takže právě jen pro $v \in (0, \pi)$ je $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq 0$. Vadí nám tedy body, pro něž $v = 0, v = \pi$, tj. body $(0, 0, R), (0, 0, -R)$; parametrizace Φ není prosté zobrazení pro $u = 0, u = 2\pi$. Předpoklady prostého a regulárního zobrazení Φ jsou porušeny na hranici ∂D . Hranice

$$\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4,$$

kde

$$\begin{aligned} L_1 &= \langle 1, 2\pi \rangle \times \{0\}, & L_3 &= \langle 0, 2\pi \rangle \times \{\pi\}, \\ L_2 &= \{2\pi\} \times \langle 0, \pi \rangle, & L_4 &= \{0\} \times \langle 0, \pi \rangle, \end{aligned}$$

se zobrazí zobrazením Φ na polokružnici $C \subset S$ s krajními body $(0, 0, -R)$, $(0, 0, R)$ procházející bodem $(R, 0, 0)$. Přitom $\Phi(D^0) = S - C$. Vyhovuje tedy Φ definici 3.16 (viz obrázky).



Označíme-li $\mathcal{E}(S)$ množinu všech stupňovitých funkcí na S , má $\mathcal{E}(S)$ a integrál funkcí z $\mathcal{E}(S)$ tytéž základní vlastnosti jako v případě neorientovaného křivkového integrálu z těchto funkcí.

Analogickým způsobem pak definujeme množiny $\bar{\mathcal{E}}(S)$, $\bar{\mathcal{L}}(S)$, $\mathcal{L}(S)$ a postupně rozšíříme integrál stupňovitých funkcí na integrál funkcí z těchto množin limitním procesem a odčítáním. Takto vybudovaný integrál nazveme **neorientovaným plošným integrálem na S** .

Integrál funkce $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ přes množinu $M \subset S$ definujeme vztahem

$$\iint_M f \, dS = \iint_S f \chi_M \, dS,$$

existuje-li integrál vpravo (χ_M je charakteristická funkce množiny M).

Plošný integrál úzce souvisí s dvojným integrálem. Jelikož rovinu \mathbb{R}^2 můžeme uvažovat jako podprostor prostoru \mathbb{R}^3 , pak je-li S rovinná plocha, tj. $S \subset \mathbb{R}^2$, je $\iint_S f \, dS$ totožný s dvojným integrálem $\iint_S f \, d\nu_2$, neboť pro list $B \subset \mathbb{R}^2$ je $\omega(B) = \nu_2(B)$.

Vlastnosti neorientovaného plošného integrálu jsou stejné jako vlastnosti n-rozměrného integrálu v \mathbb{R}^n . Tak např. platí věta:

Věta 3.9 Je-li (B_1, \dots, B_k) rozklad S , pak

$$\iint_S f \, dS = \sum_{i=1}^k \iint_{B_i} f \, dS, \tag{3.30}$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Uvedeme ještě postačující podmínu konvergence plošného integrálu, se kterou v praxi vystačíme:

Věta 3.10 Nechť $N \subset S$ je nulová množina na S a nechť f je spojitá na $S \setminus N$ a ohrazená. Pak $\iint_S f dS$ konverguje.

Výpočet neorientovaného plošného integrálu

Vzorec 3.30 ukazuje, že k výpočtu plošného integrálu přes plochu S stačí umět počítat integrál přes listy. Nechť $B \subset \mathbb{R}^3$ je list, $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ jeho parametrizace.

Nechť $f : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ je stupňovitá funkce taková, že f nabývá hodnotu a_i na vnitřku listu B_i , $i = 1, \dots, k$, kde (B_1, \dots, B_k) je rozklad plochy B . Pak $\Phi(D_i) = B_i$, $i = 1, \dots, k$, kde D_i je regulární oblast a (D_1, \dots, D_k) tvoří rozklad (rozdělení) oblasti D na podoblasti. Restrikce $\Phi_i = \Phi|_{D_i}$ je parametrizace listu B_i , $i = 1, \dots, k$. Je přitom (viz 3.28)

$$\omega(B_i) = \iint_{D_i} \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right| du dv = \iint_{D_i} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du dv.$$

Potom

$$\iint_B f dS = \sum_{i=1}^k a_i \iint_{D_i} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du dv = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} a_i \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du dv. \quad (3.31)$$

Pro $(u, v) \in D_i^0$ je $\Phi(u, v)$ vnitřním bodem listu B_i , takže $f(\Phi(u, v)) = a_i$. Můžeme proto 3.31 psát ve tvaru

$$\iint_B f dS = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du dv = \iint_D f(\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du dv.$$

Platí tedy pro stupňovitou funkci f na B vzorec

$$\iint_B f dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du dv, \quad (3.32)$$

kde $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace B .

Limitním procesem a použitím linearity integrálu zjistíme, že 3.32 platí pro každou integrovatelnou funkci f na B a naopak, konverguje-li dvojný integrál v 3.32, je f integrovatelná na B a platí 3.32. Přitom pro konvergenci tohoto dvojnitého integrálu je nutné a stačí, aby funkce $f \circ \Phi$ byla integrovatelná na D .

Věta 3.11 Nechť B je list, $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ jeho parametrizace. Pak f je integrovatelná na B , právě když $f \circ \Phi$ je integrovatelná na D . Přitom platí vzorec 3.32.

Je-li B graf funkce $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C_1 , $B = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$ a zvolíme-li parametrizaci $\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$, $(u, v) \in D$ (tedy $x = u, y = v, z = g(u, v)$), pak jako speciální případ vzorce 3.32 dostaneme (píšeme-li místo proměnných u, v proměnné x, y)

$$\iint_B f \, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy. \quad (3.33)$$

Integrál $\iint_B f \, dS$ lze rovněž definovat přímo vzorcem 3.32. V tom případě je třeba ukázat, že hodnota integrálu nezávisí na volbě parametrizace listu B . To lze dokázat použitím věty o substituci v dvojném integrálu.

Příklad 3.16 Vypočtěte $\iint_S z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dS$,

kde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

Zvolme parametrické rovnice

$$\begin{aligned} \Phi : \quad x &= R \cos u \sin v \\ y &= R \sin u \sin v \quad , \quad (u, v) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ z &= R \cos v \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } \Phi(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (-R \sin u \sin v, R \cos u \sin v, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, -R \sin v)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-R^2 \cos u \sin^2 v, -R^2 \sin u \sin^2 v, -R^2 \sin v \cos v)$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| = \sqrt{R^4 \sin^4 v \cdot (\cos^2 u + \sin^2 u) + R^4 \sin^2 v \cos^2 v} = R^2 \sin v$$

$$z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = R \cos v \cdot \sqrt{R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v} = R^2 \cos v \sin v$$

Tedy

$$\iint_S z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \cos v \sin^2 v \, dv \right) \, du = \frac{2}{3} \pi R^4.$$

Cvičení

Příklad 1 Vypočtěte $\iint_S \frac{dS}{(1+x+z)^2}$, kde S je část roviny $x+y+z=1$ v I. oktantu.
 $[\sqrt{3}(\ln 2 - \frac{1}{2})]$

Příklad 2 Vypočtěte $\iint_S z dS$, kde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 2\}$.
 $[\frac{14}{3} \pi \sqrt{2}]$

Příklad 3 Vypočtěte $\iint_S dS$, kde S je obdélník $-2 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 1$ ležící v rovině $z = 3$.
 $[4]$

Příklad 4 Vypočtěte $\iint_S dS$, kde S je část válcové plochy $y^2 + z^2 = 4, z \geq 0, 0 \leq x \leq 3$.
 $[6\pi]$

Příklad 5 Vypočtěte $\iint_S dS$, kde S je parabolická plocha $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 9$.
 $[\frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1)]$

Příklad 6 Vypočtěte $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, kde S je povrch kuželevy $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.
 $[\frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2})]$

3.7 Orientovaný plošný integrál

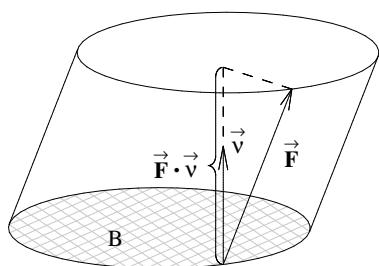
Nechť $\mathbf{B} = (B, \vec{\nu})$ je orientovaný list. Orientovaný list $\mathbf{B}_1 = (B_1, \vec{\nu}_1)$ nazveme **částí orientovaného listu \mathbf{B}** , jestliže $B_1 \subset B$ a jestliže orientující normálové pole (orientace) $\vec{\nu}_1$ je restrikce orientace $\vec{\nu}$, tj. $\vec{\nu}_1 = \vec{\nu}|_{B_1}$.

Řekneme, že orientovaný list \mathbf{B} je součtem orientovaných listů $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$, a píšeme $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k$, je-li $\{B_1, \dots, B_k\}$ rozklad listu B a je-li každý orientovaný list \mathbf{B}_i částí \mathbf{B} . Zřejmě pak $-\mathbf{B} = (-\mathbf{B}_1) + \dots + (-\mathbf{B}_k)$.

Než přistoupíme k definici orientovaného plošného integrálu, vyjdeme z jisté fyzikální situace.

Představme si, že část G prostoru \mathbb{R}^3 je vyplněna nestlačitelnou proudící kapalinou, přičemž rychlosť každé částice je určena pouze její polohou a nezávisí na čase. V takovém případě mluvíme o **ustáleném proudění kapaliny**.

Nechť pole $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3)$ je pole rychlostí tohoto proudění, tj pro $p \in G$ je $\vec{\mathbf{F}}(p)$ vektor rychlosti proudění v bodě p . Vzniká otázka, jaké množství kapaliny proteče za jednotku času kusem plochy (listem) ve směru zvolené orientace.



Předpokládejme zprvu, že pole $\vec{\mathbf{F}}$ je konstantní a orientovaný list $\mathbf{B} = (B, \vec{\nu})$ je roviný (viz obrázek). Pak kapalina, která proteče plochou B za jednotku času, vyplní válec o základně B velikosti $\omega(B)$ a výšce $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu}$, jež je průmětem vektoru $\vec{\mathbf{F}}$ do směru $\vec{\nu}$ (je-li $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu} < 0$, znamená to ovšem to, že kapalina protéká opačným směrem než tím, kterým byla určena strana plochy).

Je tedy množství kapaliny, které proteče za jednotku času orientovaným listem $(B, \vec{\nu})$, rovno veličině

$$Q = (\vec{F} \cdot \vec{\nu}) \omega(B).$$

Nechť nyní $\mathbf{B} = (B, \vec{\nu})$ je libovolný orientovaný list a \vec{F} spojité vektorové pole definované na B . Rozdělme \mathbf{B} na malé orientované části (listy) $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ tak, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k.$$

Bude-li toto rozdělení dostatečně jemné, můžeme považovat každý list B_i přibližně za rovinou a orientaci $\vec{\nu}$ na každém B_i za konstantní vektor. Také pole \vec{F} můžeme na každém B_i považovat přibližně za konstantní, tj. můžeme je nahradit polem $\vec{F}_i = \vec{F}(p_i)$, kde $p_i \in B_i^0$.

Množství kapaliny, které proteče za jednotku času částí B_i , je tedy přibližně rovno číslu $\vec{F}(p_i) \cdot \vec{\nu}(p_i) \omega(B_i)$, a celkové množství Q kapaliny, které proteče za jednotku času orientovaným listem $(B, \vec{\nu})$, je přibližně rovno

$$Q = \sum_{i=1}^k \vec{F}(p_i) \cdot \vec{\nu}(p_i) \omega(B_i). \quad (3.34)$$

Součet vpravo bude tím přesněji určovat množství kapaliny proteklé za jednotku času listem \mathbf{B} , čím jemnejší bude dělení listu \mathbf{B} na části.

Součet 3.34 je integrální součet pro plošný integrál

$$\iint_B (\vec{F} \cdot \vec{\nu}) \, dS. \quad (3.35)$$

Na součet 3.34 lze pohlížet jako na plošný integrál $\iint_B h \, dS$, kde h je stupňovitá funkce

nabývající na B_i^0 hodnotu $\vec{F}(p_i) \cdot \vec{\nu}(p_i)$. Limitním procesem (zvolíme-li posloupnost zjemňujících se dělení tak, že průměry listů B_i konvergují k nule) dostaneme, že součty 3.34 konvergují k integrálu 3.35

Definice 3.17 Orientovaným plošným integrálem pole \vec{F} přes orientovaný list $\mathbf{B} = (B, \vec{\nu})$ nazýváme integrál

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_B (\vec{F} \cdot \vec{\nu}) \, dS, \quad (3.36)$$

existuje-li integrál vpravo. Integrál 3.36 nazýváme **tokem vektorového pole \vec{F} orientovanou plochou \mathbf{B}** .

Termín „tok pole“, který byl převzat z hydromechaniky, se používá nejen pro pole rychlostí proudění kapaliny, ale pro jakákoli fyzikální vektorová pole; je-li tedy např. \vec{F} elektrostatické pole, mluvíme o toku elektrostatického pole orientovanou plochou atp.

Protože orientovaný integrál jsme vztahem 3.36 definovali pomocí neorientovaného integrálu, **plynou vlastnosti orientovaného integrálu z vlastností neorientovaného integrálu**.

Jelikož opačně orientovaný list $-\mathbf{B}$ má orientaci $-\vec{\nu}$, platí

$$\iint_{-\mathbf{B}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_B (\vec{F} \cdot (-\vec{\nu})) dS = - \iint_B (\vec{F} \cdot \vec{\nu}) dS = - \iint_{\mathbf{B}} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Tedy

$$\iint_{-\mathbf{B}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathbf{B}} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (3.37)$$

Dále platí:

Je-li $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k$, je

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathbf{B}_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \dots + \iint_{\mathbf{B}_k} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (3.38)$$

Tento vzorec vyjadřuje **aditivitu toku vektorového pole**.

Výpočet orientovaného plošného integrálu lze provést převedením na neorientovaný plošný integrál.

Nechť $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace orientovaného listu $\mathbf{B} = (B, \vec{\nu})$ souhlasná s orientací $\vec{\nu}$. Pro $p = \Phi(u, v)$, $(u, v) \in D$, je

$$\vec{\nu}(p) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right|},$$

takže

$$(\vec{F} \cdot \vec{\nu})(p) = \vec{F}(p) \cdot \vec{\nu}(p) = \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|}(u, v).$$

Odtud

$$\begin{aligned} \iint_B (\vec{F} \cdot \vec{\nu}) dS &= \iint_D (\vec{F} \circ \Phi) \cdot \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv = \\ &= \iint_D (\vec{F} \circ \Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dudv. \end{aligned}$$

Máme tedy vzorec

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (\vec{F} \circ \Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dudv. \quad (3.39)$$

Jestliže parametrizace Φ nesouhlasí s orientací listu \mathbf{B} , musíme (podle vzorce 3.37) vzít na pravé straně dvojný integrál s opačným znaménkem.

Integrovaná funkce ve dvojném integrálu na pravé straně vzorce 3.39 je smíšený součin. Je-li $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3)$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, je (podle pravidla pro výpočet smíšeného součinu)

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_D \begin{vmatrix} (F_1 \circ \Phi) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ (F_2 \circ \Phi) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ (F_3 \circ \Phi) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{vmatrix} dudv. \quad (3.40)$$

Poslední dva sloupce determinantu jsou sloupce Jacobovy matice Φ' . Rozvedeme-li determinant podle prvního sloupce, dostaneme

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_D ((F_1 \circ \Phi) D(\Phi_2, \Phi_3) + (F_2 \circ \Phi) D(\Phi_3, \Phi_1) + (F_3 \circ \Phi) D(\Phi_1, \Phi_2)) dudv, \quad (3.41)$$

kde $D(\Phi_i, \Phi_j)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, jsou Jakobiány souřadnic Φ_i, Φ_j , tj.

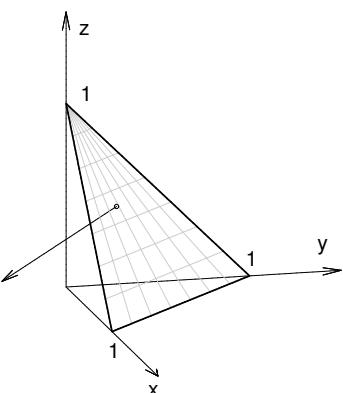
$$D(\Phi_i, \Phi_j) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_j}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Orientovaný plošný integrál $\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ se ve složkovém tvaru zapisuje následovně:

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{\mathbf{B}} F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dx dy, \quad (3.42)$$

kde výrazy $dydz, dzdx, dx dy$ jsou tzv. vnější součiny diferenciálů dx, dy, dz a výraz za symbolem $\iint_{\mathbf{B}}$ v 3.42 je tzv. diferenciální forma druhého stupně.

Příklad 3.17 Vypočtěte tok Q vektorového pole $\vec{\mathbf{F}} = (x - y, y - z, z - x + 1)$ orientovaným trojúhelníkem \mathbf{B} o vrcholech $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Orientující normálový vektor směruje k počátku (viz obrázek)

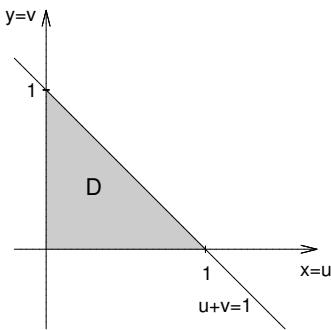


V našem případě je tedy

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

$$\begin{aligned} Zvolme \Phi : \quad &x = u && \\ &y = v && (u, v) \in D, \\ &z = 1 - u - v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} kde D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\} \\ (viz další obrázek). \end{aligned}$$



Odtud je zřejmé, že $u \in \langle 0, 1 \rangle, v \in \langle 0, 1 - u \rangle$

$$\begin{aligned} \text{Parametrizace } \Phi(u, v) &= (u, v, 1 - u - v), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= (1, 0, -1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= (0, 1, -1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Zvolená parametrizace je tedy nesouhlasná se zadanou orientací, neboť vypočtená normála má opačný směr než zadaná orientující normála.

$$\begin{aligned} (\vec{F} \circ \Phi)(u, v) &= \vec{F}(\Phi(u, v)) = \vec{F}(u, v, 1 - u - v) = (u - v, u + 2v - 1, 2 - 2u - v) \\ Q &= - \iint_D (u - v, u + 2v - 1, 2 - 2u - v) \cdot (1, 1, 1) \, du \, dv = - \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} dv \right) \, du = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Uvedený příklad můžeme vypočítat i přímo z definičního vzorce 3.36. Platí totiž, že $\vec{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, tedy

$$(\vec{F} \cdot \vec{\nu})(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - y, y - z, z - x + 1) \cdot (1, 1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Odtud

$$\iint_B \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_B (\vec{F} \cdot \vec{\nu}) \, dS = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_B dS = -\frac{1}{\sqrt{3}} \omega(B),$$

kde $\omega(B)$ je v našem případě obsah trojúhelníka B , který se dá stanovit elementárně.

S orientovanými plošnými integrály přes orientované listy bychom v aplikacích nevystačili. V dalším výkladu se omezíme na **jednoduše souvislé listy**, tj. takové listy, jejichž parametrizace jsou definovány na jednoduše souvislých uzavřených regulárních oblastech. Okraj takového listu je jednoduchá uzavřená křivka. Vícenásobně souvislé listy lze vždy rozdělit na jednoduše souvislé listy.

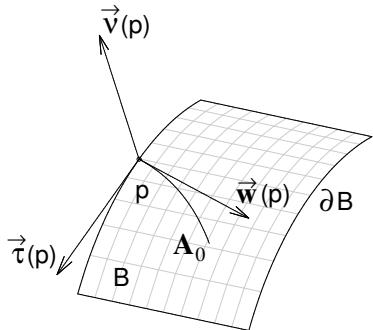
Orientovanou hranici uzavřené regulární oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ označme ∂D . U listů (a později i ploch) bude značit ∂B neorientovaný okraj, $\partial \mathbf{B}$ orientovaný okraj, ať už jde o neorientovaný list B , či orientovaný list \mathbf{B} .

Nechť p je regulární bod okraje ∂B listu B (tj. p je vnitřním bodem některého oblouku $A \subset \partial B$).

Vnitřním tečným vektorem $\vec{w}(p)$ listu B v bodě p nazveme vektor, pro který platí:

- 1) je tečným vektorem v bodě p orientovaného oblouku \mathbf{A}_0 , který leží na listu B a má počáteční bod p .

- 2) Není kolineární s tečným vektorem okraje ∂B v bodě p (viz obrázek).

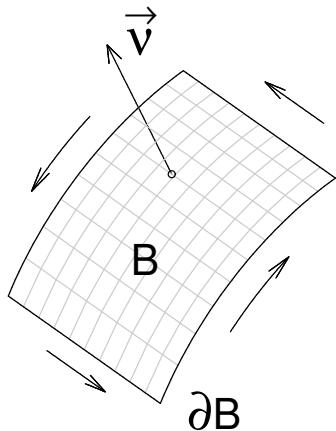


Nechť nyní B je orientovaný list, $\vec{\nu}$ jeho orientace. Nechť ∂B je orientovaný okraj s orientujícím tečným vektorem $\vec{\tau}$, pak řekneme, že **okraj ∂B je souhlasně orientován s listem B** , jestliže pro libovolný regulární bod okraje ∂B platí:

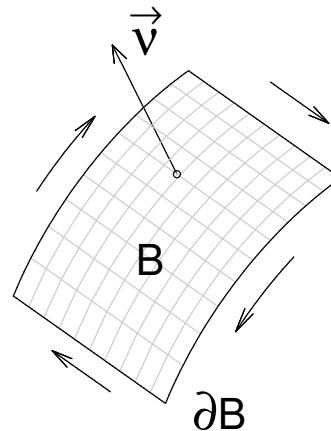
Trojice vektorů $(\vec{\tau}(p), \vec{w}(p), \vec{\nu}(p))$ určuje tutéž orientaci prostoru \mathbb{R}^3 jako standartní báze e_1, e_2, e_3 , tj. platí $(\vec{\tau}(p) \times \vec{w}(p)) \cdot \vec{\nu}(p) > 0$.

Názorně si můžeme souhlasnou orientaci okraje představit takto:

„Dáme-li palec pravé ruky ve směru zadaného orientujícího normálového vektoru orientovaného listu B , pak prsty ukazují směr orientace okraje ∂B .“



Obrázek 3.12: Souhlasná orientace okraje ∂B s listem B .

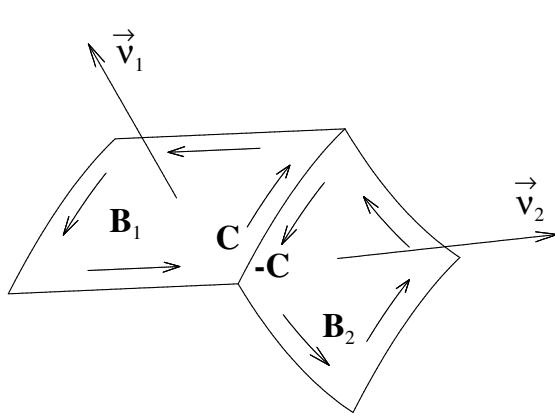


Obrázek 3.13: Nesouhlasná orientace okraje ∂B s listem B

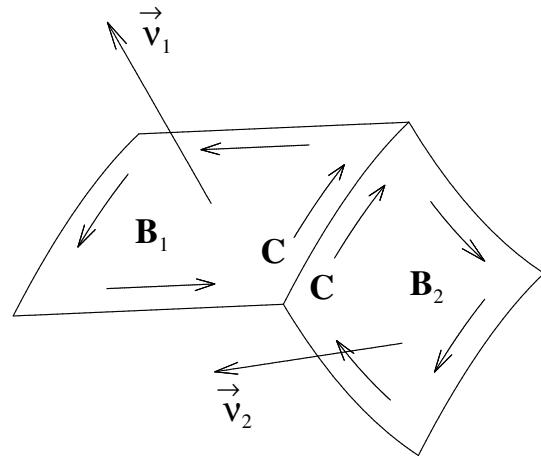
Řekneme, že orientované listy B_1, B_2 , které jsou přilehlé podél oblouku C , jsou **souhlasně orientované (koorientované)**, jestliže pro okraje $\partial B_1, \partial B_2$ souhlasně orientované s listy B_1, B_2 platí:

Je-li orientovaný oblouk C částí okraje ∂B_1 , je orientovaný oblouk $-C$ částí okraje ∂B_2 .

Na obrázku 3.14 jsou přilehlé listy B_1, B_2 souhlasně orientované, na obr. 3.15 jsou přilehlé listy B'_1, B'_2 nesouhlasně orientované.



Obrázek 3.14: Souhlasně orientované přilehlé listy



Obrázek 3.15: Nesouhlasně orientované přilehlé listy

Definice 3.18 Říkáme, že plocha S je **orientovatelná**, existují-li orientované listy B_1, \dots, B_k tak, že platí:

- (1) $\{B_1, \dots, B_k\}$ je rozklad plochy S ,
- (2) každé dva přilehlé listy B_i, B_j jsou souhlasně orientované.

Řekneme pak, že S má **orientovaný rozklad**

$$\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k\}. \quad (3.43)$$

Definice 3.19 Nechť S je orientovatelná plocha s orientovaným rozkladem 3.43. Nechť orientace listu B_i je $\vec{\nu}_i$. Definujme vektorové pole $\vec{\nu} : S \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$ tak, že položíme

$$\vec{\nu}(p) = \vec{\nu}_i(p) \quad \text{pro } p \in B_i^0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

a v ostatních bodech (které jsou krajními body listů B_i) definujme $\vec{\nu}$ takto: Bud' definujeme (je-li to možné) $\vec{\nu}(p)$ tak, aby $\vec{\nu}$ bylo v bodě p spojité; není-li to možné (v případě, že p je singulární bod, kdy se plocha v okolí bodu „láme“ nebo má v bodě „hrot“), definujeme $\vec{\nu}(p) = \mathbf{o}$. Pole $\vec{\nu}$ nazveme **orientací plochy S indukovanou orientovaným rozkladem 3.43** a dvojici $(S, \vec{\nu})$ nazveme **orientovanou plochou**. Dvojici $(S, -\vec{\nu})$ nazveme **opačně orientovanou plochou** k $(S, \vec{\nu})$. Označíme-li dále $(S, \vec{\nu})$ znakem \mathbf{S} , označíme $(S, -\vec{\nu})$ znakem $-\mathbf{S}$. Tu okolnost, že orientovaný rozklad 3.43 určuje orientaci plochy \mathbf{S} , vyjádříme zápisem

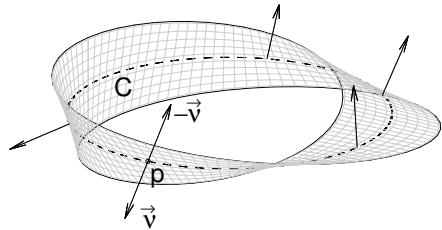
$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k.$$

Jsou-li $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k\}, \{\mathbf{B}'_1, \dots, \mathbf{B}'_m\}$ dva orientované rozklady orientovatelné plochy S a jsou-li $\vec{\nu}, \vec{\nu}'$ orientace plochy S indukované těmito rozklady, lze dokázat, že platí

$$\vec{\nu} = \vec{\nu}' \quad \text{nebo} \quad \vec{\nu} = -\vec{\nu}'.$$

Orientovatelná plocha S má tedy pouze dvě možné orientace, říkáme, že je **dvoustranná**. Plochy, které nejsou orientovatelné, se nazývají **jednostranné**. Takové plochy existují.

Příkladem takové plochy je **Möbiova plocha (Möbiův list)**, viz obrázek.



Zvolíme-li v bodě p normálový vektor $\vec{\nu}(p)$ a bude-li se nyní bod q pohybovat po C od bodu p do bodu $p' = p$, bude se normálový vektor spojité měnit, avšak v bodě p' přejde ve vektor $-\vec{\nu}(p)$. To u hladkých ploch dvoustranných, jako je např. kulová plocha, není možné (Möbiův list je ovšem rovněž hladká plocha).

Je-li \mathbf{S} orientovaná plocha, $\mathbf{S} = (S, \vec{\nu})$, a má-li S okraj ∂S , který se skládá z jedné nebo z několika jednoduchých uzavřených křivek (navzájem disjunktních), lze definovat souhlasnou orientaci okraje $\partial\mathbf{S}$ s plochou \mathbf{S} tak, jak jsme to udělali nedávno pro listy. Stačí si uvědomit, že každý oblouk okraje ∂S je obloukem okraje některého listu rozkladu S nebo může být na takové oblouky rozdělen.

Uzavřená plocha S je vždy orientovatelná.

Nechť $\{B_1, \dots, B_k\}$ je rozklad plochy S . Platí věta

Jednoduchá uzavřená plocha S rozděluje prostor \mathbb{R}^3 na dvě oblasti, z nichž jedna je ohraničená a druhá neohraničená.

Ohraničená oblast se nazývá **vnitřek plochy S** , značí se $\text{Int } S$; neohraničená oblast se nazývá **vnějšek plochy S** , značí se $\text{Ext } S$ (nesmíme zaměňovat tyto termíny s pojmy vnitřek a vnějšek množiny z kapitoly 1.1).

Každý list B_i budeme orientovat normálovým polem $\vec{\nu}_i$ tak, aby v každém bodě $a \in B_i^0$ měla polonormála $p = a + t \vec{\nu}_i(a)$, $t \in (0, \infty)$, v libovolně malém okolí $U(a)$ společné body s vnitřkem $\text{Int } S$. V tomto případě říkáme, že uzavřená orientovaná plocha

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_1 + \cdots + \mathbf{B}_k, \quad \mathbf{B}_i = (B_i, \vec{\nu}_i) \quad (i = 1, \dots, k),$$

je orientována vnitřním normálovým vektorem. O ploše $-\mathbf{S}$ říkáme, že **je orientována vnějším normálovým vektorem**.

Budeme nyní definovat orientovaný plošný integrál přes orientovanou plochu.

Definice 3.20 Nechť $\mathbf{S} = (S, \vec{\nu})$ je orientovaná plocha, $\vec{\mathbf{F}}$ vektorové pole definované na S . Orientovaným plošným integrálem pole $\vec{\mathbf{F}}$ přes orientovanou plochu \mathbf{S} nazýváme integrál

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_S (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu}) dS, \tag{3.44}$$

existuje-li integrál vpravo. Integrál 3.44 nazýváme **tokem pole $\vec{\mathbf{F}}$ orientovanou plochou \mathbf{S}** .

Platí zřejmě

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (3.45)$$

Jestliže $S = B_1 + \cdots + B_k$, pak

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^k \iint_{B_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (3.46)$$

Je-li S orientovatelná plocha, která má parametrizaci $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, a je-li orientace $\vec{\nu}$ určena parametrizací Φ , platí pro orientovanou plochu $S = (S, \vec{\nu})$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) du dv. \quad (3.47)$$

Tento vzorec je zobecněním vzorce 3.39, který byl odvozen pro listy.

Uvedeme nyní příklady na výpočet orientovaných plošných integrálů přes orientované plochy.

Příklad 3.18 Máme stanovit tok pole \vec{F} :

$$\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, (x^2 + y^2)z)$$

orientovanou hranicí S úseče paraboloidu

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\},$$

jež je orientována vnějším normálovým vektorem (viz obrázek).

Je $S = B_1 + B_2$, kde B_1 je kruh v rovině $z = 1$,

$$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

B_1 je orientován tak, že jde o „horní stranu“, normálový vektor je zřejmě $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$;
 B_2 je kus paraboloidu,

$$B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

B_2 je orientován tak, že jde o „spodní stranu“ - normálový vektor $\vec{\nu}(x, y, z)$ svírá tupý úhel s vektorem \mathbf{e}_3 .

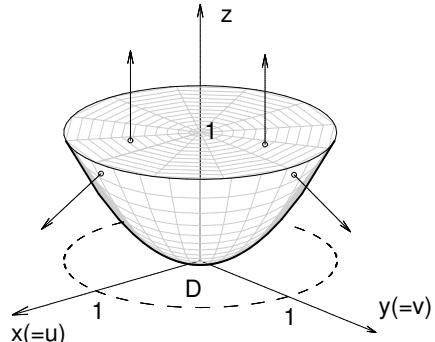
V obou případech zvolíme parametry $x = u, y = v$.

Parametrizace listu B_1 :

$$\Phi(u, v) = (u, v, 1),$$

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1).$$



Jde tedy o parametrizaci současnou s orientací listu \mathbf{B}_1 .

Parametrizace listu B_2 :

$$\begin{aligned}\Psi(u, v) &= (u, v, u^2 + v^2), \\ D &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial v} &= (1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1).\end{aligned}$$

Jde o parametrizaci nesouhlasnou (třetí souřadnice vektoru $\frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}$ je kladná, zatímco by měla být záporná) s orientací listu \mathbf{B}_2 , jde tedy o parametrizaci listu $-\mathbf{B}_2$.

Tok vektoru orientovanou plochou \mathbf{S} je

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} &= \iint_{\mathbf{B}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \iint_{\mathbf{B}_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{\mathbf{B}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} - \iint_{-\mathbf{B}_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \\ &= \iint_D (u, v, u^2 + v^2) \cdot (0, 0, 1) dudv - \\ &\quad - \iint_D (u(u^2 + v^2), v(u^2 + v^2), (u^2 + v^2)^2) \cdot (-2u, -2v, 1) dudv = \\ &= \iint_D (u^2 + v^2) dudv + \iint_D (u^2 + v^2)^2 dudv = \\ &= \iint_D (u^2 + v^2)(u^2 + v^2 + 1) dudv = \begin{vmatrix} u = \rho \cos \varphi & \rho \in \langle 0, 1 \rangle \\ v = \rho \sin \varphi & \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{vmatrix} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^2(\rho^2 + 1)\rho d\rho \right) d\varphi = 2\pi \int_0^1 (\rho^5 + \rho^3) d\rho = \frac{5\pi}{6}.\end{aligned}$$

Integrály $\iint_{\mathbf{B}_1}$, $\iint_{\mathbf{B}_2}$ jsme též mohli převést na neorientované - bylo by to trochu rychlejší, zejména u prvního integrálu.

Příklad 3.19 Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{\mathbf{F}} = 2\mathbf{k}$ následujícími plochami

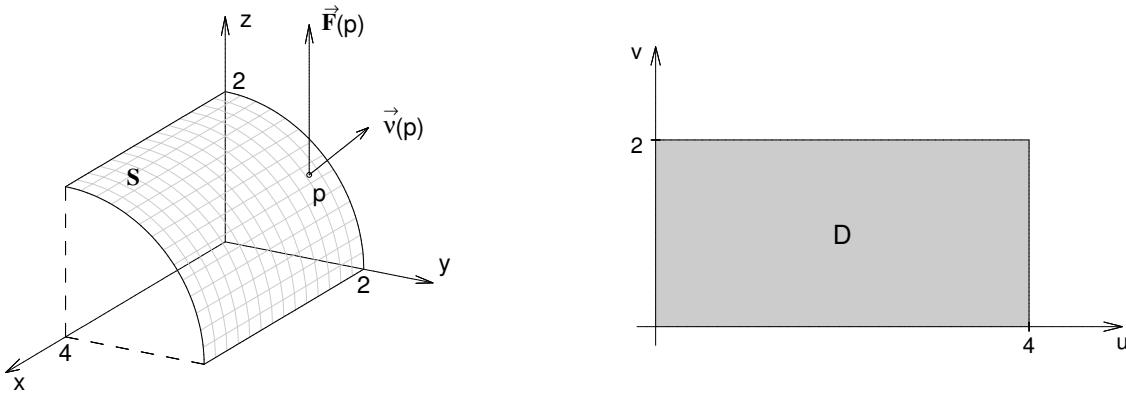
- a) S je část válcové plochy $y^2 + z^2 = 4$, $0 \leq x \leq 4$, $y \geq 0$, $z \geq 0$,
- b) S je část válcové plochy $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 2$

orientovanými tak, že jejich normálové vektory svírají s vektorem \mathbf{k} ostrý nebo pravý úhel.

- a) Zvolme Φ :

x	$=$	u
y	$=$	v
z	$=$	$\sqrt{4 - v^2}$

$(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\}$



Parametrisace $\Phi(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - v^2})$

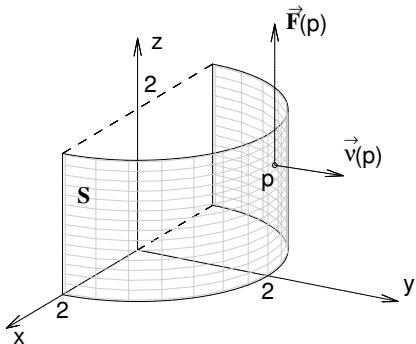
$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, \frac{-v}{\sqrt{4 - v^2}}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{4 - v^2}} \end{vmatrix} = (0, \frac{v}{\sqrt{4 - v^2}}, 1).$$

Normálový vektor neexistuje na části hranice obdélníku D (pro $v = 2$), ale jedná se o množinu míry nula, což nemá vliv na výpočet.

V našem případě (jelikož druhá souřadnice vypočteného normálového vektoru je kladná) je parametrisace souhlasná se zadanou orientací plochy S .

$$\begin{aligned} (\vec{F} \circ \Phi)(u, v) &= \vec{F}(u, v, \sqrt{4 - v^2}) = (0, 0, 2) \\ Q &= \iint_D (0, 0, 2) \cdot (0, \frac{v}{\sqrt{4 - v^2}}, 1) \, du \, dv = \int_0^4 \left(\int_0^2 2 \, dv \right) \, du = 16 \end{aligned}$$

b) Plocha S je znázorněna na obrázku.



Je zřejmé, že normálové vektory plochy S jsou v libovolném bodě kolmé k poli \vec{F} . Tok Q přes orientovanou plochu S je v tomto případě nulový, neboť

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall p \in S.$$

Cvičení

Vypočtěte orientované plošné integrály:

Příklad 1 $\iint_S (z-1)^2 \, dxdy$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2z, 1 \leq z \leq 2\}$.

Plocha S je orientovaná vnějším normálovým vektorem.

$$[\frac{\pi}{2}]$$

Příklad 2 $\iint_S z \, dxdy + x \, dxdz + y \, dydz$,

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0\}$. Plocha S je orientovaná tak, že normálový vektor svírá s osou z ostrý úhel.

$$[-\frac{1}{6}]$$

Příklad 3 $\iint_S yz \, dxdy + xz \, dydz + xy \, dxdz$, kde plocha S je povrch čvrtiny válce

$x^2 + y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq a$, orientovaná vnějším normálovým vektorem.

$$[aR^2 (\frac{2R}{3} + \frac{\pi a}{8})]$$

Ke všem dalším příkladům se vztahuje následující zadání:

Je dáno vektorové pole \vec{F} :

a) $\vec{F} = 3\mathbf{k}$

b) $\vec{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

c) $\vec{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

d) $\vec{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

Vypočtěte tok vektorového pole \vec{F} orientovanou plochou S :

Příklad 4 Obdélník ležící v rovině $z = 3$, který je ohraničený nerovnostmi $-2 \leq y \leq 2$, $0 \leq x \leq 1$, normálový vektor má shodný směr s vektorem \mathbf{k} .

$$[a) 12; b) 12; c) 12; d) 0]$$

Příklad 5 Rovina $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ v I. oktantu, jejíž normálový vektor svírá s osou z ostrý úhel.

$$[a) 9; b) 25; c) 12; d) \frac{61}{6}]$$

Příklad 6 Parabolická plocha $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 9$, orientovaná vnějším normálovým vektorem.

$$[a) -27\pi; b) -27\pi; c) \frac{81}{2}\pi; d) 0]$$

Příklad 7 Kuželová plocha $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$, orientovaná vnějším normálovým vektorem.

$$[a) 48\pi; b) 48\pi; c) 64\pi; d) 0]$$

3.8 Integrální věty

Pro matematiku a teoretickou fyziku jsou důležité vztahy mezi integrály definovanými na určitých rovinných nebo prostorových oblastech a integrály definovanými na hranicích těchto oblastí.

Matematické věty, které tyto vztahy popisují, se nazývají **integrální věty matematické analýzy**.

Mezi tyto věty řadíme **integrální větu Gaussovu-Ostrogradského**, která vyjadřuje vztah mezi trojným integrálem přes prostorovou oblast a plošným integrálem přes uzavřenou plochu, která je hranicí této oblasti, a **integrální větu Stokesova**, která vyjadřuje vztah mezi plošným integrálem přes plochu s okrajem a křivkovým integrálem přes okraj této plochy neboli souvislou cirkulaci pole \vec{F} po okraji plochy s tokem rotace pole \vec{F} touto plochou.

Rovinný případ Stokesovy věty, tzv. Greenova věta, byla již vysvětlena v kapitole 3.5.

Věta 3.12 (Stokesova) Nechť vektorové pole \vec{F} je třídy C_1 na oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$ a nechť S je orientovaná plocha s okrajem ∂S , $S \subset G$, a nechť okraj ∂S je souhlasně orientovaný s S . Potom platí

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (3.48)$$

Je-li $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, pak vzorec 3.48 má ve složkovém vyjádření tvar

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz &= \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Příklad 3.20 Užitím Stokesovy věty vypočtěte cirkulaci pole $\vec{F} = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$ po obvodu \mathbf{C} trojúhelníka S s vrcholy $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ orientovaného pořadím vrcholů.

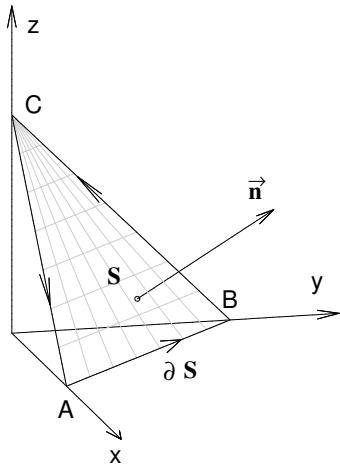
Nejdříve vypočteme rotaci pole \vec{F} :

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = -(2, 2, 2)$$

Trojúhelník S leží v rovině $x + y + z = 1$. Tedy parametrické rovnice plochy S jsou tvaru

$$\begin{aligned} \Phi : \quad x &= u \\ y &= v \\ z &= 1 - u - v \end{aligned} \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in \langle 0, 1 \rangle, v \in \langle 0, 1 - u \rangle\}.$$



Parametrizace $\Phi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial u} &= (1, 0, -1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= (0, 1, -1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= (1, 1, 1)\end{aligned}$$

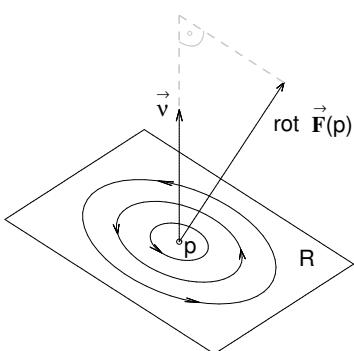
Tedy normála \vec{n} parametrizace Φ je souhlasná s okrajem $\partial S = C$ trojúhelníka S (viz obrázek).

$$Dále \left(\operatorname{rot} \vec{F} \circ \Phi \right) (u, v) = \operatorname{rot} \vec{F} (\Phi(u, v)) = \operatorname{rot} \vec{F} (u, v, 1 - u - v) = -(2, 2, 2).$$

Podle Stokesovy věty platí

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(\operatorname{rot} \vec{F} \circ \Phi \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) du dv = \\ &= - \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (2, 2, 2) \cdot (1, 1, 1) dv \right) du = -6 \int_0^1 (1-u) du = -3.\end{aligned}$$

Nechť nyní \vec{F} je pole třídy C_1 na oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$ a nechť $p \in G$. Proložme bodem p rovinu R , jejíž normálový vektor je $\vec{\nu}$. Uvažujme v rovině R posloupnost $(C_n)_{n=1}^\infty$ orientovaných jednoduchých uzavřených křivek, které jsou souhlasně orientovány vzhledem k orientaci $\vec{\nu}$ a v jejichž vnitřku (v rovině R) se nachází bod p .



Předpokládejme dále, že křivky C_n se „stahují“ k bodu p , tj. $\operatorname{diam} C_n \rightarrow 0$ (viz obrázek).

Budiž S_n plocha v R ohraničená křivkou C_n a orientovaná vektorem $\vec{\nu}$, takže $\partial S_n = C_n$.

Použijeme-li Stokesovu větu, dostaneme pro cirkulaci pole \vec{F} po křivkách C_n :

$$\int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_n} (\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu}) dS.$$

Použijeme-li na plošný integrál vpravo větu o střední hodnotě integerálního počtu (jež platí analogicky jako pro n-rozměrný integrál v \mathbb{R}^n), dostaneme

$$\iint_{S_n} (\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu}) dS = (\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu})(q_n) \nu_2(S_n),$$

kde $q_n \in S_n$. Tedy

$$\left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu} \right) (q_n) = \frac{\int_{\mathbf{C}_n} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}}{\nu_2(S_n)}.$$

Pro $n \rightarrow \infty$ je $q_n \rightarrow p$ (neboť $\operatorname{diam} C_n = \operatorname{diam} S_n \rightarrow 0$) a v důsledku spojitosti pole $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}$ a toho, že $\vec{\nu}$ je konstantní, je

$$\left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu} \right) (q_n) \rightarrow \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}(p) \cdot \vec{\nu},$$

takže

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}(p) \cdot \vec{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbf{C}_n} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}}{\nu_2(S_n)}.$$

Projekce vektoru $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}(p)$ do směru $\vec{\nu}$ vyjadřuje tak **hustotu „víření“** pole $\vec{\mathbf{F}}$ v rovině R kolem bodu p . Maximální hustota víru pole $\vec{\mathbf{F}}$ v bodě p je v rovině mající směr souhlasně kolineární s vektorem $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}(p)$ (je-li $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}(p) \neq \mathbf{0}$).

Užití Stokesovy věty v magnetostatice

Z fyziky je známo, že cirkulace intenzity $\vec{\mathbf{H}} \in C_1(G), G \subset \mathbb{R}^3$ magnetického pole po libovolné jednoduché uzavřené křivce \mathbf{C} se rovná elektrickému proudu protékajícímu vnitřkem křivky. Jestliže tento proud má v oblasti G spojitou hustotu $\vec{\mathbf{J}}$, pak platí

$$\int_{\mathbf{C}} \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{ds} = \iint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{dS},$$

kde \mathbf{S} je okraj plochy $S, S \subset G$, přičemž \mathbf{C} a \mathbf{S} jsou souhlasně orientovány. Podle Stokesovy věty je

$$\int_{\mathbf{C}} \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{ds} = \iint_{\mathbf{S}} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{dS},$$

máme tedy

$$\iint_{\mathbf{S}} (\vec{\mathbf{J}} - \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}) \cdot \vec{dS} = 0.$$

Protože tato rovnost platí pro každou uzavřenou křivku $\mathbf{C}, C \subset G$, a tedy i pro každou plochu $\mathbf{S}, S \subset G$, takovou že $\partial \mathbf{S} = \mathbf{C}$, plyne z předpokladu spojitosti integrandu, že v G platí rovnost

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}.$$

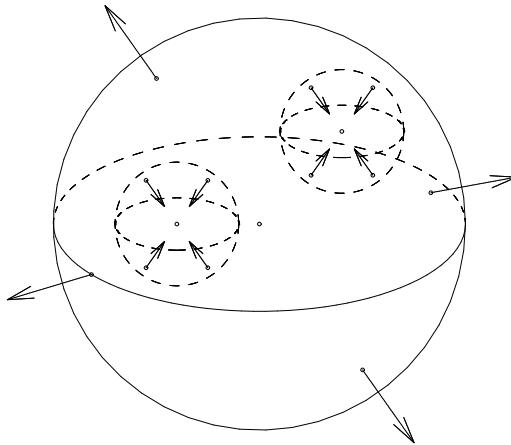
Než přejdeme k formulaci věty Gaussovy-Ostrogradského, zavedeme některé důležité pojmy:

Ohraničenou oblast $G \subset \mathbb{R}^3$ nazveme **regulární oblastí**, je-li její hranice uzavřená po částech hladká plocha nebo je-li disjunktním sjednocením konečného počtu takových ploch. Uzávěr $\bar{G} = V$ nazveme **uzavřenou regulární oblastí**, hranici oblasti V označíme ∂V .

Hranice ∂V je bud' jediná plocha S (pak se oblast V nazývá **jednoduše souvislá**); **kladně orientovanou hranicí ∂V** budeme pak rozumět orientovanou plochu \mathbf{S} vnějším normálovým vektorem. Nebo je hranice ∂V složena z „vnější“ uzavřené plochy S_1 a z „vnitřních“ uzavřených ploch S_2, \dots, S_k ($S_i \subset \text{Int}S_1$, $i = 2, \dots, k$, $\overline{\text{Int}S_i} \cap \overline{\text{Int}S_j} = \emptyset$ pro $i \neq j, i \neq 1, j \neq 1$). V tomto případě se oblast V nazývá **k-násobně souvislá**; je

$$V = \overline{\text{Int}S_1} \setminus \bigcup_{i=2}^k \text{Int}S_i.$$

Kladně orientovanou hranicí ∂V budeme rozumět v tomto případě soubor orientovaných ploch $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k$, kde \mathbf{S}_1 je orientována vnějším normálovým vektorem a vnitřní plochy $\mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k$ jsou orientovány vnitřním normálovým vektorem (viz obrázek 3.16); můžeme též říkat, že **hranice ∂V je orientována vnějším normálovým vektorem vzhledem k oblasti V** .



Obrázek 3.16: Trojnásobně souvislá oblast s kladně orientovanou hranicí

Píšeme symbolicky

$$\partial V = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k$$

a definujeme

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^k \iint_{\mathbf{S}_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Opačně orientovanou hranici $-\partial\mathbf{V}$ nazýváme **záporně orientovanou hranicí** nebo **hranicí orientovanou vnitřním normálovým vektorem** (vzhledem k oblasti V).

Rozkladem uzavřené regulární oblasti V rozumíme konečný systém uzavřených regulárních oblastí $\{V_1, \dots, V_m\}$ takový, že platí

$$(1) \quad V = \bigcup_{i=1}^m V_i,$$

- (2) žádné dvě oblasti V_i, V_j ($i \neq j$) nemají společné vnitřní body
- (3) $V_i \cap V_j$ ($i \neq j$) je bud' konečná množina bodů, nebo konečný počet křivek, nebo konečný počet ploch bez společných vnitřních bodů.

Je-li na V definováno spojité vektorové pole $\vec{\mathbf{F}}$, lze dokázat, že platí

$$\iint_{\partial\mathbf{V}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^m \iint_{\partial V_i} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}}. \quad (3.49)$$

Věta 3.13 (Gaussova-Ostrogradského) Nechť pole $\vec{\mathbf{F}}$ je třídy C_1 na uzavřené regulární oblasti V , jejíž hranice $\partial\mathbf{V}$ je kladně orientována. Potom platí

$$\iint_{\partial\mathbf{V}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} \, dx \, dy \, dz \quad (3.50)$$

nebo ve složkovém tvaru, je-li $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3)$,

$$\iint_{\partial\mathbf{V}} F_1 \, dy \, dz + F_2 \, dz \, dx + F_3 \, dx \, dy = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz. \quad (3.51)$$

Příklad 3.21 Užitím věty Gaussovy-Ostrogradského vypočtěte tok vektorového pole

$$\vec{\mathbf{F}} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)z\mathbf{k}$$

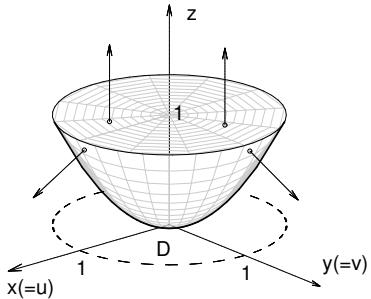
orientovanou hranici \mathbf{S} úseče paraboloidu

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

orientovanou vnějším normálovým vektorem (viz obrázek).

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z + z + x^2 + y^2 = 2z + x^2 + y^2.$$

$$\text{Tedy } \iint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = \iiint_V (2z + x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz, \text{ kde } \mathbf{S} = \partial\mathbf{V}.$$



Použijeme transformaci do cylindrických souřadnic, tj.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi & \rho \in \langle 0, 1 \rangle \\ z &= z & z \in \langle \rho^2, 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V (2z + x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^1 \rho \cdot (2z + \rho^2) dz \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \cdot \int_0^1 (\rho + \rho^3 - 2\rho^5) d\rho = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledek je totožný s výsledkem příkladu 3.18 v odstavci 3.7, kde jsme uvedený příklad počítali podle definičního vzorce pro výpočet orientovaného plošného integrálu.

Je tedy zřejmé, že Gaussovu-Ostrogradského větu je výhodné použít v případě orientovaného plošného integrálu přes počásteck hladkou orientovanou uzavřenou plochu.

Nechť \vec{F} je pole třídy C_1 v oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$, $V \subseteq G$ regulární uzavřená oblast, ∂V kladně orientovaná hranice. Představíme-li si např., že \vec{F} je pole rychlostí stacionárního proudění nestlačitelné kapaliny a $\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{dS}$ je tok pole \vec{F} ve směru vnějšího normálového vektoru k ∂V , je poměr

$$\frac{\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{dS}}{\nu(V)}$$

jakousi „mírou“, která vyjadřuje **vydatnost zdrojů** (je-li podíl kladný) kapaliny uvnitř oblasti V . (Je-li podíl záporný, převažují v tělese tzv. „nory“). Budíž $p \in G$ a uvažujme posloupnost oblastí $(V_n)_{n=1}^\infty$, $V_n \subset G$, $p \in V_n^0$ ($n = 1, 2, \dots$), $\text{diam } V_n \rightarrow 0$. Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\iint_{\partial V_n} \vec{F} \cdot \vec{dS}}{\nu(V_n)}$$

charakterizuje, zda bod p je bodem **zdroje** (je-li limita kladná) či naopak zda p je bodem „nory“, v níž kapalina zaniká (je-li limita záporná).

Tuto limitu můžeme stanovit pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty. Podle ní je

$$\iint_{\partial V_n} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz = \text{div } \vec{F}(p_n) \nu(V_n), \quad p_n \in V_n.$$

(Použili jsme větu o střední hodnotě pro trojný integrál.) Odtud

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}(p_n) = \frac{\iint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}}{\nu(V_n)}$$

Protože $\operatorname{diam} V_n \rightarrow 0$, $p \in V_n$, je $|p_n - p| \rightarrow 0$, a ze spojitosti funkce $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}$ plyne, že $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}(p_n) \rightarrow \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}(p)$ pro $n \rightarrow \infty$. Je tedy

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\iint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}}{\nu(V_n)}.$$

Z významu podílů na pravé straně je patrné, že divergenci pole lze nazvat **hustotou jeho zdrojů**.

Jestliže divergence pole $\vec{\mathbf{F}}$ je v oblasti G nulová, nazývá se pole $\vec{\mathbf{F}}$ **nezřídlové**.

Nulovost divergence pole $\vec{\mathbf{F}}$ v oblasti G znamená (použijeme-li Gaussovou-Ostrogradského větu), že tok pole $\vec{\mathbf{F}}$ každou uzavřenou plochou S , ležící spolu se svým vnitřkem v G , je nulový. To můžeme interpretovat tak, že v G žádné zdroje („zřídky“) nejsou.

Příkladem nezřídlového pole je pole rotací některého pole třídy C_2 . Je-li $\vec{\mathbf{F}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}$, kde $\vec{\mathbf{H}}$ je pole třídy C_2 v oblasti G , přesvědčíme se snadno, že $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = 0$. Plyne to též z toho, že pole rotací má nulový tok každou uzavřenou plochou.

Nezřídlové pole $\vec{\mathbf{F}}$ se též nazývá **solenoidální**. Objasněme tento termín.

Nechť $\vec{\mathbf{F}}$ je pole třídy C_1 v oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$. Každá křivka γ ležící v G , která má v každém svém bodě směr pole $\vec{\mathbf{F}}$ (tj. pro každé $p \in \gamma$ je tečný vektor $\vec{\tau}(p)$ křivky γ kolineární s vektorem $\vec{\mathbf{F}}(p)$), se nazývá **vektorová křivka** pole $\vec{\mathbf{F}}$. (Je-li $\vec{\mathbf{F}}$ interpretováno jako silové pole, mluvíme o **silokřivce**.) Je-li φ vhodná parametrizace křivky γ , platí

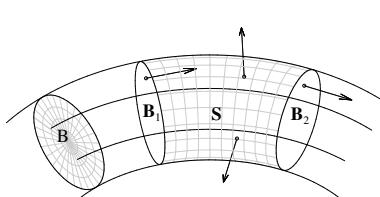
$$\varphi'(t) = \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t))$$

a nalezení vektorových křivek vede k řešení vektorové diferenciální rovnice

$$\dot{x} = \vec{\mathbf{F}}(x).$$

Z teorie diferenciálních rovnic plyne, že každým bodem oblasti G prochází právě jedna vektorová křivka pole $\vec{\mathbf{F}}$.

Nechť B je kus plochy (list), ležící v G a protínající vektorové křivky. Vektorové křivky pole $\vec{\mathbf{F}}$ procházející body listu B vyplní část oblasti G , která se nazývá **vektorová trubice** pole $\vec{\mathbf{F}}$ (viz obrázek).



Vezmeme-li dva příčné řezy vektorové trubice (do-sta-tečně blízké), vymezí nám tyto řezy část vektorové trubice V , která bude regulární oblastí, jejíž hranice ∂V se bude skládat z ploch B_1, B_2 daných řezů a z „pláště“ S vektorové trubice.

Orientujme ∂V vnějším normálovým vektorem, přitom orientujme plochy B_1, B_2 „souhlasně“, tj. tak, aby např. orientující normálové vektoru $\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2$ k plochám B_1, B_2 svíraly ostrý úhel se směrem pole \vec{F} v příslušném bodě (viz opět obrázek). Je pak $\partial\mathbf{V} = B_2 + (-B_1) + S$ (nebo $\partial\mathbf{V} = (-B_2) + B_1 + S$). Je-li $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ v G , pak podle Gaussovy-Ostrogradského věty je $\iint_{\partial\mathbf{V}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$, tedy

$$\iint_{B_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{-B_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3.52)$$

Plášť S je tvořen vektorovými čarami, které procházejí krajními body ploch B_1, B_2 ; je-li $\vec{\nu}(p)$ normálový vektor k S v bodě p , pak je kolmý k tečnému vektoru $\vec{\tau}(p)$ vektorové křivky procházející bodem p , a tedy je také kolmý k vektoru $\vec{F}(p)$. Je tedy $\vec{F} \cdot \vec{\nu} = 0$ na S , takže

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{\nu}) dS = 0.$$

Odtud a z rovnosti 3.52 plyne

$$\iint_{B_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{B_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

To znamená, že u solenoidálního pole \vec{F} je tok pole \vec{F} libovolným řezem dané vektorové trubice pole \vec{F} stále týž, což můžeme stručně vyjádřit takto: **Tok solenoidálního pole \vec{F} vektorovou trubicí tohoto pole je konstantní**.

Užití Gaussovy-Ostrogradského věty v elektrostatice

Z fyziky je známo, že tok elektrické indukce \vec{D} kladně orientovanou hranicí tělesa T se rovná velikosti náboje uvnitř tělesa. Je-li náboj rozložen v oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$ se spojitou hustotou ρ , pak pro každé těleso $T \subset G$ platí

$$\iint_{\partial T} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_T \rho d\nu$$

Podle Gaussovy-Ostrogradského věty je

$$\iint_{\partial T} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_T \operatorname{div} \vec{D} d\nu.$$

Z těchto rovností dostaneme rovnost

$$\iiint_T (\operatorname{div} \vec{D} - \rho) d\nu = 0.$$

Protože tato rovnost platí pro každé těleso $T \subset G$, plyne z toho za předpokladu, že integrand je spojitá funkce, že všude v G platí

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

což je jedna z Maxwellových rovnic.

Cvičení

I) Uvažujme vektorové pole \vec{F} :

a) $\vec{F} = -z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

b) $\vec{F} = 2y^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - x\mathbf{k}$

c) $\vec{F} = 3x\mathbf{i} - xy^3\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Užitím Stokesovy věty vypočtěte práci vektoru \vec{F} po orientované uzavřené křivce \mathbf{K} :

Příklad 1 $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 1\}$, \mathbf{K} je orientovaná při pohledu z kladné osy z ve směru hodinových ručiček.

[a) -4π ; b) 0; c) 0]

Příklad 2 $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, x = 0\}$, \mathbf{K} je orientovaná při pohledu z kladné osy x proti směru hodinových ručiček.

[a) 0; b) 0; c) 0]

Příklad 3 K je obvod obdélníka s vrcholy $A = (-2, 0, 0), B = (-2, 0, 3), C = (2, 0, 3), D = (2, 0, 0)$ orientovaný pořadím vrcholů.

[a) -12 ; b) 12; c) 0]

Příklad 4 K je obvod trojúhelníka s vrcholy $A = (2, 0, 0), B = (0, 3, 0), C = (0, 0, 4)$ orientovaný pořadím vrcholů.

[a) 1; b) 14; c) 8,1]

II) Uvažujme vektorové pole \vec{F} :

a) $\vec{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

b) $\vec{F} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

c) $\vec{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

d) $\vec{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

Užitím Gaussovy-Ostrogradského věty vypočtěte tok vektorového pole \vec{F} uzavřenou orientovanou plochou \mathbf{S} , orientovanou vnějším normálovým vektorem:

Příklad 5 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$.

[a) 18; b) 12; c) 24; d) 18]

Příklad 6 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

[a) 32π ; b) $\frac{32}{3}\pi$; c) $\frac{64}{3}\pi$; d) 0]

Příklad 7 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3\}$.

[a) 36π ; b) 12π ; c) 24π ; d) 36π]

Příklad 8 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$.

[a) 64π ; b) $\frac{64}{3}\pi$; c) $\frac{128}{3}\pi$; d) $\frac{128}{3}\pi$]

Příklad 9 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}$.

[a) 24π ; b) 8π ; c) 16π ; d) $\frac{128}{3}\pi$]

4 Systémy obyčejných diferenciálních rovnic

4.1 Základní pojmy

Při studiu konkrétních fyzikálních systémů matematickými prostředky postupujeme zpravidla tak, že zvolíme jistý soubor fyzikálních veličin, pomocí nichž můžeme studovaný systém úplně popsat. Úloha vyšetřit chování takového systému se pak převádí na úlohu zjistit, jak se tyto vybrané veličiny, zvané obvykle **stavové veličiny** (nebo také **stavové proměnné**), mění s časem.

Stavové veličiny lze pro daný systém obecně vybrat mnoha způsoby a závisí do značné míry na fyzikální a technické formulaci studovaného problému. V této kapitole se nebudeme zabývat metodami výběru stavových veličin, ale budeme předpokládat, že problém, který máme řešit, je už pomocí stavových veličin formulován. Naším úkolem bude popsat metody, jak explicitně vyjádřit závislost těchto stavových veličin na čase.

Řada problémů přírodních i technických věd se matematicky formuluje pomocí systémů obyčejných diferenciálních rovnic. Nejjednodušším systémem obyčejných diferenciálních rovnic je **systém diferenciálních rovnic I. řádu rozřešený vzhledem k derivacím** (nazývá se též **normální systém**).

Je to systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde f_i ($i = 1, \dots, n$) jsou reálné funkce definované na otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$. Systém 4.1 je výhodné přepsat do vektorového tvaru:

Označme $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$, kde T značí transponovanou matici, tj. řádek se mění na sloupec a naopak. Systém 4.1 lze pak popsat ve tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{4.2}$$

Definice 4.1 Uvažujme systém diferenciálních rovnic 4.2, kde \mathbf{f} je vektorová funkce definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Zobrazení $\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, nazveme **řešením** systému 4.2, jestliže platí

- 1) $(t, \mathbf{u}(t)) \in G \quad \forall t \in J$
- 2) zobrazení \mathbf{u} má derivaci na J a platí $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \quad \forall t \in J$.

Nechť $\mathbf{u}_1(t)$, $t \in J_1$, $\mathbf{u}_2(t)$, $t \in J_2$, jsou dvě řešení systému 4.2. Řekneme, že $\mathbf{u}_1(t)$ je **prodloužením** $\mathbf{u}_2(t)$, jestliže $J_1 \supset J_2$ a pro každé $t \in J_2$ platí $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$.

Zpravidla nás zajímá takové řešení $\mathbf{v} : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{R}$, k němuž neexistuje řešení, které by bylo definováno na větším intervalu, než je interval K a přitom bylo prodloužením

zobrazení \mathbf{v} . Takové řešení \mathbf{v} nazýváme **maximálním řešením**. Dá se dokázat, že ke každému řešení \mathbf{u} existuje maximální řešení \mathbf{v} , které je prodloužením řešení \mathbf{u} .

Definice 4.2 Nechť je dán bod $(t_0, \boldsymbol{\tau}) \in G$. **Cauchyovou** nebo též **počáteční úlohou** pro systém 4.2 nazýváme úlohu najít řešení $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ systému 4.2, pro něž platí

$$\mathbf{u}(t_0) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.3)$$

neboli

$$u_1(t_0) = \tau_1, u_2(t_0) = \tau_2, \dots, u_n(t_0) = \tau_n. \quad (4.4)$$

Cauchyovu úlohu zpravidla zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau}. \quad (4.5)$$

O řešení \mathbf{u} , pro něž platí 4.3, říkáme, že je řešením Cauchyovy úlohy 4.5 nebo že je řešením systému 4.2 vyhovujícím počáteční podmínce 4.3.

Geometrické znázornění řešení

Je-li $\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ řešení systému 4.2, nazýváme množinu $\mathbf{u}(J) = \{\mathbf{u}(t), t \in J\}$ **trajektorií** systému 4.2. Jestliže $\mathbf{u}(t_0) = \boldsymbol{\tau}$, říkáme, že trajektorie prochází v okamžiku t_0 bodem („stavem“) $\boldsymbol{\tau}$ prostoru \mathbb{R}^n (prostor \mathbb{R}^n v tomto případě také nazýváme **prostorem stavů** nebo též **fázovým prostorem**).

Zobrazení \mathbf{u} je **parametrizace trajektorie** $\mathbf{u}(J)$. Trajektorie může být za jistých podmínek křivka nebo jednobodová množina. Pojem trajektorie je vhodný zejména pro tzv. **autonomní systém**, což je systém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Je-li $\mathbf{u}'(t) \neq \mathbf{0}$, je tento vektor tečným vektorem k trajektorii $\mathbf{u}(J)$ v bodě $\mathbf{u}(t)$, tento tečný vektor je vektorem pole \mathbf{f} v bodě $\mathbf{u}(t)$.

Příklad 4.1 Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_2 \\ x'_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Řešením je vektorová funkce

$$\mathbf{u}(t) = (r \cos(t + \varphi), r \sin(t + \varphi)), \quad t \in \mathbb{R},$$

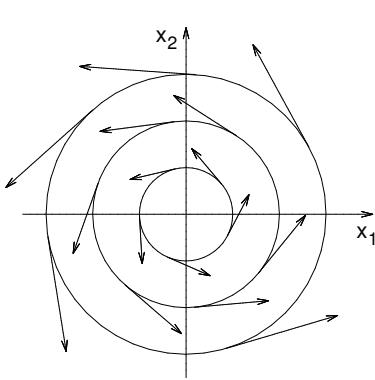
ve složkovém tvaru

$$\begin{aligned} u_1(t) &= r \cos(t + \varphi) \\ u_2(t) &= r \sin(t + \varphi), \end{aligned}$$

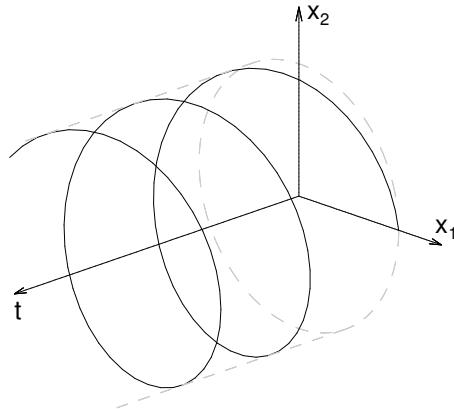
kde r, φ jsou libovolná čísla. Pro $r \neq 0$ je trajektorie systému kružnice o poloměru $|r|$. Pro totéž r a různá φ dostaneme tutéž trajektorii, i když řešení jsou různá - jsou časově

posunuta. Pro $r = 0$ dostaneme jako trajektorii jednobodovou množinu $\{(0, 0)\}$. Řešení, které má tuto trajektorii, je nulové (triviální) řešení: $u_1(t) = 0, u_2(t) = 0$. Bod $(0, 0)$ je tzv. rovnovážný (klidový) stav systému.

Trajektorie mají v každém bodě $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ směr pole $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ (viz obrázek 4.1).



Obrázek 4.1: Trajektorie systému z příkladu 4.1.



Obrázek 4.2: Charakteristika systému z příkladu 4.1.

Úplněji než trajektorie charakterizuje geometricky řešení $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ jeho **graf**, tj. množina

$$U = \{(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) : t \in J\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Graf řešení \mathbf{u} je podmnožina prostoru $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, který se nazývá **rozšířený fázový prostor**. První složka \mathbb{R} kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je časová osa, druhá složka \mathbb{R}^n kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je fázový prostor soustavy 4.2.

Graf maximálního řešení se nazývá **charakteristika soustavy 4.2**. Množina všech charakteristik soustavy zcela tuto soustavu určuje.

Charakteristikou soustavy z příkladu 4.1 je množina

$$\{(t, r \cos(t + \varphi), r \sin(t + \varphi)) : t \in (-\infty, \infty)\},$$

a je to tedy šroubovice pro $r \neq 0$ (viz obrázek 4.2). Pro různá φ a stejné $r \neq 0$ dostáváme šroubovice posunuté ve směru osy t ; všechny tyto šroubovice se promítají do téže trajektorie.

Dále si ukážeme, že diferenciální rovnici n -tého rádu v explicitním tvaru lze chápout jako speciální případ soustavu 4.1.

Nechť tedy

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (4.6)$$

Označme $x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$.

Platí

$$\begin{aligned} x'_1 &= x' &= x_2 \\ x'_2 &= x'' &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x^{(n-1)} = x_n \\ x'_n &= x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

což vede k systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n \\ x'_n &= f(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{4.7}$$

To je systém tvaru 4.1, kde

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, \dots, x_n) &= x_2 \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) &= x_3 \\ &\vdots \\ f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) &= x_n \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Zřejmě platí:

Funkce $u(t)$, $t \in J$, je řešením rovnice 4.6 právě tehdy, když $(u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$ je řešením systému 4.7 a naopak, je-li $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ řešením systému 4.7, je první složka $u_1(t)$ řešením rovnice 4.6.

Analogicky je možné i systémy vyššího řádu s osamostatněnými nejvyššími derivacemi převést na systémy prvního řádu s větším počtem neznámých.

Příklad 4.2 Uvažujme systém

$$\begin{aligned} y'' &= g(t, y, y', z, z', z'') \\ z''' &= h(t, y, y', z, z', z''), \end{aligned}$$

kde g, h jsou funkce definované na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^6$.

Položme $y = x_1$, $y' = x_2$, $z = x_3$, $z' = x_4$, $z'' = x_5$.

Dostaneme systém

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= g(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ x'_3 &= x_4 \\ x'_4 &= x_5 \\ x'_5 &= h(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \end{aligned}$$

což je systém pěti rovnic I. řádu.

4.2 Existence a jednoznačnost řešení systémů dif. rovnic I. řádu

Velmi důležitou otázkou je, zda Cauchyova úloha má řešení (otázka existence) a zda toto řešení je v jistém smyslu jediné (otázka jednoznačnosti).

Než přejdeme k formulaci podmínek existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy, připomeňme si některé důležité pojmy:

Vektorový prostor V nazveme **normovaný**, jestliže na V je definovaná **norma**, tj. reálná funkce $\|\cdot\| : \mathbf{u} \rightarrow \|\mathbf{u}\|$ mající následující vlastnosti:

- i) $\|\mathbf{u}\| > 0$, je-li $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, $\|\mathbf{o}\| = 0$
- ii) $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in V$ a každý skalár α
- iii) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$

Pro vektorové prostory konečné dimenze je charakteristická tato vlastnost normy:

Máme-li ve vektorovém prostoru V konečné dimenze dvě libovolné normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, pak jsou **ekvivalentní**, tj. existují kladná čísla α, β tak, že $\forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, platí

$$\alpha \leq \frac{\|\mathbf{u}\|_1}{\|\mathbf{u}\|_2} \leq \beta.$$

Tato vlastnost je velmi důležitá, neboť například v úlohách o konvergenci nebo spojitosti můžeme pracovat s kteroukoliv normou.

Připomeňme ještě, že operace vektorového prostoru v \mathbb{R}^n , tj. sčítání vektorů, násobení vektoru skalárem apod. jsou definovány po složkách.

Jako normu $\|\cdot\|$ v \mathbb{R}^n můžeme používat kteroukoliv z tří navzájem ekvivalentních norem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |u_i| \\ \|\mathbf{u}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} \\ \|\mathbf{u}\|_3 &= \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Dále nechť $M_n(\mathbb{R})$ je vektorový prostor čtvercových matic n-tého řádu. V prostoru $M_n(\mathbb{R})$ můžeme zavést řadu norem, z nichž všechny jsou ekvivalentní (prostor $M_n(\mathbb{R})$ má dimenzi n^2). Pro nás v následujících úvahách budou důležité normy, pro něž kromě vlastností i), ii) a iii) platí ještě

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$$

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})_1^n$, nejužívanější budou normy:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_r &= \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \quad (\text{řádková norma}) \\ \|\mathbf{A}\|_s &= \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \quad (\text{sloupcová norma}) \\ \|\mathbf{A}\|_r &= \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2} \quad (\text{euklidovská norma})\end{aligned}$$

Příklad 4.3 Uvažujme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, pak

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_r &= \max\{1+0+3, 0+1+0, 1+2+2\} = \max\{4, 1, 5\} = \underline{5}; \\ \|\mathbf{A}\|_s &= \max\{1+0+1, 0+1+2, 3+0+2\} = \max\{2, 3, 5\} = \underline{5}; \\ \|\mathbf{A}\| &= \sqrt{1+0+9+0+1+0+1+4+4} = \underline{\sqrt{20}}.\end{aligned}$$

Řekneme, že Cauchyova úloha $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau}$, má právě jedno řešení, jestliže pro každou dvojici řešení $\mathbf{u}(t)$, $t \in I$, $\mathbf{v}(t)$, $t \in J$, existuje okolí O bodu t_0 , $O \subset I \cap J$, tak, že $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) \forall t \in O$.

Uvedeme některé vlastnosti funkce \mathbf{f} , které zaručují jednoznačnou řešitelnost Cauchyovy úlohy.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast. Vektorová funkce $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá **lipschitzovská vzhledem k proměnné \mathbf{x}** na množině G , existuje-li konstanta $L > 0$ tak, že pro každou dvojici $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in G$ platí

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (4.9)$$

V podmínce 4.9 můžeme za normu $\|\cdot\|$ zvolit kteroukoliv z norem 4.8.

Důležitou třídu funkcí lipschitzovských vzhledem k proměnné \mathbf{x} v oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tvoří funkce mající na G ohrazené všechny své první parální derivace podle proměnných x_1, x_2, \dots, x_n , tj. funkce takové, že existuje konstanta $M > 0$ tak, že platí

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \right| < M \text{ pro všechna } i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (t, x_1, \dots, x_n) \in G.$$

Věta 4.1 (O existenci a jednoznačnosti řešení) Nechť je dána Cauchyova úloha

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.10)$$

v oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a nechť existují čísla α, β tak, že funkce \mathbf{f} je spojitá na množině

$$R = \{(t, \mathbf{x}) \in G : |t - t_0| \leq \alpha, \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}\| \leq \beta\}$$

$$\text{Označme } M = \max_{(t,\mathbf{x}) \in R} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|, \quad \delta = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}.$$

Pak existuje řešení Cauchyovy úlohy 4.10 definované na intervalu $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$. Je-li navíc funkce \mathbf{f} lipschitzovská vzhledem k \mathbf{x} na R , pak existuje jediné řešení Cauchyovy úlohy 4.10 definované na intervalu $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$.

4.3 Systém lineárních diferenciálních rovnic I. řádu

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Říkáme, že systém diferenciálních rovnic $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je **lineární**, existuje-li maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ typu (n, n) a vektorová funkce $\mathbf{b}(t)$ typu $(n, 1)$,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

taková, že platí

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad \text{pro všechna } (t, \mathbf{x}) \in G.$$

Lineární systém diferenciálních rovnic I. řádu zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

nebo stručně ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \tag{4.11}$$

Říkáme, že lineární systém 4.11 je **homogenní**, jestliže $b_i(t) = 0 \forall i = 1, \dots, n$ a $\forall t \in I$. Je-li pro nějaké $t \in I$ některá z funkcí b_i nenulová, pak lineární systém 4.11 nazýváme **nehomogenním**.

Je-li systém 4.11 matematickým modelem nějakého fyzikálního systému, pak maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ popisuje chování prvků, z nichž je tento systém sestaven, a vektorová funkce \mathbf{b} popisuje **vstup systému**. Vektor \mathbf{x} je **stavovým vektorem** tohoto systému.

Podívejme se nyní na problém existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau}. \tag{4.12}$$

Nechť maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ i vektorová funkce $\mathbf{b}(t)$ je spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pak i funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ je spojitá na $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a tedy v dostatečně malém okolí každého bodu $(t, \mathbf{x}) \in G$ ohrazená. Dále platí

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

takže každá z funkcí f_i má v dostatečně malém okolí každého bodu $(t, \mathbf{x}) \in G$ ohraničené parciální derivace vzhledem k proměnným x_1, x_2, \dots, x_n . Je tedy \mathbf{f} lipschitzovská vzhledem k proměnné \mathbf{x} v jistém okolí každého bodu $(t, \mathbf{x}) \in G$. Odtud plynoucí tvrzení:

Věta 4.2 *Nechť maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ a vektorová funkce $\mathbf{b}(t)$ jsou spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak pro každé $t_0 \in I$ a $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ má Cauchyova úloha*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\tau},$$

právě jedno řešení definované na celém intervalu I .

V dalším budeme automaticky předpokládat, že $\mathbf{A}(t), \mathbf{b}(t)$ jsou spojité.

Uvažujme nyní homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad \text{tj. maticově} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (4.13)$$

Jsou-li $\mathbf{u}_1(t)$ a $\mathbf{u}_2(t)$ dvě řešení systému 4.13, $c \in \mathbb{R}$, pak také $\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t)$ a $c \cdot \mathbf{u}_1(t)$ jsou řešení systému 4.13. Tedy řešení systému 4.13 tvoří vektorový prostor dimenze n .

Zvolme nyní nějakou bázi $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$ v prostoru řešení systému 4.13.

Označme $\mathbf{u}_i(t) = (u_{1i}(t), u_{2i}(t), \dots, u_{ni}(t))^T$, $i = 1, \dots, n$.

Tuto bázi nazýváme **fundamentální systém řešení** systému 4.13.

Matice

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & \cdots & u_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(t) & \cdots & u_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

sestavená ze sloupců $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$ se nazývá **fundamentální matice** systému 4.13.

Definujme pro libovolnou n -tici řešení $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$

$$W(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_{11}(t) & \cdots & \mathbf{u}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_{n1}(t) & \cdots & \mathbf{u}_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Uvedený determinant nazýváme **wronskiánem**.

Platí: $W(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \equiv 0$ na I , nebo $W(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \neq 0$ na I .

Věta 4.3 *n -tice řešení $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ systému 4.13 je lineárně nezávislá, právě tehdy když $W(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \neq 0$.*

Z této věty pak vyplývá, že fundamentální matice \mathbf{U} je regulární, a tedy k ní existuje inverzní matice $\mathbf{U}^{-1}(t)$.

Je-li $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$ fundamentální systém řešení systému 4.13, je obecné řešení 4.13 tvaru

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{u}_n(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Označíme-li $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, lze pak obecné řešení zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}, \quad (4.15)$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice systému 4.13.

Uvažujme nyní nehomogenní systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \quad (4.16)$$

Pak platí:

Je-li $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$ fundamentální systém řešení homogenního systému $\mathbf{u}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}$ a $\mathbf{u}_0(t)$ partikulární řešení systému 4.16, pak obecné řešení systému 4.16 má tvar

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{u}_n(t) + \mathbf{u}_0(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R},$$

v maticovém tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{u}_0(t),$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$.

Metoda variace konstant

Předpokládáme, že známe fundamentální systém řešení příslušného homogenního systému, zbyvá popsat, jak najdeme partikulární řešení nehomogenního systému.

Myšlenka je obdobná jako u skalární rovnice, tj. nahradit v obecném řešení 4.14 konstanty c_1, \dots, c_n funkcemi $c_1(t), \dots, c_n(t)$ a najít partikulární řešení systému 4.16 ve tvaru

$$\mathbf{u}_0(t) = c_1(t) \mathbf{u}_1(t) + \dots + c_n(t) \mathbf{u}_n(t).$$

Označme $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$.

$$\text{Pak } \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t) \Rightarrow \mathbf{u}'_0(t) = \mathbf{U}'(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}'(t),$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice. Po dosazení do 4.16 máme

$$\mathbf{U}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t).$$

Jelikož $\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{U}(t)$, dostáváme, že

$$\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t) \Rightarrow \mathbf{c}'(t) = \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t),$$

$$\text{tedy } \mathbf{c}(t) = \int \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt,$$

pak $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \int \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt$

a obecné řešení systému 4.16 je tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c} + u_0(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{U}(t) \cdot \int \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b} dt, \quad (4.17)$$

kde \mathbf{c} je libovolný sloupec konstant.

Příklad 4.4 Ověrte, že $\mathbf{u}_1(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t}{t} \right)^T$, $\mathbf{u}_2(t) = \left(\frac{-\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t} \right)^T$ je fundamentální systém homogenní soustavy příslušné k

$$\begin{aligned} u'_1 &= -\frac{u_1}{t} + u_2 + 2 \sin t, & t > 0, \\ u'_2 &= -u_1 - \frac{u_2}{t} + 2 \cos t, \end{aligned}$$

a najděte jeho obecné řešení.

Po dosazení do příslušných homogenních rovnic vyjde pro \mathbf{u}_1

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin t}{t} \right)' &= \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} = -\frac{1}{t} \cdot \frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t}{t}, \\ \left(\frac{\cos t}{t} \right)' &= \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2} = -\frac{\sin t}{t} - \frac{1}{t} \cdot \frac{\cos t}{t} \end{aligned}$$

a pro \mathbf{u}_2

$$\begin{aligned} \left(\frac{-\cos t}{t} \right)' &= \frac{t \sin t + \cos t}{t^2} = -\frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{\cos t}{t} \right) + \frac{\sin t}{t}, \\ \left(\frac{\sin t}{t} \right)' &= \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} = -\left(-\frac{\cos t}{t} \right) - \frac{1}{t} \cdot \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

tedy \mathbf{u}_1 i \mathbf{u}_2 jsou řešení homogenního systému. Označme

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} & -\frac{\cos t}{t} \\ \frac{\cos t}{t} & \frac{\sin t}{t} \end{pmatrix}, \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$$

Protože $\det \mathbf{U}(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2} + \frac{\cos^2 t}{t^2} = \frac{1}{t^2} \neq 0$ pro $t > 0$, je $\mathbf{U}(t)$ fundamentální matici. Dále vypočteme $\mathbf{U}^{-1}(t)$. Postupně máme

$$\text{adj } \mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} & \frac{\cos t}{t} \\ -\frac{\cos t}{t} & \frac{\sin t}{t} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{U}^{-1}(t) = \frac{\text{adj } \mathbf{U}(t)}{\det \mathbf{U}(t)} = t^2 \text{adj } \mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} t \sin t & t \cos t \\ -t \cos t & t \sin t \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) &= \begin{pmatrix} t \sin t & t \cos t \\ -t \cos t & t \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2t \sin^2 t + 2t \cos^2 t \\ -2t \sin t \cos t + 2t \sin t \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Tedy

$$\int \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{b}(t) dt = \begin{pmatrix} \int 2t dt \\ \int 0 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Partikulární řešení má proto tvar

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{U}(t) \int \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} & -\frac{\cos t}{t} \\ \frac{\cos t}{t} & \frac{\sin t}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}$$

a obecné řešení je

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{u}_0(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t} & -\frac{\cos t}{t} \\ \frac{\cos t}{t} & \frac{\sin t}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned}u_1(t) &= c_1 \frac{\sin t}{t} - c_2 \frac{\cos t}{t} + t \sin t, \\ u_2(t) &= c_1 \frac{\cos t}{t} - c_2 \frac{\sin t}{t} + t \cos t,\end{aligned} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4.4 Lineární systémy s konstantními koeficienty

Obecně neumíme najít fundamentální systém homogenního systému, pokud jsou koeficienty skutečně funkcemi t . V případě, že jde o konstanty, je situace výrazně příznivější, neboť jsme schopni v podstatě efektivně najít fundamentální systém (až na problém nalezení kořenů polynomů).

Uvažujme tedy systém

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned} \quad \text{tj. maticově} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{Ax}, \quad (4.18)$$

kde \mathbf{A} je konstantní matice. Ke standardním metodám patří postup založený na Jordanova kanonickém tvaru matice, který ovšem vyžaduje znalost Weierstrassovy teorie elementárních dělitelů. Dále je to postup využívající normální systém vektorů matice, který vyžaduje znalost Weyrovy teorie a Weyrových charakteristik. Jak teorie elementárních dělitelů, tak jí ekvivalentní Weyrova teorie patří do lineární algebry a jde o relativně

složité výsledky. Jejich znalost je mimo rámec běžných znalostí, které inženýři z této oblasti mívají. Z toho důvodu úplný popis obecného řešení systému činí potíže.

My si ukážeme nejprve tzv. eliminační metodu, která je sice co do algoritmu jednoduchá, ale nedají se dost dobře teoreticky popsát komplikace, které mohou nastat. Proto se pro větší systémy nehodí. Dále si všimneme metody využívající normální systém vektorů, ale jen ve speciálních případech. V posledních letech se objevily nové, velice účinné metody, které bohužel zatím nejsou příliš rozšířené. Lze říci, že jsou jednodušší než výše zmíněné metody (mají podstatně menší nároky na znalosti hlubších partií lineární algebry). Jsou vesměs založeny na Cayleyově-Hamiltonově větě.

4.4.1 Eliminační metoda

Tato metoda je použitelná i na nehomogenní systémy tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + \alpha_1(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + \alpha_n(t), \end{aligned} \tag{4.19}$$

kde a_{ij} jsou konstanty a $\alpha_i(t)$ jsou funkce, mající dostatečný počet derivací.

Princip spočívá v tom, že se systém n rovnic prvního řádu převede na jedinou lineární rovnici n -tého řádu (s konstantními koeficienty). Naznačíme si nyní postup.

I. Zvolíme jednu rovnici v 4.19, např. první, a tu zderivujeme. Vyjde

$$x''_1 = a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1n}x'_n + \alpha'_1(t).$$

Do pravé strany této rovnice dosadíme za x'_1, \dots, x'_n z 4.19. Po úpravě dostaneme nějakou rovnici tvaru

$$x''_1 = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + \beta(t), \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

II. Získanou rovnici opět zderivujeme, tj. dostaneme rovnici

$$x'''_1 = b_1x'_1 + \cdots + b_nx'_n + \beta'(t),$$

a do ní znova dosadíme z 4.19 za x'_1, \dots, x'_n . Vyjde

$$x'''_1 = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + \gamma(t), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

III. Tento postup opakujeme, až dostaneme rovnici

$$x^{(n)}_1 = d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + \delta(t), \quad d_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

IV. Nyní máme soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + \alpha(t), \\ x''_1 &= b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + \beta(t), \\ &\vdots \\ x^{(n)}_1 &= d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + \delta(t). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Z tohoto systému postupně vyloučíme neznámé x_2, \dots, x_n , a to tak, že nejprve z první rovnice v 4.20 vypočteme např. x_2 a dosadíme do zbývajících rovnic. Tím se počet rovnic o jednu sníží a nebude zde již x_2 . Nyní opět z první ze zbývajících rovnic, tj. z té, která obsahuje x_1'' , vypočteme např. x_3 , dosadíme do ostatních atd. Nakonec nám vyjde jedna rovnice n-tého řádu pro $x_1(t)$. Najdeme obecné řešení této rovnice, které bude obsahovat n konstant.

V. Obecný tvar $x_1(t)$ dosadíme do levých stran v 4.20 a ze vzniklých rovnic již pouze algebraicky vypočítáme $x_2(t), \dots, x_n(t)$.

Úskalím této metody je, že v kroku IV. se může stát, že nedojdeme až k $x_1^{(n)}$, ale již dříve nastane situace, kdy se všechny neznámé x_2, \dots, x_n vyruší. Tedy pro $x_1(t)$ dostaneme rovnici řádu nižšího než n . Její obecné řešení bude proto obsahovat méně než n konstant. Pak nezbývá než dosadit $x_1(t)$ do 4.19 a obdobně jako pro $x_1(t)$ vytvořit z těchto rovnic diferenciální rovnici pro $x_2(t)$. To se může několikrát opakovat. Musíme pokračovat tak dlouho, až dostaneme n integračních konstant. Jinými slovy, může se stát, že se systém nepodaří převést na jednu rovnici n-tého řádu, ale na několik rovnic nižších řádů (součet jejich řádů je ovšem n). Je obtížné popsat, kdy tato situace nastane. Souvisí to jednak s tím, pro kterou neznámou budeme vytvářet diferenciální rovnici a zda jsou některé složky vlastních vektorů v řádku odpovídajícím zvolené neznámé nulové, jednak se strukturou normálního systému vektorů (viz následující kapitoly).

Příklad 4.5 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned}x'_1 &= 4x_1 - 3x_2 + \sin t \\x'_2 &= 2x_1 - x_2 - 2\cos t\end{aligned}$$

Vytvoříme např. rovnici pro neznámou x_1 . Derivací první rovnice dostaneme

$$x''_1 = 4x'_1 - 3x'_2 + \cos t,$$

tedy

$$x''_1 = 4(4x_1 - 3x_2 + \sin t) - 3(2x_1 - x_2 - 2\cos t) + \cos t = 10x_1 - 9x_2 + 4\sin t + 4\cos t.$$

Ze systému

$$\begin{aligned}x'_1 &= 4x_1 - 3x_2 + \sin t \\x''_1 &= 10x_1 - 9x_2 + 4\sin t + 7\cos t\end{aligned}\tag{4.21}$$

vyloučíme x_2 . Odečteme-li trojnásobek první rovnice od druhé, dostaneme

$$x''_1 - 3x'_1 = -2x_1 + \sin t + 7\cos t \Rightarrow x''_1 - 3x'_1 + 2x_1 = 7\cos t + \sin t.\tag{4.22}$$

Charakteristická rovnice je pak tvaru

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Obecné řešení rovnice 4.22 je

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$u_0(t) = a \cos t + b \sin t.$$

Odtud

$$\begin{aligned} u_0' &= -a \sin t + b \cos t \\ u_0'' &= -a \cos t - b \sin t \end{aligned}$$

a po dosazení do 4.22 máme

$$\begin{aligned} -a \cos t - b \sin t + 3a \sin t - 3b \cos t + 2a \cos t + 2b \sin t &= 7 \cos t + \sin t, \\ (a - 3b) \cos t + (3a + b) \sin t &= 7 \cos t + \sin t. \end{aligned}$$

Tedy musí platit

$$\begin{aligned} a - 3b &= 7 \\ 3a + b &= 1 \end{aligned} \Rightarrow a = 1, b = -2.$$

Celkově $u_1(t) = u(t) + u_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \cos t - 2 \sin t$.

Dosazením obecného řešení $u_1(t)$ za x_1 do první rovnice v 4.21 vypočteme $x_2 = u_2(t)$.

Tedy

$$c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} - \sin t - 2 \cos t = 4c_1 e^t + 4c_2 e^{2t} + 4 \cos t - 8 \sin t - 3u_2(t) + \sin t,$$

$$\text{tj. } u_2(t) = c_1 e^t + \frac{2}{3} c_2 e^{2t} + 2 \cos t - 2 \sin t.$$

Maticově výsledek zapíšeme takto

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \cos t - 2 \sin t \\ c_1 e^t + \frac{2}{3} c_2 e^{2t} + 2 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} \cos t - 2 \sin t \\ 2 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Tedy fundamentální systém řešení homogenní soustavy je

$$\mathbf{u}_1(t) = (e^t, e^t)^T, \quad \mathbf{u}_2(t) = (e^{2t}, \frac{2}{3} e^{2t})^T$$

a fundamentální matici je tvaru

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & \frac{2}{3} e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.6 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_2' &= x_1 + x_3 \\ x_3' &= 6x_1 - 6x_2 + 5x_3. \end{aligned}$$

Vytvoříme rovnici pro x_1 . Derivujeme první rovnici a po dosazení vyjde

$$\begin{aligned} x_1'' &= -3x_1' + 4x_2' - 2x_3' = \\ &= -3(-3x_1 + 4x_2 - 2x_3) + 4(x_1 + x_3) - 2(6x_1 - 6x_2 + 5x_3) = x_1. \end{aligned}$$

Pro x_1 tedy dostáváme (ani není třeba psát systém 4.20 a provádět eliminaci), že

$$x_1'' - x_1 = 0.$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$ a obecné řešení má tvar

$$u_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Po dosazení do první rovnice máme

$$c_1 e^t - c_2 e^{-t} = -3c_1 e^t - 3c_2 e^{-t} + 4x_2 - 2x_3$$

$$\text{a odtud } x_3 = 2x_2 - 2c_1 e^t - c_2 e^{-t}.$$

Z druhé rovnice pak vyjde

$$x_2' = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 2x_2 - 2c_1 e^t - c_2 e^{-t} \Rightarrow x_2' = 2x_2 - c_1 e^t.$$

To je lineární rovnice prvního rádu. Charakteristická rovnice je $\lambda - 2 = 0$, tj. $\lambda = 2$, a obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(t) = c_3 e^{2t}.$$

Dále určíme partikulární řešení nehomogenní rovnice. Pravá strana $-c_1 e^t$ je typu konstanta krát exponenciála, přitom číslo +1 není kořenem charakteristické rovnice. Řešení lze proto najít ve tvaru $u_0(t) = a e^t$. Po dosazení vyjde

$$a e^t = 2a e^t - c_1 e^t \Rightarrow a = 2a - c_1 \Rightarrow a = c_1.$$

Obecný tvar x_2 je tudíž

$$u_2(t) = u(t) + u_0(t) = c_3 e^{2t} + c_1 e^t.$$

Zbývá určit algebraicky $x_3 = u_3(t)$. To lze např. z druhé rovnice zadání dosazením za $x_2 = u_2(t)$, $x_1 = u_1(t)$, odkud ihned vyjde

$$u_3(t) = u_2'(t) - u_1(t) = 2c_3 e^{2t} + c_1 e^t - c_1 e^t - c_2 e^{-t} = -c_2 e^{-t} + 2c_3 e^{2t}.$$

Maticový zápis je

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t & + & c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t & - & c_2 e^{-t} & + & c_3 e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Jak se můžete snadno přesvědčit, v předchozím příkladu by při osamostatnění kterékoliv neznámé došlo k „rozpadnutí“ na jednu rovnici druhého rádu a jednu rovnici prvního rádu. Je snadné si představit, že u systému s větším počtem neznámých by se za této situace stala eliminační metoda velmi nepřehlednou a pracnou.

Cvičení

Řešte uvedené systémy eliminační metodou

Příklad 1 $x'_1 = 4x_1 - 2x_2$
 $x'_2 = x_1 + x_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ x_2 &= c_1 e^{2t} + \frac{1}{2} c_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

Příklad 2 $x'_1 = -3x_1 + 2x_2$
 $x'_2 = -2x_1 + x_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 &= e^{-t}(c_1 + 2c_2 t) \\ x_2 &= e^{-t}(c_1 + c_2(1 + 2t)) \end{bmatrix}$$

Příklad 3 $x'_1 = x_1 + x_2$
 $x'_2 = -2x_1 + 3x_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 &= e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ x_2 &= e^{2t}c_1(\cos t - \sin t) + e^{2t}c_2(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}$$

Příklad 4 $x'_1 = 2x_1 - x_2 + 2$
 $x'_2 = 4x_1 - 2x_2 + 2$

$$\begin{bmatrix} x_1 &= c_1 t + c_2 + t^2 + 2t \\ x_2 &= c_1(2t - 1) + 2c_2 + 2t^2 + 2t \end{bmatrix}$$

Příklad 5 $x'_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4e^{5t}$
 $x'_2 = x_1 + 2x_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 &= c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} + 3e^{5t} \\ x_2 &= -c_1 e^t + c_2 e^{4t} + e^{5t} \end{bmatrix}$$

Příklad 6 $x'_1 = 2x_1 - x_2$
 $x'_2 = -x_1 + 2x_2 - 5e^t \sin t$

$$\begin{bmatrix} x_1 &= c_1 e^t + c_2 e^{3t} + e^t(2 \cos t - \sin t) \\ x_2 &= c_1 e^t - c_2 e^{3t} + e^t(2 \cos t + \sin t) \end{bmatrix}$$

Příklad 7 $x'_1 = x_1 - x_2 + x_3$
 $x'_2 = x_1 + x_2 - x_3$
 $x'_3 = -x_2 + 2x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 &= (c_1 + c_2 t)e^t + c_2 e^{2t} \\ x_2 &= c_1 e^t + c_2(t - 2)e^t \\ x_3 &= c_1 e^t + c_2(t - 1)e^t + c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

Příklad 8 $x'_1 = -x_1 - x_2 + t^2$
 $x'_2 = -x_2 - x_3$
 $x'_3 = -x_3 + t$

$$\begin{bmatrix} x_1 &= -e^{-t}(c_1 t + \frac{1}{2} c_2 t^2 - c_3) + t^2 - t + 1 \\ x_2 &= e^{-t}(c_1 + c_2 t) - t + 2 \\ x_3 &= -c_2 e^{-t} + t - 1 \end{bmatrix}$$

Příklad 9 $6x'_1 = x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 10e^t$
 $2x'_2 = -x_1 - x_2 + x_3$
 $3x'_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 + e^t$

$$\begin{bmatrix} x_1 &= c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + e^t \\ x_2 &= 2c_1 - \frac{1}{2} c_2 (\cos t + \sin t) + \frac{1}{2} c_3 (\cos t - \sin t) \\ x_3 &= 3c_1 + \frac{1}{2} c_2 (\sin t - \cos t) - \frac{1}{2} c_3 (\cos t + \sin t) + e^t \end{bmatrix}$$

Metodou variace konstant řešte následující systémy

Příklad 10 $x'_1 = -3x_1 - 4x_2 + 2t \quad x_1(0) = 0$ $x'_2 = x_1 + x_2 + t \quad x_2(0) = 0 \quad \begin{bmatrix} x_1 = 14(1 - e^{-t}) - 2t(3 + 4e^{-t}) \\ x_2 = -9(1 - e^{-t}) + t(5 + 4e^{-t}) \end{bmatrix}$

Příklad 11 $x'_1 = x_2 + \operatorname{tg}^2 t - 1$ $x'_2 = -x_1 + \operatorname{tg} t \quad \begin{bmatrix} x_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \operatorname{tg} t \\ x_2 = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2 \end{bmatrix}$

Příklad 12 $x'_1 = -x_1 + 2x_2$
 $x'_2 = -3x_1 + 4x_2 + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \quad \begin{bmatrix} x_1 = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t} + 1) + 2e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \\ x_2 = c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t} + 1) + 3e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \end{bmatrix}$

Příklad 13 $x'_1 = -4x_1 - 2x_2 + \frac{2}{e^t - 1} \quad x_1(\ln 2) = 0$
 $x'_2 = 6x_1 + 3x_2 - \frac{3}{e^t - 1} \quad x_2(\ln 2) = 0 \quad \begin{bmatrix} x_1 = 2e^{-t} \ln(e^t - 1) \\ x_2 = -3e^{-t} \ln(e^t - 1) \end{bmatrix}$

Příklad 14 $x'_1 = x_1 - 2x_2 + e^t$ $x'_2 = -3x_1 + 2x_2 + te^t \quad \begin{bmatrix} x_1 = 2c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{9}(3t + 1)e^t \\ x_2 = -3c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}e^t \end{bmatrix}$

Příklad 15 $x'_1 = -x_1 - x_2 + t^2$ $x'_2 = -x_2 - x_3 + 2t$ $x'_3 = -x_3 + t \quad \begin{bmatrix} x_1 = e^{-t}(c_1 t^2 + c_2 t + c_3) + t^2 - 3t + 3 \\ x_2 = e^{-t}(-2c_1 t - c_2) + t \\ x_3 = 2c_1 e^{-t} + t - 1 \end{bmatrix}$

4.4.2 Metoda charakteristických čísel

Uvažujme homogenní lineární soustavu s konstantními koeficienty

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4.23)$$

kterou též nazýváme lineární autonomní soustavou. Ukážeme, že fundamentální systém řešení soustavy 4.23 lze získat algebraickými prostředky.

Hledejme nenulové řešení soustavy ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{v},$$

kde λ je skalár, \mathbf{v} n-rozměrný vektor (sloupcový). Pak $\mathbf{u}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v}$ a dosazením do 4.23 dostaneme

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{A} (e^{\lambda t} \mathbf{v}) = e^{\lambda t} \mathbf{A}\mathbf{v},$$

odkud po vykrácení $e^{\lambda t}$ máme

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \quad (4.24)$$

Z lineární algebry je známo, že číslo λ , k nemuž existuje vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tak, že platí 4.24, se nazývá **charakteristické číslo** (nebo též **vlastní číslo**) **matice \mathbf{A}** a vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pro nějž platí 4.24, se nazývá **charakteristický** (nebo též **vlastní**) **vektor matice \mathbf{A}** , příslušný k charakteristickému číslu λ .

Vektor \mathbf{v} je tedy řešením lineární homogenní soustavy algebraických rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

(\mathbf{I} je jednotková matice n-tého rádu). Soustava 4.25 má netriviální řešení, právě když

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (4.26)$$

Funkce

$$F(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

je algebraický polynom n-tého stupně a nazývá se **charakteristický polynom matice \mathbf{A}** a rovnice

$$F(\lambda) = 0$$

nebo též rovnice 4.26 se nazývá **charakteristická rovnice matice \mathbf{A}** . Charakteristická čísla jsou tedy kořeny charakteristické rovnice. Avšak algebraická rovnice může mít i komplexní kořeny. Proto je účelné uvažovat i komplexní řešení soustavy 4.23. Bude-li λ komplexní charakteristické číslo, pak příslušný charakteristický vektor \mathbf{v} bude rovněž komplexní.

Množina všech charakteristických čísel matice \mathbf{A} (tj. všech kořenů charakteristického polynomu) se nazývá **spektrum matice \mathbf{A}** ; označíme je $\sigma(\mathbf{A})$. Jsou-li všechna charakteristická čísla jednoduchými kořeny charakteristické rovnice, říkáme, že \mathbf{A} má **jednoduché spektrum**.

Je-li λ charakteristické číslo matice \mathbf{A} , je množina všech vektorů $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, pro něž platí 4.25, lineární podprostor \mathbb{C}^n , nazývá se **charakteristický podprostor**. Tento podprostor je tvořen všemi charakteristickými vektory příslušnými k charakteristickému číslu λ a vektorem \mathbf{o} .

Dimenze charakteristického podprostoru je nejvýše rovna násobnosti charakteristického čísla jakožto kořene charakteristické rovnice.

Budeme předpokládat, že matice \mathbf{A} má jednoduché spektrum

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Dimenze každého charakteristického podprostoru je v tomto případě rovna 1.

Nechť \mathbf{v}_i je charakteristický vektor příslušný k charakteristickému číslu λ_i ($i = 1, \dots, n$). Jelikož charakteristické vektory příslušné k různým charakteristickým číslům jsou lineárně nezávislé, vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tvoří bázi prostoru \mathbb{C}^n . Matice

$$\mathbf{U}(t) = (\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n) \quad (4.27)$$

je fundamentální matice soustavy 4.23. Obecné řešení je tedy tvaru

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n, \quad (4.28)$$

kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reálná čísla, pak charakteristické vektory jsou rovněž reálné a v tomto případě bude fundamentální matice 4.27 rovněž reálná.

Nechť nyní $\lambda = \alpha + j\beta$ je komplexní charakteristické číslo matice \mathbf{A} . V teorii komplexní proměnné platí tzv. Eulerův vztah

$$\mathrm{e}^\lambda = \mathrm{e}^{\alpha+j\beta} = \mathrm{e}^\alpha \cdot \mathrm{e}^{j\beta} = \mathrm{e}^\alpha \cdot (\cos \beta + j \sin \beta)$$

Označme $\mathrm{Re} z$ a $\mathrm{Im} z$ reálnou a imaginární část komplexního čísla z . Pak platí

$$\mathrm{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2j},$$

tj. $\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z$ jsou lineárními kombinacemi z a \bar{z} .

Je-li λ charakteristické číslo matice \mathbf{A} , pak i $\bar{\lambda}$ je charakteristické číslo \mathbf{A} a podobně, je-li \mathbf{v} charakteristický vektor odpovídající λ , pak $\bar{\mathbf{v}}$ je charakteristický vektor odpovídající $\bar{\lambda}$. Tedy systém 4.23 má dvojici řešení

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathrm{e}^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad \hat{\mathbf{u}}_2 = \mathrm{e}^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}},$$

a tudíž i řešení

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_2}{2} = \mathrm{Re} \mathrm{e}^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \text{a} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_2}{2j} = \mathrm{Im} \mathrm{e}^{\lambda t} \mathbf{v}.$$

Důležité je, že v tomto případě jsou již $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ reálné funkce.

Příklad 4.7 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + 2x_2 \\x'_2 &= 4x_1 + 3x_2\end{aligned}$$

Matrice soustavy je tvaru $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}F(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\F(\lambda) &= 0 \quad \text{pro} \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1 \\ \sigma(\mathbf{A}) &= \{5, -1\}\end{aligned}$$

Charakteristické vektory jsou pak řešení soustav

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \\(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} + \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\text{tj. } \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

První soustava je tedy tvaru

$$\begin{aligned}-4v_{11} + 2v_{12} &= 0 \\4v_{11} - 2v_{12} &= 0,\end{aligned}$$

obecné řešení je $v_{11} = t, v_{12} = 2t$, volbou $t = 1$ dostáváme $\mathbf{v}_1 = (1, 2)^T$.

Druhá soustava je tvaru

$$\begin{aligned}2v_{21} + 2v_{22} &= 0 \\4v_{21} + 4v_{22} &= 0,\end{aligned}$$

obecné řešení je pak $v_{21} = t, v_{22} = -t$, volbou $t = 1$ dostáváme $\mathbf{v}_2 = (1, -1)^T$.

Tedy obecné řešení systému je

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

$$\begin{aligned}\text{tj. } u_1(t) &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \\u_2(t) &= 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}.\end{aligned}$$

Příklad 4.8 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned}x'_1 &= -7x_1 + x_2 \\x'_2 &= -2x_1 - 5x_2\end{aligned}$$

Matrice soustavy je tvaru $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$$F(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -7 - \lambda & 1 \\ -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37$$

$$\lambda_1 = -6 + j, \quad \lambda_2 = -6 - j, \quad \sigma(\mathbf{A}) = \{-6 + j, -6 - j\}.$$

Stačí najít charakteristický vektor například k $\lambda_1 = -6 + j$.

$$\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} = \mathbf{A} - (-6 + j)\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 - j & 1 \\ -2 & 1 - j \end{pmatrix}$$

Pro charakteristický vektor $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})^T$ platí rovnice

$$(-1 - j)v_{11} + v_{12} = 0 \quad (\text{druhá rovnice je nezávislá}).$$

Charakteristický vektor je tedy například $\mathbf{v}_1 = (1, 1+j)^T$ a charakteristický vektor příslušný k $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ je $\overline{\mathbf{V}_1} = (1, 1-j)^T$.

Soustava má fundamentální systém řešení

$$e^{(-6+j)t} (1, 1+j)^T, \quad e^{(-6-j)t} (1, 1-j)^T.$$

Soustava má ovšem též reálný fundamentální systém řešení

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= \operatorname{Re}(e^{(-6+j)t} (1, 1+j)^T) \\ \mathbf{u}_2(t) &= \operatorname{Im}(e^{(-6+j)t} (1, 1+j)^T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jelikož } e^{(-6+j)t} (1, 1+j)^T &= e^{-6t} \cdot (e^{jt}, (1+j)e^{jt})^T = \\ &= e^{-6t} \cdot (\cos t + j \sin t, \cos t - \sin t + j \cdot (\cos t + \sin t))^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tak } \mathbf{u}_1(t) &= e^{-6t} \cdot (\cos t, \cos t - \sin t)^T \\ \mathbf{u}_2(t) &= e^{-6t} \cdot (\sin t, \cos t + \sin t)^T \end{aligned}$$

Obecné řešení je pak tvaru

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t) = c_1 e^{-6t} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

Podstatně komplikovanější situace nastává, když není možné vytvořit bázi z vlastních vektorů. K tomu dojde, když algebraická násobnost některého charakteristického čísla λ (tj. násobnost tohoto čísla jako kořene charakteristické rovnice) je ostře větší než jeho geometrická násobnost (tj. počet parametrů, které vyjdou při řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{o}$).

V tomto případě je třeba doplnit nezávislou soustavu charakteristických vektorů na tzv. **normální systém**, což je relativně obtížné:

Nechť λ je charakteristické číslo, k němuž přísluší k-členný řetězec tzv. **zobecněných charakteristických vektorů** $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, tedy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1}, \dots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{o},$$

kde \mathbf{v}_1 je charakteristický vektor, pak k sloupců

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \\ \mathbf{u}_2 &= (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) e^{\lambda t} \\ \mathbf{u}_3 &= \left(\frac{t^2}{2} \mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\right) e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_k &= \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \mathbf{v}_1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k\right) e^{\lambda t}\end{aligned}$$

tvoří lineárně nezávislá řešení systému 4.23. Lze dokázat, že systém sloupců, který se stavíme tímto způsobem ze všech řetězců zobecněných charakteristických vektorů, tvoří fundamentální systém řešení soustavy 4.23.

Příklad 4.9 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned}x'_1 &= 17x_1 + 9x_2 \\ x'_2 &= -25x_1 - 13x_2\end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 17 - \lambda & 9 \\ -25 & -13 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Ta má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 2$. Pro charakteristický vektor $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})^T$ máme soustavu $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, tj.

$$\begin{aligned}15v_{11} + 9v_{12} &= 0 \\ -25v_{11} - 15v_{12} &= 0.\end{aligned}$$

Protože jedna rovnice je násobkem druhé, je její obecné řešení tvaru $v_{11} = -\frac{3}{5}t$, $v_{12} = t$, $t \in \mathbb{R}$. Volbou $t = 5$ dostáváme $\mathbf{v}_1 = (-3, 5)^T$. Další nezávislý charakteristický vektor nemáme. Vypočteme tedy zobecněný charakteristický vektor, který bude řešením soustavy $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, tj.

$$\begin{aligned}15v_{21} + 9v_{22} &= -3 \\ -25v_{21} - 15v_{22} &= 5,\end{aligned}$$

Rovnice jsou opět lineárně závislé a jejich obecné řešení je $v_{21} = \frac{-1-3t}{5}$, $v_{22} = t$. Volbou $t = 3$ dostáváme $\mathbf{v}_2 = (-2, 3)^T$.

Fundamentální systém řešení je pak tvaru

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{2t} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{u}_2(t) = (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) e^{2t} = \begin{pmatrix} -3t - 2 \\ 5t + 3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Obecné řešení je tedy

$$\begin{aligned}u_1(t) &= -3c_1 e^{2t} - c_2(3t + 2)e^{2t} \\ u_2(t) &= 5c_1 e^{2t} + c_2(5t + 3)e^{2t}.\end{aligned}$$

Cvičení

Metodou charakteristických čísel řešte dané systémy

Příklad 1 $x'_1 = 2x_1 - 3x_2$ $x'_2 = x_1 - 2x_2$ $\begin{bmatrix} x_1 &= 3c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ x_2 &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{bmatrix}$

Příklad 2 $x'_1 = 2x_1 + x_2$ $x'_2 = -x_1 + 4x_2$ $\begin{bmatrix} x_1 &= (c_1 + c_2 t) e^{3t} \\ x_2 &= (c_1 + c_2 (1+t)) e^{3t} \end{bmatrix}$

Příklad 3 $x'_1 = x_1 + x_2$ $x'_2 = -2x_1 + 3x_2$ $\begin{bmatrix} x_1 &= e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ x_2 &= e^{2t}(c_1(\cos t - \sin t) + c_2(\cos t + \sin t)) \end{bmatrix}$

Příklad 4 $x'_1 = x_1 - x_2 - x_3$ $x'_2 = x_1 + x_2$ $x'_3 = 3x_1 + x_3$ $\begin{bmatrix} x_1 &= (2c_2 \sin 2t + 2c_3 \cos 2t) e^t \\ x_2 &= (c_1 - c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t) e^t \\ x_3 &= (-c_1 - 3c_2 \cos 2t + 3c_3 \sin 2t) e^t \end{bmatrix}$

Příklad 5 $x'_1 = x_1 - x_2 + x_3$ $x'_2 = x_1 + x_2 - x_3$ $x'_3 = -x_2 + 2x_3$ $\begin{bmatrix} x_1 &= (c_1 + c_2 t) e^t + c_3 e^{2t} \\ x_2 &= c_1 e^t + c_2 (t-2) e^t \\ x_3 &= c_1 e^t + c_2 (t-1) e^t + c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$

Příklad 6 $x'_1 = -x_2 - x_3$ $x'_2 = x_2$ $x'_3 = x_3$ $\begin{bmatrix} x_1 &= c_1 + c_2 e^t + c_3 e^t \\ x_2 &= -c_2 e^t \\ x_3 &= -c_3 e^t \end{bmatrix}$

Příklad 7 $x'_1 = -x_2 + x_3$ $x'_2 = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4$ $x'_3 = 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4$ $x'_4 = 2x_2 - 2x_3$ $\begin{bmatrix} x_1 &= c_1(1+2t^2) + 2c_2 t + c_3 + c_4 \\ x_2 &= -2c_1 t - c_2 + c_4 \\ x_3 &= 2c_1 t + c_2 + c_4 \\ x_4 &= -4c_1 t^2 - 4c_2 t - 2c_3 \end{bmatrix}$

4.4.3 Výpočet exponenciály matice

Všimněme si systému $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, když $n = 1$, tj. když jde o jedinou rovnici tvaru $x' = Ax$, kde A je konstanta. To je homogenní lineární rovnice, kterou řešíme jako rovnici se separovanými proměnnými. Tedy

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = At + \ln c \quad \Rightarrow \quad x(t) = c \cdot e^{At}.$$

Tedy fundamentální „matice“ (je jednorozměrná) je e^{At} . Ukazuje se, že i v obecném případě je možné zapsat fundamentální matici ve tvaru exponenciály, je však třeba nejprve vhodně definovat, co exponenciální funkcí z matice budeme rozumět.

Vyjdeme ze známého rozvoje funkce e^t , $t \in \mathbb{R}$, do Taylorovy řady. Platí

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Dosadíme do této řady za t formálně matici \mathbf{At} . Vyjde (za 1 dáme jednotkovou matici \mathbf{I}):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{At})^n}{n!} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{At}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots$$

Dostáváme nekonečnou řadu matic. Ta představuje po složkách n^2 nekonečných řad funkcí jedné reálné proměnné. Lze ukázat, že všechny tyto řady jsou konvergentní pro každé $t \in \mathbb{R}$. Jejich součty vytvoří po složkách novou matici, která se označuje $e^{\mathbf{At}}$. Ta je definovaná pro každé $t \in \mathbb{R}$ a platí

$$(e^{\mathbf{At}})' = \mathbf{A}e^{\mathbf{At}},$$

kde derivaci provádíme jako normálně po složkách. Z přechozího vztahu bezprostředně plyne, že sloupce matice $e^{\mathbf{At}}$ tvoří řešení systému 4.23. Navíc zřejmě $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, tj. tyto sloupce jsou lineárně nezávislé (pro $t = 0$ a tudíž pro každé $t \in \mathbb{R}$) a představují tedy fundamentální systém. Matice $e^{\mathbf{At}}$ je pak fundamentální maticí systému 4.23, která je v nule rovna jednotkové matici.

Máme tedy velice elegantní a stručné označení fundamentální matice systému 4.23. Tento zápis má ale i další přednosti. Pro libovolné čtvercové matice \mathbf{C} a \mathbf{D} , které jsou zaměnitelné (tj. $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$), totiž platí

$$e^{\mathbf{C}}e^{\mathbf{D}} = e^{\mathbf{C}+\mathbf{D}} = e^{\mathbf{D}}e^{\mathbf{C}}.$$

Odtud volbou $\mathbf{C} = \mathbf{At}$, $\mathbf{D} = -\mathbf{At}$ plyne

$$e^{\mathbf{At}}e^{-\mathbf{At}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad (e^{\mathbf{At}})^{-1} = e^{-\mathbf{At}}.$$

Tedy inverzní matice k exponenciále z \mathbf{At} je exponenciála z $-\mathbf{At}$. Použijme tento výsledek na variaci konstant. Ze vzorce 4.17 dostaneme

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{c} + e^{\mathbf{At}} \int e^{-\mathbf{At}} \mathbf{b}(t) dt.$$

Pokusme se vzorec upravit tak, aby dával přímo řešení počáteční úlohy s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Za tím účelem zapíšeme sloupec konstant \mathbf{c} ve tvaru $e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}_0$ a zvolíme tu primitivní funkci k $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{b}(t)$, která je v t_0 rovna nulovému sloupci, tj. $\int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)ds$. Vyjde

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)ds = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s)ds. \quad (4.29)$$

Pro čtenáře obeznámeného s Laplaceovou transformací je vhodné připomenout, že vztah 4.29 má značný význam v teorii systémů, které jsou popsány soustavou lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Zde $\mathbf{b}(t)$ má většinou charakter vstupu. Obvykle se zde předpokládá, že $t_0 = 0$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ (systém je na počátku v klidu) a $t \geq 0$. Pak

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s)ds.$$

Integrál na pravé strná má tvar **konvoluce**. Pro Laplaceův obraz potom platí

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = \mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{b}(t)\} = \mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} \cdot \mathcal{L}\{\mathbf{b}(t)\};$$

zde $*$ značí konvoluci. Matice $\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\}$ se nazývá **přenosová**. Tedy Laplaceův obraz výstupu je roven součinu přenosové matice a Laplaceova obrazu vstupu.

Vraťme se však k otázce nalezení explicitního tvaru $e^{\mathbf{A}t}$. Existuje řada postupů, jak definovat a vyčíslit funkce (ne jen expoenciálu) z matic.

Matici $e^{\mathbf{A}t}$ lze např. určit tak, že najdeme dosud uvedenými metodami fundamentální systém soustavy 4.23, pro něž platí

$$\mathbf{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{x}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Odpovídající fundamentální matice tvořená těmito sloupcemi je vzhledem k jednoznačnosti řešení počáteční úlohy právě $e^{\mathbf{A}t}$.

Existují však i elegantnější metody, založené na následující větě.

Věta 4.4 (Cayley-Hamilton)

Jestliže \mathbf{A} je libovolná čtvercová matice a $\varphi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ její charakteristický mnohočlen, platí

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{O},$$

tj. \mathbf{A} je kořenem svého charakteristického mnohočlenu.

Existuje řada novějších metod, založených na předchozí větě, ale nejsou bohužel příliš známé. My si uvedeme aspoň jeden výsledek, který je zformulován v následující větě.

Věta 4.5 Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice a

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

její charakteristická rovnice. Nechť $x(t)$ je řešení diferenciální rovnice se stejnými koeficienty

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0,$$

které splňuje počáteční podmínky

$$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1.$$

Označme

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Pak je

$$e^{\mathbf{A}t} = z_1(t)\mathbf{I} + z_2(t)\mathbf{A} + \cdots + z_n(t)\mathbf{A}^{n-1}.$$

Z praktického hlediska tedy stačí umět řešit jednu rovnici n-tého řádu. Zcela odpadnou problémy s násobnými kořeny charakteristické rovnice - zatímco u systémů nám značně komplikovaly situaci (mohli jsme mít málo nezávislých vlastních vektorů), u jedné rovnice vyššího řádu nepředstavují vážnější problém.

Příklad 4.10 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x'_2 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x'_3 &= x_1 - x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3.$$

Nyní najdeme řešení rovnice

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 0.$$

Její charakteristická rovnice má trojnásobný kořen $\lambda_{1,2,3} = -1$. Tedy obecné řešení má tvar

$$x(t) = (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^{-t}.$$

Potřebujeme partikulární řešení, pro něž $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 1$. Vypočteme

$$\begin{aligned} x'(t) &= (c_2 + 2c_3t)e^{-t} - (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^{-t}, \\ x''(t) &= 2c_3e^{-t} - 2(c_2 + 2c_3t)e^{-t} + (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^{-t}. \end{aligned}$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 - c_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{2}. \\ 2c_3 - 2c_2 + c_1 &= 1 \end{aligned}$$

Hledané řešení

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} \quad \Rightarrow \quad x'(t) = (t - \frac{1}{2}t^2)e^{-t}, \quad x''(t) = (1 - 2t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t}.$$

Dále určíme

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ (t - \frac{1}{2}t^2)e^{-t} \\ (1 - 2t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t} \\ (t + t^2)e^{-t} \\ \frac{1}{2}t^2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Konečně vypočítáme

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= (1 + t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (t + t^2)e^{-t} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t & -2t \\ t & 1-t & 2t \\ t & -t & 1+2t \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

Obecné řešení má tudiž tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= (c_1(1-t) + c_2t - 2c_3t)e^{-t} \\ x_2 &= (c_1t + c_2(1-t) + 2c_3t)e^{-t} \\ x_3 &= (c_1t - c_2t + c_3(1+2t))e^{-t}. \end{aligned}$$

4.4.4 Metoda neurčitých koeficientů

K nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice máme univerzální metodu variace konstant. Ta je však někdy dost pracná. U lineárních rovnic n-tého řádu s konstantními koeficienty jsme viděli, že je v případě speciálního tvaru pravé strany možné najít partikulární řešení mnohem snáze metodou neurčitých koeficientů. To lze udělat i u systému tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (4.30)$$

kde \mathbf{A} je konstantní matici a prvky $\mathbf{b}(t)$ jsou kvazipolynomy, tj. $\mathbf{b}(t)$ je lineární kombinací funkcí tvaru $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$. respektive $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$. Všimneme si postupně některých speciálních případů.

Věta 4.6 *Nechť $\mathbf{b}(t)$ je sloupec, jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše m . Nechť nula je k -násobný kořen charakteristické rovnice matice \mathbf{A} . Pak existuje partikulární řešení systému 4.30, jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše $m+k$.*

Platí, že $k = 0$, právě tehdy když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Všimněte si, že na rozdíl od jedné rovnice vyššího řádu nelze u systémů předpokládat, že složky řešení jsou tvaru $t^k P_m(t)$, kde $P_m(t)$ je polynom stupně m . V řešení mohou být s nenulovými koeficienty i nižší mocniny než k -té.

Věta platí, i když prvky \mathbf{A} a popřípadě koeficienty polynomů ve složkách $\mathbf{b}(t)$ jsou komplexní čísla.

Příklad 4.11 Najděte partikulární řešení systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 - 3x_2 + t \\ x'_2 &= x_1 + 4x_2 - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Je } \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sloupec $\mathbf{b}(t)$ obsahuje nejvýše lineární polynom, tedy $m = 1, k = 0$. Musí proto existovat řešení tvaru

$$x_1 = at + b, \quad x_2 = ct + d \quad \Rightarrow \quad x'_1 = a, \quad x'_2 = c.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} a &= 2(at + b) - 3(ct + d) + t & \Rightarrow & \quad t(-2a + 3c) + a - 2b + 3d = t \\ c &= at + b + 4(ct + d) - 1 & \Rightarrow & \quad t(-a - 4c) - b + c - 4d = -1. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů vyjde

$$\begin{array}{rcl} -2a & + 3c & = 1 \\ -a & - 4c & = 0 \\ a - 2b & + 3d & = 0 \\ -b + c - 4d & = -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{4}{11}, \quad b = \frac{20}{121}, \quad c = \frac{1}{11}, \quad d = \frac{28}{121}.$$

Partikulární řešení tedy je

$$x_1 = -\frac{4}{11}t + \frac{20}{121}, \quad x_2 = \frac{1}{11}t + \frac{28}{121}.$$

Podobně lze postupovat, když $\mathbf{b}(t)$ obsahuje exponenciály nebo siny a kosiny. Vzhledem ke značné komplikovanosti výpočtu však obvykle postupujeme jinak.

Věta 4.7 *Nechť sloupec pravých stran je tvaru $e^{\alpha t} \mathbf{p}_m(t)$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$ a složky sloupce \mathbf{p}_m jsou polynomy stupně nejvýše m . Pak substituce $\mathbf{x} = e^{\alpha t} \mathbf{u}$ převede systém $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + e^{\alpha t} \mathbf{p}_m(t)$ v nehomogenní systém, kde složky sloupce pravých stran jsou polynomy stupně nejvýše m .*

Důkaz: Protože

$$\mathbf{x}'(t) = (e^{\alpha t} \mathbf{u}(t))' = \alpha e^{\alpha t} \mathbf{u}(t) + e^{\alpha t} \mathbf{u}'(t),$$

vyjde po dosazení

$$\alpha e^{\alpha t} \mathbf{u} + e^{\alpha t} \mathbf{u}' = \mathbf{A} e^{\alpha t} \mathbf{u} + e^{\alpha t} \mathbf{p}_m(t),$$

z čehož po úpravě a vykrácení výrazem $e^{\alpha t} \neq 0$ vyjde

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}) \mathbf{u} + \mathbf{p}_m(t). \quad (4.31)$$

Příklad 4.12 Najděte partikulární řešení systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - 2x_2 + e^t \\ x'_2 &= x_1 + 2x_2 + te^t. \end{aligned}$$

Substitucí $\mathbf{x} = e^t \mathbf{u}$ přejde podle věty 4.7 náš systém v systém 4.31, tj.

$$\begin{aligned} u'_1 &= -2u_2 + 1 \\ u'_2 &= u_1 + u_2 + t. \end{aligned}$$

Ten má podle věty 4.6 ($m = 1, k = 0$) řešení tvaru

$$u_1 = at + b, \quad u_2 = ct + d \quad \Rightarrow \quad u'_1 = a, \quad u'_2 = c$$

a po dosazení vychází

$$\begin{aligned} a &= -2(ct + d) + 1 \\ c &= at + b + ct + d + t. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} 2c &= 0 \\ -a - c &= 1 \\ a + 2d &= 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1, \quad b = -1, \quad c = 0, \quad d = 1. \\ -b - d &= 0 \end{aligned}$$

Tedy $u_1 = -t - 1, u_2 = 1$ a partikulární řešení daného systému je

$$x_1 = -(t + 1)e^t, \quad x_2 = e^t.$$

Nakonec si všimneme případu pro siny a kosiny. Užitím předchozí věty a Eulerova vzorce se snadno odvodí následující tvrzení

Věta 4.8 Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{p}(t)$ je sloupec, jehož prvky jsou polynomy. Je-li $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + j\mathbf{x}_2$ řešení systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{p}(t)e^{(\alpha+\beta j)t},$$

je $\mathbf{x}_1 = \operatorname{Re} \mathbf{x}$ řešením systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{p}(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$$

a $\mathbf{x}_2 = \operatorname{Im} \mathbf{x}$ je řešením systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{p}(t)e^{\alpha t} \sin \beta t$$

Příklad 4.13 Najděte partikulární řešení systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 + \cos t \\ x'_2 &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Položme $\alpha = 0, \beta = 1, \mathbf{p}(t) = (1, 0)^T$. Podle věty 4.8 budeme řešit systém

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 + e^{jt} \\ x'_2 &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Nyní zavedeme podle věty 4.7 substituci $\mathbf{x} = \mathbf{ue}^{jt}$. Systém 4.31 má tvar

$$\begin{aligned} u'_1 &= -ju_1 + u_2 + 1 \\ u'_2 &= u_1 - (1+j)u_2. \end{aligned}$$

Ten má podle věty 4.6 ($m = 0, k = 0$) řešení tvaru

$$u_1 = a, \quad u_2 = b, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Po dosazení vyjde

$$\begin{aligned} 0 &= -ja + b + 1 \\ 0 &= a - (1+j)b. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice dosadíme $a = (1+j)b$ do první a dostaneme

$$0 = -j(1+j)b + b + 1 \Rightarrow b = \frac{-1}{2-j} = -\frac{2+j}{(2-j)(2+j)} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}j.$$

Pak $a = (1+j)b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}j$. Proto

$$u_1 = -\frac{1}{5}(1+3j)e^{jt}, \quad u_2 = -\frac{1}{5}(2+j)e^{jt}.$$

Pomocí Eulerova vztahu vyjde

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{5}(1+3j)(\cos t + j \sin t) = -\frac{1}{5} \cos t + \frac{3}{5} \sin t + j(-\frac{3}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t) \\ u_2 &= -\frac{1}{5}(2+j)(\cos t + j \sin t) = -\frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + j(-\frac{1}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t). \end{aligned}$$

Vypočteme reálné části (viz věta 4.8) a dostaneme hledané řešení:

$$x_1 = \operatorname{Re} u_1 = -\frac{1}{5} \cos t + \frac{3}{5} \sin t, \quad x_2 = \operatorname{Re} u_2 = -\frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t.$$

Je-li $\mathbf{b}(t)$ součtem několika typů speciálních pravých stran, použijeme princip superpozice. Např. bychom rozdělili

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + e^t \cos 2t - 4 \sin t \\ 2 - \cos t + 6e^t \\ 3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

a určili postupně pět partikulárních řešení.

Z předchozích výsledků vyplývá, že všechna řešení systému 4.30, kde složky $\mathbf{b}(t)$ jsou kvazipolynomy, jsou opět kvazipolynomy. Speciálně to tedy platí pro homogenní systémy. To umožňuje využít pro řešení Laplaceovu transformaci.

Jak jsme již konstatovali dříve, jsou uvedené metody efektivní jen zdánlivě. U systémů větších rozměrů totiž obecně ztroskotáme na nalezení kořenů charakteristické rovnice. Přesto jsou tyto výsledky nesmírně důležité. Dávají nám totiž velmi podrobné informace o struktuře řešení systémů s konstantními koeficienty (které často slouží jako approximace nelineárních systémů). To umožňuje usuzovat na chování těchto lineárních systémů. Např. existují metody, které umožňují efektivně a celkem snadno zjistit, zda všechny kořeny (charakteristického) polynomu leží ve vymezené části komplexní roviny, např. vlevo od imaginární osy (tzv. **Hurwitzovo kritérium**). To ovšem znamená, že všechny složky řešení obsahují exponenciály tvaru $e^{\alpha t}$ se záporným α . Pak pro $t \rightarrow \infty$ konvergují všechna řešení k nule. To je podstatná informace u reálných systémů (jsou tzv. **asymptoticky stabilní**, tj. mají tendenci se ustalovat).

Cvičení

Metodou neurčitých koeficientů vypočtěte partikulární řešení systémů

Příklad 1 $x'_1 = 2x_1 + 4x_2 - 8$ $[\mathbf{u}_0(t) = (-6t + 1, 3t)^T]$
 $x'_2 = 3x_1 + 6x_2$

Příklad 2 $x'_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4e^{5t}$ $[\mathbf{u}_0(t) = (3e^{5t}, e^{5t})^T]$
 $x'_2 = x_1 + 2x_2$

Příklad 3 $x'_1 = 2x_1 - x_2$ $[\mathbf{u}_0(t) = (e^t(2 \cos t - \sin t), e^t(2 \cos t + \sin t))^T]$
 $x'_2 = -x_1 + 2x_2 - 5e^t \sin t$

Příklad 4 $x'_1 = 2x_1 + 3x_2 + 5t$ $[\mathbf{u}_0(t) = (-3e^t + 2t - \frac{13}{5}, e^t - 3t + \frac{12}{5})^T]$
 $x'_2 = 3x_1 + 2x_2 + 8e^t$

Příklad 5 $x'_1 = x_2 + \sin t$ $[\mathbf{u}_0(t) = (t \sin t, t \cos t)^T]$
 $x'_2 = -x_1 + \cos t$

Příklad 6 $x'_1 = x_1 - x_2$

$$x'_2 = x_2 - x_3$$

$$x'_3 = -x_1 + x_3 + t$$

$$[\mathbf{u}_0(t) = (\frac{1}{6}(t^2 + 2t + 2), \frac{1}{6}t^2, \frac{1}{6}(t^2 - 2t))^T]$$

Příklad 7 $6x'_1 = x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 10e^t$

$$2x'_2 = -x_1 - x_2 + x_3$$

$$3x'_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 + e^t$$

$$[\mathbf{u}_0(t) = (e^t, 0, e^t)^T]$$

4.5 Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic

Uvažujme systém diferenciálních rovnice ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (4.32)$$

Daný konkrétní systém 4.32 může být matematickým modelem celé řady různých mechanických, elektrotechnických, biologických a jiných systémů. Chování těchto systémů je pak popsáno vlastním řešením systému 4.32, který může mít obecně nekonečně mnoho řešení, odpovídajících různým volbám jeho počátečního stavu.

U většiny systémů požadujeme, aby jejich chování bylo v nějakém smyslu blízké jednomu předem danému chování systému (např. setrvání v klidu, v periodickém pohybu, apod.).

Předpokládejme, že 4.32 je matematickým modelem nějakého fyzikálního systému S , jehož jeden pracovní režim je popsán daným řešením \mathbf{v} systému 4.32. To znamená, že pro každé t udává vektor $\mathbf{v}(t)$ hodnoty stavových proměnných v okamžiku t . V počátečním okamžiku t_0 nabývají stavové proměnné systému S hodnotu $\mathbf{v}(t_0)$.

V praxi však tyto počáteční hodnoty stavových proměnných systému S získáme zpravidla měřením a takto naměřené hodnoty \mathbf{x}_0 jsou pouze aproximacemi skutečných hodnot $\mathbf{v}(t_0)$. Spojitá závislost řešení na počáteční hodnotě zaručuje, že chyba, které se dopustíme při měření počátečních hodnot, nezkreslí podstatně informaci o charakteru vyšetřovaného řešení na konečném časovém intervalu.

Přesněji, ke každému předem danému intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, t_1) > 0$ tak, že když naměřené počáteční hodnoty \mathbf{x}_0 stavových proměnných \mathbf{x} se budou v okamžiku t_0 lišit od skutečných počátečních hodnot $\mathbf{v}(t_0)$ o méně než δ , budou se vypočtené hodnoty $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ stavových proměnných v okamžiku t lišit od skutečných hodnot stavových proměnných $\mathbf{v}(t) \forall t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ o méně než ε .

Velikou závadou tohoto odhadu je závislost odchylky δ počátečních hodnot na délce časového intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$. Se zvětšováním délky intervalu jsme zpravidla nuceni zmenšovat číslo δ .

Z fyzikálních a technických důvodů je přirozené požadovat, aby číslo δ bylo dostatečně veliké i pro libovolně veliké délky časových intervalů $t_1 - t_0$. Proto se studuje taková závislost řešení na počátečních údajích t_0, \mathbf{x}_0 , ve které odchylka δ závisí pouze na počátečním

okamžiku t_0 a přípustné odchylce řešení ε a nezávisí na délce časového intervalu $t_1 - t_0$. Studium takové závislosti představuje náplň teorie stability.

Uvedeme ještě jeden pohled na problematiku stability.

Předpokládejme, že na fyzikální systém S , popsaný přibližně systémem 4.32, působí nějaké poruchy vyvolané zásahy, které nejsme schopni do modelu zahrnout a při sestavování rovnic 4.32 je zanedbáváme. Kdybychom je totiž chtěli respektovat, pak bychom museli v každém okamžiku, ve kterém poruchy působí, provádět na našem modelu korekci např. v nastavení okamžitých hodnot stavových proměnných. To je velmi obtížně realizovatelné, a proto je vhodnější tyto poruchy zanedbat a určit, jak velké chyby se tímto zjednodušením dopouštíme. To je opět problematika, která spadá do rámce teorie stability.

V následujícím textu se budeme zabývat studiem různých typů stability řešení systému 4.32 a budeme předpokládat, že $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ má **triviální řešení**, které budeme značit \mathbf{o} .

Nejdříve ukážeme, že omezení našich úvah na studium stability triviálního řešení \mathbf{o} nikterak nezmenšuje obecnost dalších úvah a přitom značně zjednoduší symboliku i formulace.

Předpokládejme, že chceme vyšetřovat řešení \mathbf{v} systému

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) \quad (4.33)$$

definované na nějakém intervalu I . Proveďme v systému 4.33 substituci

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v}. \quad (4.34)$$

Jelikož funkce \mathbf{v} je řešením systému 4.33, platí

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{v}(t)) \quad \forall t \in I,$$

a tedy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{y}' - \mathbf{v}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{v}) \quad (4.35)$$

Označíme-li

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{v}),$$

dostaneme z 4.35 systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}, \quad (4.36)$$

takže systém 4.36 má triviální řešení \mathbf{o} . Na toto triviální řešení se transformací 4.34 zobrazuje řešení \mathbf{v} systému 4.33. Vyšetříme-li vlastnosti triviálního řešení \mathbf{o} systému 4.36, pak pomocí transformace 4.34 můžeme vysledky přenést na řešení \mathbf{v} systému 4.33.

Předpokládejme v následujícím, že existuje interval $I = (\alpha, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a oblast $H \subset \mathbb{R}^n$ obsahující počátek tak, že zobrazení \mathbf{f} je spojité na oblasti $G = I \times H$ a pro každý bod $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ je Cauchyova úloha

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.37)$$

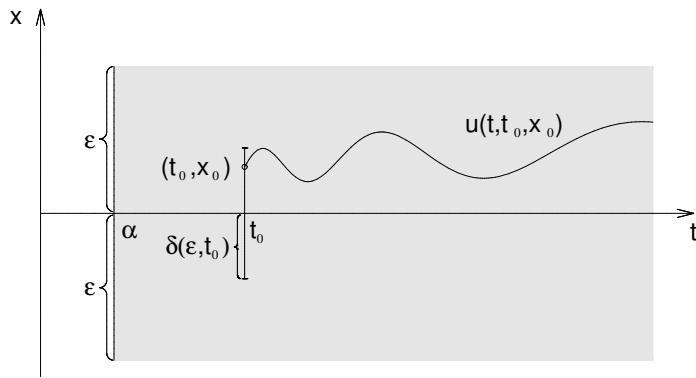
jednoznačně řešitelná a nechť $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o} \quad \forall t > \alpha$.

Definice 4.3 Řekneme, že triviální řešení $\mathbf{0}$ systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (4.38)$$

je **stabilní** (viz obrázek 4.3), jestliže ke každému $t_0 > \alpha$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tak, že pro všechny počáteční hodnoty $\mathbf{x}_0 \in H$, $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ a pro všechna $t \geq t_0$ platí, že řešení $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ Cauchyovy úlohy 4.37 splňuje nerovnost

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon. \quad (4.39)$$



Obrázek 4.3: Triviální řešení je stabilní.

Příklad 4.14 Ukažte, že triviální řešení rovnice

$$x' = kx$$

je stabilní pro každé $k \leq 0$.

Řešení: Funkce $f(t, x) = kx$ je spojitá a lipschitzovská vzhledem k proměnné x pro všechna $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Můžeme tedy volit $\alpha = -\infty$, $I = (-\infty, \infty)$, $H = \mathbb{R}$, $G = I \times \mathbb{R}$. Cauchyova úloha

$$x' = kx, \quad x(t_0) = x_0$$

má řešení $u(t, t_0, x_0) = x_0 e^{k(t-t_0)}$, $t \in I$.

Tedy $|u(t, t_0, x_0)| = |x_0| \cdot e^{k(t-t_0)} \leq |x_0|$ pro všechna $k \leq 0$, $t \geq t_0$.

Zvolíme-li $\delta = \varepsilon$, bude podle 4.39 platit

$$|u(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0, k \leq 0, |x_0| < \delta.$$

Tedy triviální řešení je stabilní.

Příklad 4.15 Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -x_1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

je stabilní.

Rешení: Cauchyova úloha pro systém 4.40 s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}, x_2(t_0) = x_{02}$ má pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} x_{01} \cos(t - t_0) + x_{02} \sin(t - t_0) \\ -x_{01} \sin(t - t_0) + x_{02} \cos(t - t_0) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro normu řešení dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| &= |x_{01} \cos(t - t_0) + x_{02} \sin(t - t_0)| + |-x_{01} \sin(t - t_0) + x_{02} \cos(t - t_0)| \leq \\ &\leq |x_{01}| + |x_{02}| + |x_{01}| + |x_{02}| = 2(|x_{01}| + |x_{02}|) = 2\|\mathbf{x}_0\|. \end{aligned}$$

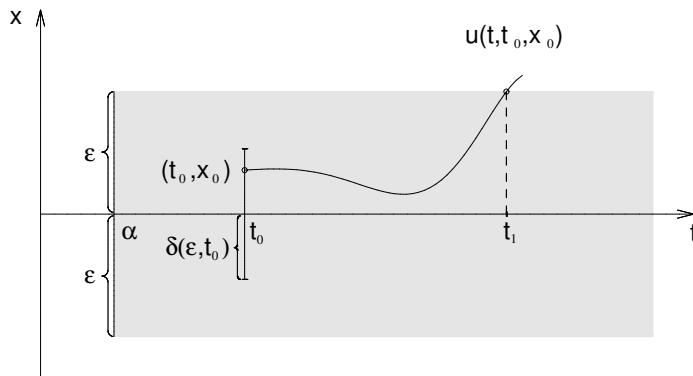
Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dostaneme

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq 2\|\mathbf{x}_0\| < 2\delta = \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0.$$

Tedy triviální řešení je stabilní.

Triviální řešení, které není stabilní, nazveme **nestabilním**.

Volně můžeme říci, že triviální řešení systému 4.38 je nestabilní právě tehdy, existuje-li okamžik t_0 a číslo $\varepsilon > 0$ tak, že v každém libovolně malém okolí počátku existuje bod \mathbf{x}_0 tak, že řešení $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ se vzdálí od triviálního řešení o více než ε , neboli existuje $t_1 > t_0$ tak, že $\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon$ pro $t > t_1$ (viz obrázek 4.4).



Obrázek 4.4: Triviální řešení není stabilní.

Příklad 4.16 Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

je nestabilní.

Řešení: Cauchyova úloha pro systém 4.41 s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}, x_2(t_0) = x_{02}$ má řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, x_0) = \frac{1}{2} \left((x_{01} + x_{02}) e^{t-t_0} + (x_{01} - x_{02}) e^{-(t-t_0)}, (x_{01} + x_{02}) e^{t-t_0} - (x_{01} - x_{02}) e^{-(t-t_0)} \right)$$

Zvolme $\varepsilon = 1$, $t_0 = 0$, pak pro libovolné $\delta > 0$ můžeme volit $\mathbf{x}_0 = (\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})^T$, $t_1 > -\ln \frac{\delta}{2}$ a dostaneme odhad

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0)\| &= \|\mathbf{u}(t_1, 0, \mathbf{x}_0)\| = \left\| \frac{1}{2} (\delta e^{t_1}, \delta e^{t_1}) \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \delta e^{t_1} \cdot \|(1, 1)\| = \frac{1}{2} \delta e^{t_1} (|1| + |1|) = \delta e^{t_1} > \delta e^{-\ln \frac{\delta}{2}} = \delta \cdot \frac{2}{\delta} = 2 > \varepsilon. \end{aligned}$$

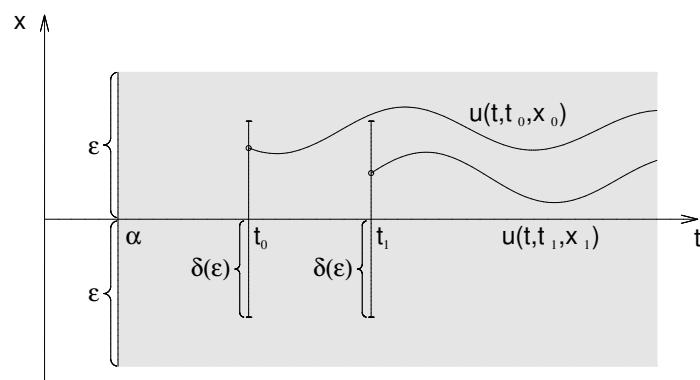
Triviální řešení systému 4.41 je nestabilní.

Definice 4.4 Řekneme, že triviální řešení systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

je **stejnoměrně stabilní** (viz obrázek 4.5), jestliže je stabilní a číslo δ v definici 4.3 nezávisí na volbě počátečního okamžiku t_0 , tj. když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{x}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, vyhovující nerovnostem $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, $t \geq t_0 > \alpha$ platí

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$



Obrázek 4.5: Triviální řešení je stejnoměrně stabilní.

Všimneme-li si podrobněji příkladů 4.14, 4.15, 4.16, zjistíme, že triviální řešení ve všech případech jsou stejnoměrně stabilní, neboť δ závisí pouze na ε a nikoli na t_0 . Tuto vlastnost mají všechny autonomní systémy, tj. systémy tvaru $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Platí, že když triviální řešení autonomního systému je stabilní, pak je stejnoměrně stabilní. Pro neautonomní systémy to neplatí.

Příklad 4.17 Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1 \\ x'_2 &= (\sin \ln t + \cos \ln t - 1)x_2 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}, x_2(t_0) = x_{02}$.

Pak pro každé $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^2, I = (1, \infty)$, má úloha řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = (x_{01} e^{-t+t_0}, x_{02} e^{-t(1-\sin \ln t)+t_0(1-\sin \ln t_0)}) , \quad t > 1 .$$

Pro normu tohoto řešení dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| &= |x_{01} e^{-(t-t_0)}| + |x_{02} e^{-t(1-\sin \ln t)+t_0(1-\sin \ln t_0)}| \leq \\ &\leq |x_{01}| + |x_{02}| e^{2t_0} \leq (|x_{01}| + |x_{02}|) e^{2t_0} = \|\mathbf{x}_0\| e^{2t_0} \quad \text{pro všechna } t \geq t_0 . \end{aligned}$$

Vidíme, že v odhadu se vyskytuje jak počáteční hodnota \mathbf{x}_0 , tak i počáteční okamžik t_0 . Zvolíme-li např. $\delta = \varepsilon e^{-2t_0}$, dostaneme

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| e^{2t_0} < \delta e^{2t_0} = \varepsilon e^{-2t_0} \cdot e^{2t_0} = \varepsilon .$$

Je tedy triviální řešení stabilní, nikoli však stejnoměrně stabilní.

Definice 4.5 Řekneme, že triviální řešení systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

je **asymptoticky stabilní** (viz obrázek 4.6), jestliže

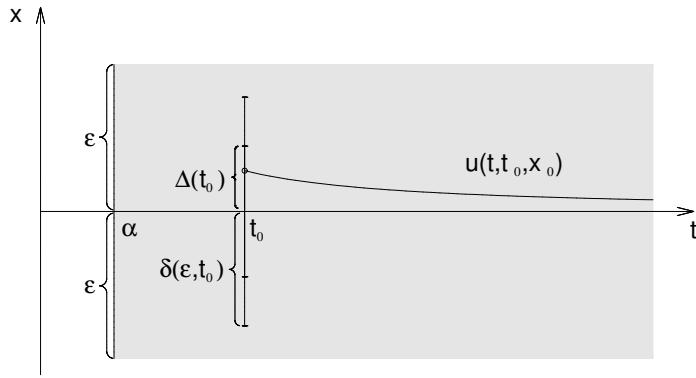
i) je stabilní

ii) existuje číslo $\Delta > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{x}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$ a každé $t_0 > \alpha$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0 .$$

Analogickým způsobem definujeme **stejnoměrnou asymptotickou stabilitu** triviálního řešení systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Podmínka ii) v definici 4.5 znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$, $t_0 > \alpha$, $\mathbf{x}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$, existuje číslo $T = T(\varepsilon, t_0, \mathbf{x}_0)$ tak, že pro všechna $t > t_0 + T$ je $\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$.



Obrázek 4.6: Triviální řešení je asymptoticky stabilní.

Příklad 4.18 Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

není asymptoticky stabilní.

Řešení: V příkladu 4.15 jsme ukázali, že triviální řešení je stabilní (dokonce je stejněměřně stabilní). Musíme tedy ukázat, že není splněna podmínka ii) v definici 4.5. Řešením Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 & x_1(t_0) &= x_{01} \\ x'_2 &= -x_1 & x_2(t_0) &= x_{02} \end{aligned}$$

je vektorová funkce

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = (x_{01} \cos(t - t_0) + x_{02} \sin(t - t_0), -x_{01} \sin(t - t_0) + x_{02} \cos(t - t_0)) , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Pro normu tohoto řešení (použijeme euklidovskou normu) dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| &= ((u_1(t, t_0, \mathbf{x}_0))^2 + (u_2(t, t_0, \mathbf{x}_0))^2)^{1/2} = \\ &= (x_{01}^2 \cos^2(t - t_0) + 2x_{01}x_{02} \cos(t - t_0) \sin(t - t_0) + x_{02}^2 \sin^2(t - t_0) + \\ &\quad + x_{01}^2 \sin^2(t - t_0) - 2x_{01}x_{02} \sin(t - t_0) \cos(t - t_0) + x_{02}^2 \cos^2(t - t_0))^{1/2} = \\ &= (x_{01}^2 + x_{02}^2)^{1/2} = \|\mathbf{x}_0\| , \end{aligned}$$

takže pro $\|\mathbf{x}_0\| \neq 0$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{x}_0\| \neq 0 .$$

Tedy triviální řešení není asymptoticky stabilní.

Dá se dokázat, že při ověřování podmínek stability triviálního řešení stačí podmínky ověřit pro jedno libovolné $t_0 > \alpha$ a pak už musí platit pro všechna $t > \alpha$.

Cvičení

Vyšetřete z hlediska stability triviální řešení systémů:

Příklad 1 $\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$ [Stejnoměrně asymptoticky stabilní]

Příklad 2 $\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$ [Nestabilní]

Příklad 3 $\begin{aligned} x'_1 &= -3x_2 \\ x'_2 &= 3x_1 \end{aligned}$ [Stejnoměrně stabilní]

4.5.1 Stabilita lineárních systémů

Uvažujme nyní nehomogenní lineární systém diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (4.42)$$

kde $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Pak libovolné řešení $\mathbf{u}(t)$ systému 4.42 je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní, právě když triviální řešení homogenního systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$$

je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní.

V lineárních systémech nastane tedy právě jeden z těchto případů:

- I) Všechna řešení jsou stabilní.
- II) Všechna řešení jsou asymptoticky stabilní.
- III) Všechna řešení jsou nestabilní.

Proto v případě I) říkáme, že lineární systém je stabilní, v případě II) říkáme, že lineární systém je asymptoticky stabilní, a v případě III) říkáme, že lineární systém je nestabilní. Při vyšetřování stability nehomogenního systému 4.42 se tedy stačí omezit na vyšetřování stability triviálního řešení systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (4.43)$$

Věta 4.9 Triviální řešení systému 4.43 je stabilní právě tehdy, když existuje $K > 0$ tak, že

$$\|\mathbf{U}(t)\| \leq K, \quad t \in I,$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matici řešení systému 4.43.
(Tedy každé řešení systému je ohrazené.)

Odtud plyne, že je-li nehomogenní systém 4.42 stabilní, pak jsou buď všechna řešení ohraničená, nebo neohraničná pro $t \rightarrow \infty$.

Poznamenejme ještě, že u nelineárních systémů z ohraničnosti všech jeho řešení neplyne obecně jejich stabilita.

Věta 4.10 *Triviální řešení systému 4.43 je asymptoticky stabilní právě tehdy, když*

$$\|\mathbf{U}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow \infty,$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matici řešení systému 4.43.

(Tedy všechna řešení systému 4.43 konvergují pro $t \rightarrow \infty$ k nule.)

Uvažujme nyní homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4.44}$$

kde \mathbf{A} je konstantní reálná čtvercová matici typu (n, n) .

V tomto případě je systém 4.44 speciálním případem autonomního systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Tedy stabilita triviálního řešení systému 4.44 je ekvivalentní s jeho stejnomořnou stabilitou a podobně asymptotická stabilita triviálního řešení systému 4.44 je ekvivalentní se stejnomořnou asymptotickou stabilitou.

Věta 4.11 *Nechť je dán systém 4.44. Jestliže všechna charakteristická čísla matice \mathbf{A} mají záporné reálné části, pak triviální řešení daného systému je stejnomořně asymptoticky stabilní. Existuje-li charakteristické číslo matice \mathbf{A} s kladnou reálnou částí, pak triviální řešení je nestabilní.*

Poznámka. O stabilitě lineárního systému 4.44 nelze rozhodnout pomocí věty 4.11 v případě, že žádné charakteristické číslo matice \mathbf{A} nemá kladnou reálnou část, ale mezi charakteristickými čísly se vyskytují čísla s nulovou reálnou částí.

V tomto případě může být lineární systém stabilní nebo nestabilní. Podmínky stability, resp. instability, uvedené ve větě 4.11 jsou tedy postačující, nikoli nutné.

Podmínky asymptotické stability jsou nutné a postačující.

Lze dokázat, že v případě, že všechna charakteristická čísla matice \mathbf{A} mají záporné nebo nulové reálné části, přičemž všechna charakteristická čísla s nulovou reálnou částí mají násobnost jedna, je uvažovaný lineární systém stabilní (nikoli však asymptoticky stabilní).

4.5.2 Hurwitzovo kritérium

Jelikož charakteristická čísla systému 4.44 jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n,$$

budou nás zajímat polynomy, jejichž všechny nulové body mají záporné reálné části. Takové polynomy se nazývají **hurwitzovské polynomy** a příslušné kritérium **Hurwitzovo kritérium**:

Nechť je dán polynom

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n, \quad n \geq 1, \quad a_0 > 0, \quad a_n \neq 0 \quad (4.45)$$

s reálnými koeficienty. **Hurwitzovou maticí** polynomu 4.45 nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

kde klademe $a_s = 0$ pro $s < 0$ a $s > n$. Platí toto tvrzení:

Všechny nulové body polynomu 4.45 mají záporné reálné části právě tehdy, když determinanty $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ jsou kladné, přičemž

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & \cdots & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Mají-li všechny nulové body polynomu 4.45 záporné reálné části, musí být všechny jeho koeficienty a_j , $j = 0, \dots, n$, kladné.

Dá se ukázat, že pro $n = 2$ je tato podmínka i postačující, tj. že polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ je hurwitzovský právě tehdy, když $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Pro polynomy vyšších stupňů je tato podmínka pouze nutná. Tak například polynom

$$f(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$$

má nulové body $-3, 1+3j, 1-3j$, tedy dva kořeny mají kladné reálné části, i když všechny koeficienty daného polynomu jsou kladné.

Příklad 4.19 Zjistěte, zda polynom

$$f(z) = 3 + 2z + 7z^2 + 3z^3 + z^4$$

je hurwitzovský.

Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 7, a_3 = 3, a_4 = 1$, tedy

$$\Delta_1 = a_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3 = 11 > 0.$$

Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny, takže polynom je hurwitzovský.

Příklad 4.20 Vyšetřete stabilitu systému

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + x_2 \\x'_2 &= x_2 \\x'_3 &= x_4 \\x'_4 &= 0\end{aligned}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)^2.$$

Tedy charakteristická čísla matici \mathbf{A} jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Matica \mathbf{A} má charakteristické číslo s kladnou reálnou částí, tedy systém je nestabilní.

Příklad 4.21 Vyšetřete stabilitu řešení $\mathbf{u}(t) = (\sin t, t + \cos t, 1 + \sin t)^T$ systému

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

Řešení: Stačí vyšetřit stabilitu triviálního řešení homogeného systému

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0$$

Tedy $\lambda_1 = j, \lambda_2 = -j, \lambda_3 = 1$. Protože existuje charakteristické číslo matici \mathbf{A} s kladnou reálnou částí, je triviální řešení homogeného systému nestabilní a tudíž i řešení $\mathbf{u}(t)$ daného nehomogenního systému je nestabilní.

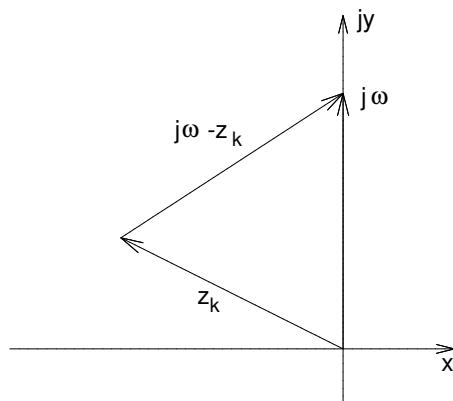
4.5.3 Michajlovovo kritérium

Uvažujme polynom

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \tag{4.47}$$

který nemá kořeny ležící na imaginární ose. Rozložme polynom $P(z)$ na součin kořenových činitelů, tj.

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$



Nechť bod $z = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, se pohybuje zdola nahoru po imaginární ose. Z obrázku je zřejmé, že když $\operatorname{Re} z_k < 0$, tak při změně ω od $-\infty$ do $+\infty$ se vektor $z - z_k = j\omega - z_k$ otočí o úhel π proti směru hodinových ručiček a funkce $\arg(z - z_k)$ má přírůstek $+\pi$. Jestliže tedy všechny kořeny polynomu $P(z)$ mají záporné reálné části, argument polynomu $P(z)$ bude mít přírůstek $n\pi$, protože přírůstek argumentu součinu se rovná součtu přírůstků argumentů jednotlivých činitelů.

Kdyby alespoň jeden z kořenů z_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ měl kladnou reálnou část, přírůstek argumentu činitele $z - z_j$ by měl hodnotu $-\pi$ (odpovídající vektor se otáčí ve směru pohybu hodinových ručiček) a přírůstek argumentu polynomu $P(z)$ by byl menší než $n\pi$.

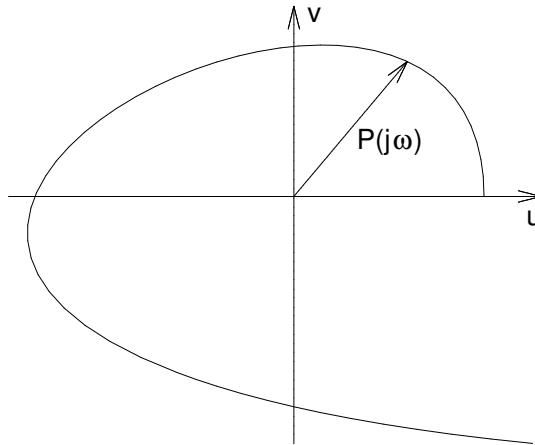
Dosadíme nyní do 4.47 $z = j\omega$. Pak platí

$$P(j\omega) = u(\omega) + j v(\omega),$$

$$\text{kde } u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots$$

$$v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots$$

$P(j\omega)$ pak reprezentuje vektor v komplexní rovině (u, v) . Při změně parametru ω od $-\infty$ do $+\infty$ vytváří koncový bod daného vektoru křivku, kterou nazýváme **hodografem** vektorové funkce $w = P(j\omega)$ (nebo též Michajlovovou křivkou), viz obrázek 4.7.



Obrázek 4.7: Michajlovova křivka

Tedy pro $\omega \in (-\infty, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel φ . Jestliže polynom $P(z)$ má m kořenů s kladnou reálnou částí a $n - m$ kořenů se zápornou reálnou částí, pak

$$\varphi = (n - m)\pi + m(-\pi) = (n - 2m)\pi.$$

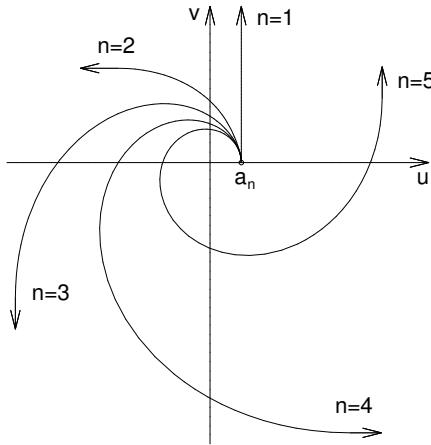
Jelikož funkce $u(\omega)$ je sudá, Michajlovova křivka je symetrická podle osy u , což znamená, že můžeme konstruovat Michajlovou křivku pouze pro $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$, přičemž

$$\varphi = (n - m)\frac{\pi}{2} + m \cdot (-\frac{\pi}{2}) = (n - 2m)\frac{\pi}{2}. \quad (4.48)$$

Již víme, že řešení systému 4.42 je asymptoticky stabilní, jestliže všechny kořeny příslušné charakteristické rovnice mají záporné reálné části, tj. m se musí v 4.48 rovnat nule, což vede k následujícímu kritériu stability.

Michajlovovo kritérium. Polynom 4.47 je Hurwitzův, jestliže Michajlovova křivka pro $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ neprochází počátkem a platí $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$.

Na obrázku 4.8 jsou zobrazeny typické Michajlovovy křivky pro polynomy stupňů $n = 1, 2, 3, 4, 5$ v případě, že všechny kořeny mají zápornou reálnou část.



Obrázek 4.8: Michajlovovy křivky pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Příklad 4.22 Michajlovovým kritériem rozhodněte o stabilitě systému

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ x'_3 &= x_4 \\ x'_4 &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4. \end{aligned}$$

Řešení: Charakteristická rovnice je tvaru

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \omega^4 - 2j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 1, \\ u(\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1 \\ v(\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1 - \omega^2) = 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega). \end{aligned}$$

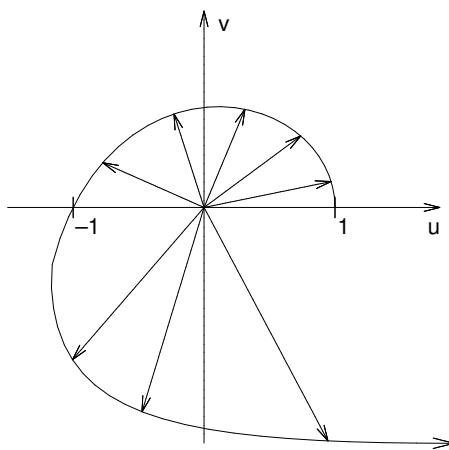
Hledejme nyní kořeny rovnic $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$, $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$.

$$\begin{aligned} u(\omega) = 0 &\Leftrightarrow \omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ v(\omega) = 0 &\Leftrightarrow 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega) = 0 \Rightarrow \omega_3 = 0, \omega_4 = 1. \end{aligned}$$

Sestavme tabulkou hodnot $u = u(\omega)$, $v = v(\omega)$ pro vypočtené hodnoty parametru ω , a to vzestupně vzhledem k ω :

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	∞
u	1	0	-1	0	+
v	0	+	0	-	-

K průběhu Michajlovovy křivky nám stačí určit pouze znaménka funkčních hodnot včetně případu, kdy $\omega \rightarrow \infty$. Jelikož $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{v}{u} = 0$, průběh Michajlovovy křivky lze znázornit následovně:



Obrázek 4.9: Michajlovova křivka k příkladu 4.22

Tedy pro $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel $\varphi = 2\pi$. Aby polynom $P(\lambda)$ byl dle Michajlovova kritéria hurwitzovský, musí v našem případě platit $\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, což je splněno. Odtud plyne, že vyšetřovaný systém je asymptoticky stabilní.

Z výše uvedeného vyplývá, že jsou-li všechny reálné části kořenů polynomu 4.47 záporné, platí:

- 1) Při pohybu ω od 0 do ∞ se bude vektor $w = P(j\omega)$ otáčet pouze proti směru pohybu hodinových ručiček a Michajlovova křivka bude střídavě protínat jak reálnou, tak imaginární osu roviny (u, v) .
- 2) Celkový počet těchto průsečíků (včetně průsečíku pro $\omega = 0$) se bude rovnat stupni polynomu $P(z)$.
- 3) Michajlovova křivka nemůže procházet počátkem souřadnic, protože pro určitou hodnotu ω by muselo platit $P(j\omega) = 0$, což by byl spor s podmínkou, že polynom $P(z)$ nemá kořeny ležící na imaginární ose.

Tento rozbor nám umožňuje zformulovat Michajlovovo kritérium v následujícím, snadno ověřitelném tvaru:

Jestliže polynom $P(z)$ nemá kořeny na imaginární ose, pak nutnou a postačující podmínkou pro existenci kořenů $P(z)$ pouze se zápornou reálnou částí je, aby:

- 1) Při rostoucím $\omega \in (0, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ pohyboval proti směru pohybu hodinových ručiček.
- 2) Všechny kořeny rovnic $u(\omega) = 0, v(\omega) = 0$ byly reálné a navzájem se střídaly.
(Tj. mezi dvěma následujícími kořeny jedné rovnice musí ležet jeden kořen druhé rovnice.)

Jestliže všechny koeficienty polynomu $P(z)$ jsou kladné, stačí ověřit pouze podmínu 2).

Na závěr zdůrazněme, že výše uvedená kritéria stability pro systémy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu platí vzhledem k „ekvivalenci“ systémů lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu a lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu (viz kapitola 4.1) i pro vyšetřování stability lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu.

Příklad 4.23 Pomocí Michajlovova kritéria zjistěte, zda je stabilní diferenciální rovnice

$$x^{(4)} + x''' + 10x'' + 4x' + 9x = 0$$

Řešení: Charakteristická rovnice je tvaru

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 10\lambda^2 + 4\lambda + 9 = 0$$

$$\text{Tedy } P(j\omega) = \omega^4 - 10\omega^2 + 9 - j(\omega^3 - 4\omega).$$

$$\begin{aligned} \text{Odtud } u(\omega) &= \omega^4 - 10\omega^2 + 9 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm 1, \omega_{3,4} = \pm 3 \\ v(\omega) &= -\omega^3 + 4\omega = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm 2 \end{aligned}$$

Stačí nám uvažovat pouze kořeny z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Vidíme, že všechny jsou reálné a navzájem se střídají, z čehož plyne, že polynom $P(\lambda)$ je hurwitzovský, a tedy vyšetřovaná rovnice je asymptoticky stabilní.

Cvičení

Vyšetřete z hlediska stability triviální řešení následujících systémů:

Příklad 1
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$
 [Asymptoticky stabilní]

Příklad 2
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$
 [Nestabilní]

Pomocí Hurwitzova kritéria rozhodněte o asymptotické stabilitě následujících lineárních diferenciálních rovnic a systémů lineárních diferenciálních rovnic.

Příklad 3
$$\begin{aligned} x'_1 &= 3x_2 \\ x'_2 &= -3x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$
 [Asymptoticky stabilní]

Příklad 4
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -x_3 \\ x'_3 &= x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$
 [Asymptoticky stabilní]

Příklad 5
$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ x'_3 &= x_1 - x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$
 [Asymptoticky nestabilní]

Příklad 6 $x^{(4)} + 4x''' + 6x'' + 8x' + x = 0$ [Asymptoticky stabilní]

Příklad 7 $x^{(4)} + 5x'' + 9x = 0$ [Asymptoticky nestabilní]

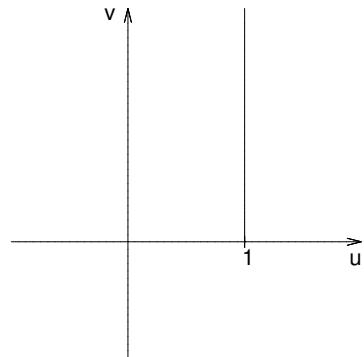
Michajlovovým kritériem vyšetřete stabilitu následujících systémů lineárních diferenciálních rovnic a lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů.

Příklad 8
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ x'_3 &= x_1 \end{aligned}$$
 [Nestabilní, viz obrázek 4.10]

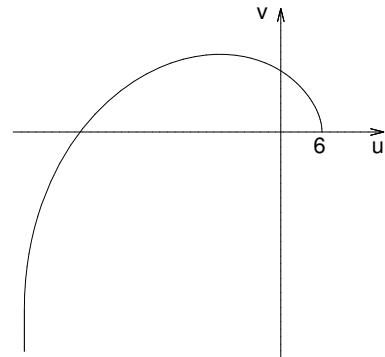
Příklad 9 $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ [Asymptoticky stabilní, viz obrázek 4.11]

Příklad 10
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ x'_3 &= x_4 \\ x'_4 &= -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 \end{aligned}$$
 [Asymptoticky stabilní, viz obrázek 4.12]

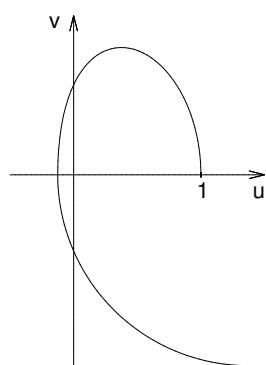
Příklad 11 $y^{(5)} + y^{(4)} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$ [Asymptoticky stabilní, viz obrázek 4.13]



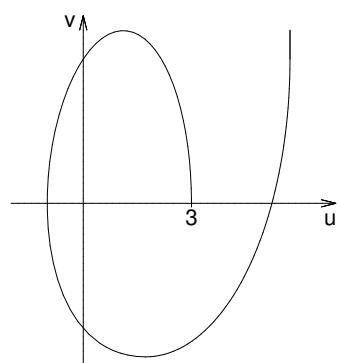
Obrázek 4.10: Michajlovova křivka z příkladu 8



Obrázek 4.11: Michajlovova křivka z příkladu 9



Obrázek 4.12: Michajlovova křivka z příkladu 10



Obrázek 4.13: Michajlovova křivka z příkladu 11

Reference

- [1] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza II*, SNTL/ALFA, Praha, 1986
- [2] Brabec, J.: *Matematická analýza II/2*, ČVUT Praha, 1980. Učební text.
- [3] Budak, B. M., Fomin, S. V.: *Multiple Integrals, Field Theory and Series*, Mir, Moskva, 1973
- [4] Kropáč, J., Kuben, J.: *Skalární a vektorové pole, křivkový a plošný integrál*, S-777, VA Brno, 1999. Učební text.
- [5] Krupková, V.: *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*, VUT v Brně, nakladatelství VUTIUM, 1999. Učební text.
- [6] Kuben, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, VA Brno, 1995. Učební text.
- [7] Nagy, J., Nováková, E., Vacek, M.: *Vektorová analýza*, Matematika pro vysoké školy technické sešit VIII. SNTL Praha, 1984.
- [8] Nagy, J.: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*, Matematika pro vysoké školy technické sešit XV. SNTL Praha, 1980.
- [9] Nagy, J.: *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, Matematika pro vysoké školy technické sešit XVI. SNTL Praha, 1980.
- [10] Sikorski, R.: *Diferenciální a integrální počet funkce více proměnných*, ACADEMIA Praha, 1973.