



FAKULTA
ELEKTROTECHNIKY
A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ

Matematický seminář

RNDr. Edita Kolářová

Obsah

1	Přehled použité symboliky	4
2	Základní pojmy matematické logiky a teorie množin	5
2.1	Elementy matematické logiky	5
2.2	Základní operace s množinami	6
2.3	Axiomy, definice, věty a důkazy	7
3	Vektorová algebra a analytická geometrie	9
3.1	Základní operace s vektory	9
3.2	Přímka v rovině	9
3.3	Přímka v prostoru a rovnice roviny	11
3.4	Kuželosečky v rovině	13
4	Úpravy algebraických výrazů a rovnice	18
4.1	Úpravy algebraických výrazů	18
4.2	Rovnice	20
5	Soustavy rovnic	29
5.1	Soustavy lineárních rovnic	29
5.2	Gaussova eliminační metoda	30
6	Řešení nerovnic	34
6.1	Operace s nerovnicemi	34
6.2	Lineární nerovnice	35
6.3	Kvadratická nerovnice	37
6.4	Nerovnice s absolutními hodnotami	38
6.5	Iracionální nerovnice a soustavy rovnic	38
7	Elementární funkce	42
7.1	Lineární funkce	42
7.2	Kvadratická funkce	44
7.3	Mocninná funkce	46
7.4	Exponenciální funkce a logaritmická funkce	50
8	Vlastnosti funkce jedné proměnné	53
8.1	Vlastnosti a druhy funkcí	53
8.2	Inverzní funkce	56
8.3	Limita a spojitost funkce	58
9	Derivace funkce	63
9.1	Geometrický a fyzikální význam derivace	63
9.2	Výpočet derivace	65
9.3	L'Hospitalovo pravidlo	68

10 Goniometrické funkce	70
10.1 Oblouková míra	70
10.2 Goniometrické funkce	71
10.3 Goniometrické rovnice	75
11 Integrál funkce jedné proměnné	78
11.1 Primitivní funkce	78
11.2 Určitý integrál	81
12 Komplexní čísla	86
12.1 Algebraický tvar komplexního čísla	86
12.2 Goniometrický tvar komplexního čísla	87
12.3 Moivreova věta	88
12.4 Řešení binomických rovnic v \mathbb{C}	88
13 Posloupnosti a řady	92
13.1 Aritmetická a geometrická posloupnost	92
13.2 Nekonečná geometrická řada	95
14 Kombinatorika	98
14.1 Permutace, variace a kombinace	98
14.2 Binomická věta	100

Seznam tabulek

9.1	Vzorce pro derivace elementárních funkcí	65
10.1	Hodnoty goniometrických funkcí pro některé důležité úhly	72
11.1	Vzorce pro integraci elementárních funkcí	79

1 Přehled použité symboliky

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ množina všech přirozených čísel

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ množina všech celých čísel

$\mathbb{Q} = \{p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ množina všech racionálních čísel

\mathbb{R} množina všech reálných čísel

\mathbb{R}^+ množina všech reálných kladných čísel

$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ množina všech komplexních čísel

$\{\}, \emptyset$ prázdná množina

$a \in \mathcal{M}$ a je prvek množiny \mathcal{M}

$a \notin \mathcal{M}$ a není prvek množiny \mathcal{M}

$\{x \in \mathcal{M}; v(x)\}$ množina všech prvků množiny \mathcal{M} s vlastností v

$P \wedge Q$ konjunkce výroků P, Q

$P \vee Q$ disjunkce výroků P, Q

$P \Rightarrow Q$ P implikuje Q

$P \Leftrightarrow Q$ ekvivalence výroků P a Q

\forall obecný kvantifikátor (každý...)

\exists existenční kvantifikátor (existuje...)

$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ \mathcal{M} je podmnožina \mathcal{N}

$\mathcal{M} = \mathcal{N}$ $(\mathcal{M} \subset \mathcal{N}) \wedge (\mathcal{N} \subset \mathcal{M})$; \mathcal{M} se rovná \mathcal{N}

$\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ $\{x; x \in \mathcal{M} \vee x \in \mathcal{N}\}$ – sjednocení množin

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ $\{x; x \in \mathcal{M} \wedge x \in \mathcal{N}\}$ – průnik množin

$\mathcal{M} - \mathcal{N}$ $\{x; x \in \mathcal{M} \wedge x \notin \mathcal{N}\}$

$A[a_1; a_2; a_3]$ bod o souřadnicích a_1, a_2, a_3

$\vec{u} = (u_1; u_2)$ vektor o složkách u_1, u_2

$|AB|$ vzdálenost bodů A, B ; velikost úsečky AB

$|a|, |z|$ absolutní hodnota reálného resp. komplexního čísla

2 Základní pojmy matematické logiky a teorie množin

2.1 Elementy matematické logiky

Výrok je vyslovená nebo napsaná myšlenka, která sděluje něco, co může být pouze pravdivé nebo nepravdivé. Jednoduché výroky označujeme velkými písmeny, např. A, B, V, \dots . Pomocí logických spojek dostáváme složené výroky.

Nejdůležitější jsou:

\bar{A} (*non* A ; A' ; $\neg A$; ...) **negace** výroku A (není pravda, že A)

$A \wedge B$ **konjunkce** (A a zároveň B)

$A \vee B$ **disjunkce** (A nebo B ; platí alespoň jeden)

$A \Rightarrow B$ **implikace** (jestliže A , pak B ; z A plyne B)

$A \Leftrightarrow B$ **ekvivalence** (A platí tehdy a jen tehdy, když platí B ;
 A platí právě tehdy, když platí B)

Kvantifikované výroky jsou výroky, udávající počet:

\forall **obecný kvantifikátor** (čteme: ke každému, pro každé, pro všechna) vyjadřující, že každý (všichni, libovolný, kterýkoliv) uvažovaný objekt má - nebo nemá - požadovanou vlastnost.

\exists **existenční kvantifikátor** (čteme: existuje alespoň jeden) vyjadřuje, že některé (alespoň jeden, někteří, lze nalézt, existuje,...) objekty mají vlastnost, o kterou jde.

Příklad 2.1 Výrok A je "rok má 13 měsíců" a výrok B je " $2 \times 2 = 4$." Utvořte $\bar{A}, A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ a rozhodněte, jsou-li pravdivé nebo nepravdivé.

Řešení:

\bar{A} : "rok nemá 13 měsíců" - pravdivý výrok

$A \vee B$: "rok má 13 měsíců nebo $2 \times 2 = 4$ " - pravdivý výrok

$A \wedge B$: "rok má 13 měsíců a $2 \times 2 = 4$ " - nepravdivý výrok

$A \Rightarrow B$: " má-li rok 13 měsíců, pak $2 \times 2 = 4$ " - pravdivý

$A \Leftrightarrow B$: "rok má 13 měsíců právě tehdy, je-li $2 \times 2 = 4$ " - nepravdivý výrok

Příklad 2.2 Vyslovte negaci výroku A :

a) Všechny kořeny mnohočlenu jsou rovny nule.

b) Ne všechna reálná čísla jsou kladná.

c) $2 < -7$

d) Levná výroba proudu.

Řešení:

a) Alespoň jeden kořen mnohočlenu je nenulový;

b) Všechna reálná čísla jsou kladná;

c) $2 \geq -7$;

d) není výrok

Příklad 2.3 Výrok A "číslo a je dělitelné osmi", výrok B "číslo a je dělitelné dvěma". Formulujte $A \Rightarrow B$, a rozhodněte zda je pravdivý.

Řešení:

Je-li číslo a dělitelné osmi, pak je dělitelné dvěma. Pravdivá implikace

2.2 Základní operace s množinami

Množinou rozumíme souhrn libovolných, navzájem různých objektů, které mají určitou vlastnost. Základní operace s množinami :

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ inkluze množin \mathcal{A}, \mathcal{B}

$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ rovnost množin \mathcal{A}, \mathcal{B}

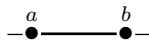
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ sjednocení množin

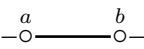
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ průnik množin

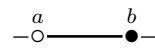
$\mathcal{A} - \mathcal{B}$ rozdíl množin ($\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$)

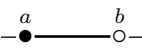
$\mathcal{A}'_{\mathcal{B}}$ doplněk množiny \mathcal{A} v množině \mathcal{B}

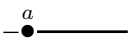
Připomínáme ještě **intervaly**, jejich názvy, znázornění na číselné ose:

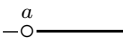
uzavřený interval $\langle a; b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ 

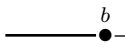
otevřený interval $(a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ 

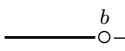
polootevřený interval $(a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ 

(polouzavřený) $\langle a; b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ 

neomezený interval $\langle a; \infty \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$ 

$(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$ 

$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$ 

$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ 

oboustranně neomezený interval $(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$ 

Příklad 2.4 \mathcal{M} je množina všech sudých čísel, \mathcal{P} množina všech lichých čísel, která nejsou dělitelná třemi, \mathcal{R} množina všech čísel, která jsou dělitelná třemi. Určete $\mathcal{M} \cap \mathcal{R}, \mathcal{M} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R}, \mathcal{P} \cap \mathcal{R}$.

Řešení:

$\mathcal{M} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R} = \mathbb{Z}$

$\mathcal{M} \cap \mathcal{R}$ množina všech celých čísel dělitelných šesti

$\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \{ \}$

Příklad 2.5 \mathcal{M} je množina všech sudých přirozených čísel menších než deset. Najděte všechny její podmnožiny.

Řešení:

$$\mathcal{M} = \{2, 4, 6, 8\}$$

jednoprvkové $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}$

dvoupvkové $\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}$

trojprvkové $\{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 6, 8\}$

čtyřprvkové $\{2, 4, 6, 8\}$

množina prázdná

2.3 Axiomy, definice, věty a důkazy

Základem logické výstavby matematiky je soubor **axiomů**, t.j. matematických výroků, které se považují za pravdivé a nedokazují se. K zavedení nových pojmů slouží **definice**, která stanoví název pojmu a určí jeho základní vlastnosti. **Věta** v matematice je pravdivý výrok, který musíme logicky odvodit - dokázat - z axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Podle použitých postupů rozlišujeme důkaz přímý, nepřímý, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí.

Příklad 2.6 *Věta: Součin dvou libovolných sudých čísel je dělitelný čtyřmi.*

Důkaz přímý:

Jde o součin $2l \cdot 2k = 4lk$ ($l, k \in \mathbb{Z}$) a to bylo dokázat.

Příklad 2.7 *Věta: Necht' rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má celočíselné koeficienty, $a \neq 0, b$ je číslo liché. Dokažte, že rovnice nemůže mít dvojnásobný kořen.*

Důkaz sporem:

Předpokládáme, že rovnice má dvojnásobný kořen. Pak diskriminant je nulový. Víme, že $b = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Tedy $D = (2k + 1)^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 4ac$. Na levé straně rovnice je liché číslo, na pravé straně sudé a to je spor. Neplatí tedy předpoklad, že kvadratická rovnice má za daných podmínek dvojnásobný kořen.

Příklad 2.8 *Matematickou indukcí dokažte, že součet čtverců prvních n přirozených čísel je roven $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.*

Důkaz:

Matematickou indukcí dokazujeme výrok $V(n)$ tak, že nejprve dokážeme platnost $V(a)$, kde a je nejmenší přirozené číslo pro danou úlohu. Pak předpokládáme platnost $V(n)$ a ukážeme platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$. Pak $V(n)$ platí pro všechna n .

V našem případě:

$$V(1) : S_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1, \text{ což odpovídá } S_1 = 1^2.$$

$$\text{Předpokládáme } V(n) : S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

$$\text{Počítáme } V(n+1) : S_{(n+1)} = S_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Příklad 2.9 Necht' množina \mathcal{M} je množina všech řešení rovnice $\cos \frac{\pi x}{2} = 0$, množina \mathcal{N} je množina všech řešení rovnice $\sin \pi x = 0$. Najděte $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

$$[\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathbb{Z}; \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \text{kladná a záporná lichá čísla}]$$

Příklad 2.10 Najděte sjednocení a průnik intervalů:

a) $\langle 2; 3 \rangle$ a $\langle -1; \infty \rangle$

b) $(-\infty; 3)$ a $(-8; 15)$

$$[a) \langle -1; \infty \rangle, \langle 2; 3 \rangle \quad b) (-\infty; 15), (-8; 3)]$$

Příklad 2.11 Přímým důkazem dokažte:

a) Zvětší-li se číslo a o x , zvětší se jeho druhá mocnina o $x(2a + x)$.

b) Zvětší-li se číslo x o h , zvětší se jeho dekadický logaritmus o $\log(1 + \frac{h}{x})$.

c) Součet dvou čísel lichých je sudé číslo.

Příklad 2.12 Sporem dokažte:

a) Rovnice $ax = b$, kde $a \neq 0$, má jediné řešení.

b) V každém trojúhelníku leží proti stejným úhlům stejné strany.

Příklad 2.13 Metodou matematické indukce dokažte:

a) $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

3 Vektorová algebra a analytická geometrie

3.1 Základní operace s vektory

Vektorem nazýváme množinu všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.

Je-li $\vec{u} = \overline{AB}$ libovolný nenulový vektor s počátečním bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a koncovým bodem $B[b_1; b_2; b_3]$, pak **souřadnice vektoru** \vec{u} jsou:

$$u_1 = b_1 - a_1, \quad u_2 = b_2 - a_2, \quad u_3 = b_3 - a_3.$$

Zapisujeme $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$.

Je-li $A = B$, pak dostáváme vektor nulový $\vec{0}(0; 0; 0)$.

U vektorů v rovině vypustíme třetí souřadnici.

Pro vektory $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ zavádíme:

velikost vektoru $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

rovnost vektorů $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1 = v_1) \wedge (u_2 = v_2) \wedge (u_3 = v_3)$

součet vektorů $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$

rozdíl vektorů $\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$

opačný vektor k \vec{u} $-\vec{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$

k -násobek vektoru $k\vec{u} = (ku_1; ku_2; ku_3), k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

úhel φ dvou vektorů $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}, \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$

3.2 Přímka v rovině

Přímka p v rovině:

Je-li přímka p určena bodem $A[a_1; a_2]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}(s_1; s_2)$ jsou její **parametrické rovnice**

$$x = a_1 + ts_1, y = a_2 + ts_2, t \in \mathbb{R}.$$

Budeme používat i zkrácený zápis $p \equiv \{[a_1 + ts_1; a_2 + ts_2], t \in \mathbb{R}\}$. Vyloučením parametru t z parametrických rovnic dostaneme **obecnou rovnici** přímky

$$p \equiv ax + by + c = 0.$$

Je-li v této rovnici $b \neq 0$, lze najít **směrnicevý tvar** $p \equiv y = kx + q; k, q \in \mathbb{R}$.

Vzdálenost bodu $M[x_0; y_0]$ **od přímky** $p \equiv ax + by + c = 0$ je dána

$$d(M, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pro **odchylku dvou přímek** $p_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $p_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ lze odvodit

$$\cos \varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Jsou-li přímky p_1 a p_2 kolmé, pak pro jejich směrnice k_1 a k_2 platí $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Příklad 3.1 *Přímka je určena body $A[6; -1]$, $B[2; 3]$. Najděte všechny tvary rovnice této přímky.*

Řešení:

Směrový vektor této přímky je $\vec{s} = (-4; 4)$. Parametrické rovnice tedy jsou

$$\underline{\underline{x = 6 - 4t, \quad y = -1 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sečtením těchto rovnic a vyloučením parametru t dostaneme obecnou rovnici

$$\underline{\underline{x + y - 5 = 0.}}$$

Jednoduchou úpravou dostáváme

$$\underline{\underline{\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1,}}$$

připomínáme tímto úsekový tvar rovnice přímky. Úseky, které přímka vytíná na souřadnicových osách jsou stejné a rovny pěti.

Z obecného tvaru odvodíme směrnici

$$\underline{\underline{y = -x + 5.}}$$

Vidíme, že směrnice $k = -1$, úhel přímky s kladným směrem osy x je $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Příklad 3.2 *V trojúhelníku ABC , kde $A[7; 8]$, $B[5; -2]$, $C[-3; -6]$, určete velikost výšky v_a a napište rovnici přímky, na níž leží výška v_a .*

Řešení:

Výška v_a má velikost rovnou vzdálenosti bodu A od přímky p , na níž leží strana BC .

Je $\vec{BC} = C - B = (-8; -4)$.

Parametrické rovnice přímky p jsou:

$$x = -3 - 8t, \quad y = -6 - 4t.$$

Odtud obecná rovnice $x - 2y - 9 = 0$. Tedy

$$d(A, p) = \frac{|1 \cdot 7 - 2 \cdot 8 - 9|}{\sqrt{1 + 4}} = \underline{\underline{\frac{18\sqrt{5}}{5}}}.$$

Směrnice rovnice přímky p je $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{2}$, směrnice výšky v_a je tedy

$$k = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Rovnice přímky rovnoběžné s výškou pak je $y = -2x + q$ a posunutí q dostaneme z podmínky, že výška v_a bodem A prochází, tedy $8 = -2 \cdot 7 + q \Rightarrow q = 22$.

Je tedy $-2x + 22 = y$ rovnice přímky na níž výška v_a leží.

Příklad 3.3 Určete odchylku přímek

$$p_1 \equiv 3x - 2y + 10 = 0 \text{ a } p_2 \equiv 5x + y - 13 = 0.$$

Řešení:

$$\text{Je } \cos \varphi = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{|3 \cdot 5 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{9 + 4} \sqrt{25 + 1}} = \frac{|13|}{\sqrt{13} \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ tedy } \underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{4}}}.$$

3.3 Přímka v prostoru a rovnice roviny

Přímka p v prostoru:

Je-li přímka p určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}(s_1; s_2; s_3)$ jsou její **parametrické rovnice**

$$x = a_1 + ts_1, y = a_2 + ts_2, z = a_3 + ts_3, t \in \mathbb{R}.$$

Zkrácený zápis $p \equiv \{[a_1 + ts_1; a_2 + ts_2; a_3 + ts_3], t \in \mathbb{R}\}$.

Přímku v prostoru lze také zadat jako průsečnici dvou různoběžných rovin.

Rovina ρ v prostoru:

Je-li rovina ρ určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a dvěma nenulovými, nekolineárními vektory $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ jsou její **parametrická rovnice**

$$x = a_1 + tu_1 + rv_1, y = a_2 + tu_2 + rv_2, z = a_3 + tu_3 + rv_3, t, r \in \mathbb{R}.$$

Zkrácený zápis $\rho \equiv \{[a_1 + tu_1 + rv_1; a_2 + tu_2 + rv_2; a_3 + tu_3 + rv_3], t, r \in \mathbb{R}\}$.

Vyloučením parametrů t, r z parametrických rovnic dostaneme **obecnou (normálovou) rovnici** roviny ρ ve tvaru

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde alespoň jeden z koeficientů a, b, c je nenulový.

Vektor $\vec{n}(a; b; c)$ je normálový vektor roviny ρ .

Vzdálenost bodu $X[x_0; y_0; z_0]$ od roviny ρ je

$$d(X, \rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Příklad 3.4 Najděte rovnici roviny ρ , která prochází bodem $A[5; -1; 0]$ a má normálový vektor $\vec{n}(-1; 1; 2)$.

Řešení:

Souřadnice normálového vektoru jsou koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny. Tedy

$$\rho \equiv -x + y + 2z + d = 0.$$

Bod A leží v rovině, potom $-5 - 1 + 0z + d = 0 \Rightarrow d = 6$.

$$\underline{\underline{\rho \equiv -x + y + 2z + 6 = 0}}$$

Příklad 3.5 Rovina ρ je určena body $A[4; 0; 3], B[4; 1; 5], C[1; 2; -3]$. Najděte parametrické vyjádření a obecnou (normálovou) rovnici ρ .

Řešení:

Je $\vec{AB} = (0; 1; 2), \vec{AC} = (-3; 2; -6)$. Pak parametrické rovnice roviny ρ jsou

$$\underline{\underline{x = 4 + 0t - 3r, y = 0 + t + 2r, z = 3 + 2t - 6r, t, r \in \mathbb{R}.$$

Vyloučením parametrů t, r z těchto rovnic dostaneme

$$\underline{\underline{\rho \equiv 10x + 6y - 3z - 31 = 0.}}$$

Příklad 3.6 Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin:

$$\rho_1 \equiv 4x - 2y - 2z - 3 = 0, \rho_2 \equiv 2x - y - z - 1 = 0.$$

Řešení:

V rovině ρ_1 volíme například bod $X(0; 0; -\frac{3}{2})$ a počítáme

$$d(X, \rho_2) = \frac{|\frac{3}{2} - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{12}}}.$$

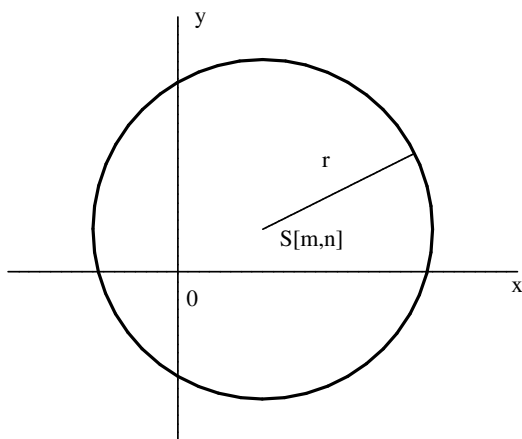
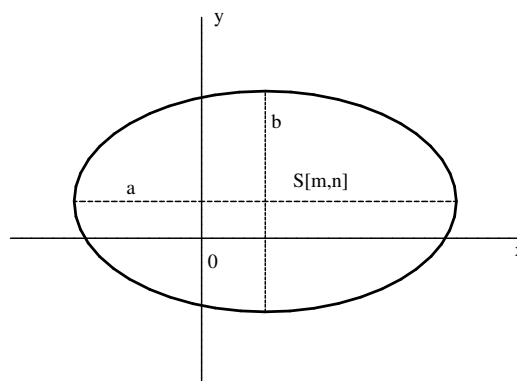
3.4 Kuželosečky v rovině

Kružnice $k(S, r)$ se středem v $S[m; n]$ a poloměrem $r > 0$ má středovou rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Elipsa se středem v bodě $S[m; n]$ a poloosami (rovnoběžnými se souřadnicovými osami) velikosti a a b má středovou rovnici

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Kružnice $k(S, r)$ 

Elipsa

Příklad 3.7 Určete rovnici kružnice k , je-li určena středem S a poloměrem r :

a) $S[0; -3]$, $r = \sqrt{2}$ b) $S[-1; 1]$, $r = 1$

Řešení:

Dosazením do středového tvaru rovnice kružnice dostaneme:

a) $(x - 0)^2 + (y + 3)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + (y + 3)^2 = 2}}$

b) $\underline{\underline{(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1}}$

Příklad 3.8 Najděte střed a poloměr kružnice $k \equiv x^2 + y^2 - 5x + 4y = 2$.

Řešení:

Rovnici kružnice upravíme doplněním na úplný čtverec:

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + 4y + 4 = 2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Rightarrow \underline{\underline{S\left[\frac{5}{2}; -2\right], r = \frac{7}{2}}}$$

Příklad 3.9 Rozhodněte, zda rovnice

a) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$

b) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 40y + 152 = 0$

je rovnicí elipsy. Určete střed a délku poloos.

Řešení:

a) Upravíme:

$$25(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 6y + 9) = 156 + 100 + 144 \Rightarrow 25(x + 2)^2 + 16(y - 3)^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\frac{(x + 2)^2}{4^2} + \frac{(y - 3)^2}{5^2} = 1$$

Je tedy $S[-2; 3]$, $a = 4$, $b = 5$.

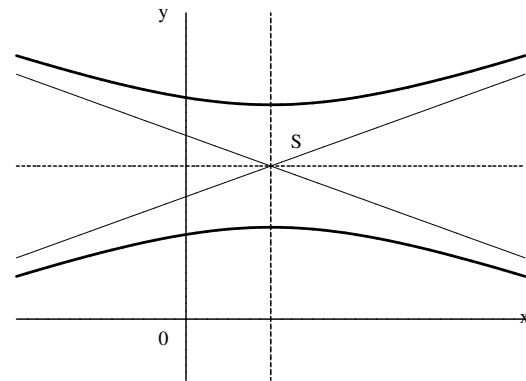
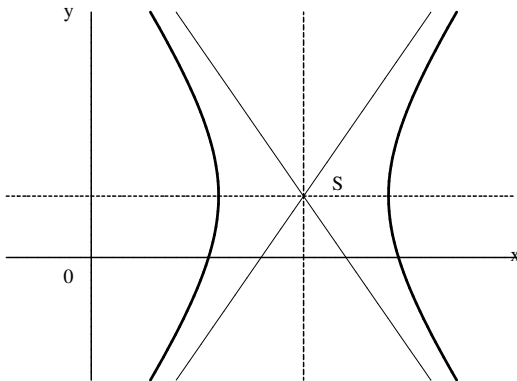
b) Podobně

$$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 10y + 25) = -152 + 36 + 100 \Rightarrow 9(x - 2)^2 + 4(y + 5)^2 = -16.$$

Na levé straně je číslo nezáporné, na pravé záporné, daná rovnice není rovnicí elipsy.

Hyperbola se středem v bodě $S[m; n]$ a poloosami (rovnoběžnými se souřadnicovými osami) a a b má středovou rovnici

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1 \quad \text{nebo} \quad -\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$



Příklad 3.10 Najděte průsečíky hyperboly $-49x^2 + 16y^2 = -25$ s osou O_x (vrcholy hyperboly).

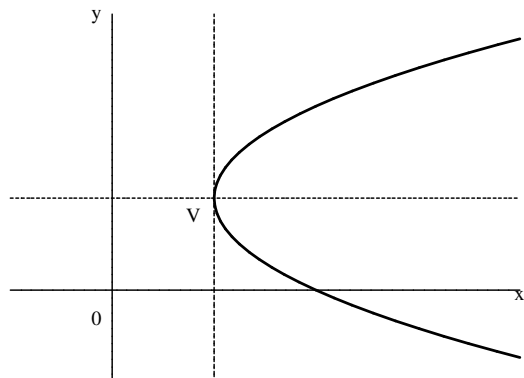
Řešení:

Rovnice osy O_x je $y = 0$, pak $-49x^2 = -25 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{5}{7}$.

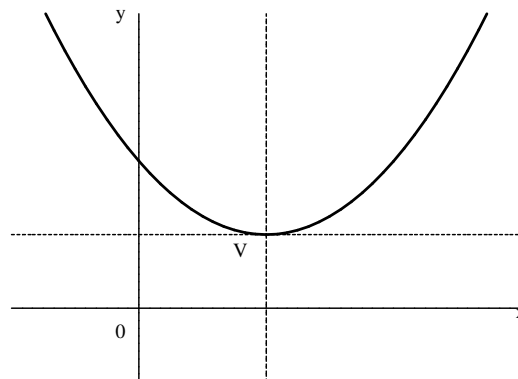
Je tedy $V_1[\frac{5}{7}; 0]$, $V_2[-\frac{5}{7}; 0]$.

Parabola je nestředová kuželosečka. Je-li její vrchol $V[m; n]$, pak rovnice paraboly je

$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \quad \text{nebo} \quad (x - m)^2 = 2p(y - n).$$



osa paraboly je rovnoběžná
s osou x , $p > 0$



osa paraboly je rovnoběžná
s osou y , $p > 0$

Příklad 3.11 Najděte vrchol a osu paraboly $3y^2 - 6x + 12y + 15 = 0$.

Řešení:

Upravíme na vrcholový tvar $3(y^2 + 4y + 4) = 6x - 15 + 12$, tedy $(y + 2)^2 = 2(x - \frac{1}{2})$.

Vrchol paraboly je $V[\frac{1}{2}; -2]$, osa je rovnoběžná s osou O_x , parametr $p = 1$.

Příklad 3.12 Jsou dány tři po sobě jdoucí vrcholy rovnoběžníka $ABCD$, kde $A[2; -2; 2]$, $B[4; 2; 0]$, $C[7; 4; 3]$. Určete vrchol D .

$$[D[5; 0; 5]]$$

Příklad 3.13 Najděte vnitřní úhly trojúhelníku o vrcholech $A[2; -4; 9]$, $B[-1; -4; 5]$, $C[6; -4; 6]$.

$$[\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}]$$

Příklad 3.14 Pro jakou hodnotu parametru a jsou přímky p a q rovnoběžné, je-li $p \equiv 3ax - 8y + 13 = 0$ a $q \equiv (a + 1)x - 2ay - 21 = 0$.

$$[a \in \{2, -\frac{2}{3}\}]$$

Příklad 3.15 Přímka $p \equiv ax + 3y - 1 = 0$.

Určete a tak, aby přímka svírala s kladným směrem osy x úhel $\frac{3}{4}\pi$.

$$[a = 3]$$

Příklad 3.16 Najděte rovnici přímky, která prochází bodem $A[4; -2]$ a má od počátku vzdálenost $d = 2$.

$$[p_1 \equiv y + 2 = 0, p_2 \equiv 4x + 3y - 10 = 0]$$

Příklad 3.17 Najděte obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $M[15; -3]$ a průsečíkem přímek $3x - 5y + 12 = 0$, $5x + 2y - 42 = 0$.

$$[x + y - 12 = 0]$$

Příklad 3.18 Určete množinu bodů, které mají od bodů $A[7; -3]$, $B[-2; 1]$ stejnou vzdálenost.

$$[18x - 8y - 53 = 0]$$

Příklad 3.19 Přímka p je dána rovnicemi $x = 1 + 2t$, $y = 3 - t$, $t \in \mathbb{R}$.

Určete parametrické rovnice přímky q , je-li $p \perp q$ a dále q prochází bodem $Q[1; 3]$.

$$[x = 1 + t, y = 3 + 2t, t \in \mathbb{R}]$$

Příklad 3.20 Najděte číslo n , aby body $A[3; -4]$, $B[1; n]$, $C[-1; 2]$ ležely na jedné přímce.

$$[n = -1]$$

Příklad 3.21 Najděte parametrické rovnice přímky procházející bodem $A[4; -5; 7]$ rovnoběžně

a) s osou O_x ,

b) s osou O_y ,

c) s osou O_z ,

d) s přímkou $p \equiv x = 3 - t, y = 2 + 2t, z = 3, t \in \mathbb{R}$.

$$[a) x = 4 + t, y = -5, z = 7, t \in \mathbb{R}; b) x = 4, y = -5 + t, z = 7, t \in \mathbb{R}; c) x = 4, y = -5, z = 7 + t, t \in \mathbb{R}; d) x = 4 - t, y = -5 + 2t, z = 7, t \in \mathbb{R}]$$

Příklad 3.22 Určete odchylku φ rovin $\rho \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ a $\sigma \equiv x - y + z = 0$.

$$[\varphi = \frac{\pi}{2}]$$

Příklad 3.23 Rozhodněte, která z rovin $\rho \equiv x - y - 3 = 0$, $\sigma \equiv x + y - z + 1 = 0$ má větší vzdálenost od počátku souřadnic.

$$[rovina \rho]$$

Příklad 3.24 Určete rovnici průsečnice rovin $\rho \equiv 3x + y - z = 0$ a $\sigma \equiv y + z = 0$.

$$[p \equiv x = 2t, y = -3t, z = 3t, t \in \mathbb{R}]$$

Příklad 3.25 Najděte rovnici kružnice opsané trojúhelníku o vrcholech

$A[1; -1]$, $B[7; 7]$, $C[11; -1]$.

$$[k \equiv x^2 + y^2 - 12x - 3y + 7 = 0]$$

Příklad 3.26 Najděte rovnici kružnice, která se dotýká obou souřadnicových os a prochází bodem $M[2; 4]$.

$$[k_1 \equiv (x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100, k_2 \equiv (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4]$$

Příklad 3.27 Jsou dány body $A[1; -3]$, $B[1; 4]$, $C[-3; 5]$.
Popište jejich polohu vzhledem k elipse $25x^2 + 9y^2 = 450$.

$$[A \text{ je uvnitř, } B \text{ je uvnitř, } C \text{ je bod elipsy}]$$

Příklad 3.28 Najděte rovnici elipsy s osami rovnoběžnými se souřadnicovými, jestliže se osy O_x dotýká v bodě $A[-4; 0]$ a osy O_y v bodě $B[0; 5]$.

$$[\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1]$$

Příklad 3.29 Hyperbola má rovnici $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$.
Najděte její střed a délky poloos.

$$[S[1, -1], a = 2, b = 3]$$

Příklad 3.30 Najděte rovnici hyperboly, jsou-li její vrcholy $V_1[0; 2]$, $V_2[8; 2]$ a prochází bodem $M[-1; 5]$.

$$[\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1]$$

Příklad 3.31 Najděte rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a prochází body $A[8; 3]$, $B[-8; 3]$.

$$[x^2 = \frac{64}{3}y]$$

Příklad 3.32 Najděte rovnici paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou O_x , vrchol $V[8; 5]$, parametr $p = 4$.

$$[(y - 5)^2 = 8(x - 8)]$$

Příklad 3.33 Najděte rovnici přímky, která prochází průsečíky paraboly $y^2 = 18x$ a kružnice $x^2 + y^2 + 12x - 64 = 0$.

$$[p \equiv x - 2 = 0]$$

4 Úpravy algebraických výrazů a rovnice

4.1 Úpravy algebraických výrazů

Algebraický výraz je zápis, který je správně vytvořen z matematických operačních znaků, čísel, proměnných, výsledků operací a hodnot funkcí. Při úpravách používáme poznatků o mocninách, odmocninách, zlomcích a mnohočlenech tak, abychom výraz převedli na nejjednodušší tvar. Nutnou součástí řešení jsou podmínky, které stanoví, kdy jsou výrazy definovány.

Pravidla pro počítání s mocninami:

Pro každé reálné r, s a každé $a > 0, b > 0$, (respektive pro každé celé r, s a každé $a \neq 0, b \neq 0$) platí:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 & (a^r)^s &= a^{rs} \\ a^{-r} &= \frac{1}{a^r}, & (ab)^r &= a^r \cdot b^r \\ a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \\ a^r : a^s &= a^{r-s} & \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Pravidla pro počítání s odmocninami:

Nechť $m, n \in \mathbb{N}, a \geq 0$. Pak platí:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}}. & \text{Pro } a = 0 \text{ je } \sqrt[n]{0} &= 0. \\ & & \text{Pro } n = 1 \text{ je } \sqrt[n]{a} &= a. \\ & & \text{Pro } n = 2 \text{ zapisujeme } \sqrt[n]{a} &= \sqrt{a}. \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad a \geq 0 \wedge b \geq 0$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad a \geq 0 \wedge b > 0$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad a \geq 0$$

Rozklady nejjednodušších mnohočlenů:

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

Rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů:

Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, pak platí:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Připomínáme **definici absolutní hodnoty**:

Každému reálnému číslu a přiřazujeme právě jedno nezáporné číslo $|a|$ takto:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Jestliže a, b jsou reálná čísla, pak absolutní hodnota má tyto vlastnosti:

- 1) $|a| = \max\{a, -a\}$
- 2) $|a| = |-a|$
- 3) $a \leq |a|$
- 4) $|a| = \sqrt{a^2}$
- 5) $|ab| = |a| \cdot |b|$
- 6) $|a^n| = |a|^n$, pro každé přirozené n
- 7) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, pro každé $b \neq 0$
- 8) $|a + b| \leq |a| + |b|$, (trojúhelníková nerovnost)
- 9) Nechť $\varepsilon > 0$, pak pro libovolná reálná čísla a, x platí:

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff |x - a| < \varepsilon$$

Příklad 4.1 Upravte výraz V na nejjednodušší tvar:

$$a) V = |-2x|^3 - |(-2x)^2| + |-2x|^2 + \frac{|2x|}{x}, \quad x \neq 0$$

Řešení:

$$\text{Pro } x > 0: \quad V = [-(-2x)]^3 - 4x^2 + [-(-2x)]^2 + \frac{2x}{x} = \underline{\underline{8x^3 + 2}}$$

$$\text{Pro } x < 0: \quad V = (-2x)^3 - 4x^2 + (-2x)^2 + \frac{-2x}{x} = \underline{\underline{-8x^3 - 2}}$$

$$b) V = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$$

Řešení:

$$V = \frac{x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1)}{x(x^2 - 2x - 3)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 3)}{x(x + 1)(x - 3)} = \underline{\underline{\frac{x - 1}{x}}},$$

platí pro $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 3$.

$$c) V = \frac{a^2b^{-2} - ab^{-1} + a^{-2}b^2 - a^{-1}b}{(a^{-1} - b^{-1})(ab^{-1} + a^{-1}b + 1)}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a}}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{a^4 - a^3b + b^4 - ab^3}{(b-a)(a^2 + b^2 + ab)} = \\ &= \frac{a^3(a-b) - b^3(a-b)}{-(a-b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{(a-b)(a^3 - b^3)}{-(a^3 - b^3)} = \underline{\underline{b-a}}, \end{aligned}$$

pro $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b$.

$$d) V = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{1 - \sqrt{x^2}}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} &\frac{(x^3 + x^2 - x - 1)(1 - \sqrt{x^2}) + (x^3 - x^2 - x + 1)(1 + \sqrt{x^2})}{1 - x^2} = \\ &= \frac{2x^3 - 2x - 2x^2|x| + 2|x|}{1 - x^2} = 2 \frac{x(x^2 - 1) - |x|(x^2 - 1)}{1 - x^2} = 2(|x| - x); \end{aligned}$$

Pro $x \neq 1 \wedge x \geq 0 : \underline{\underline{V = 0}}$

Pro $x \neq -1 \wedge x < 0 : \underline{\underline{V = -2x}}$

4.2 Rovnice

Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ funkce proměnné x definované na množině $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, pak úloha najít všechna $x \in \mathcal{D}$, pro něž $f(x) = g(x)$, znamená řešit rovnici o jedné neznámé.

Lineární rovnici o jedné neznámé $x \in \mathbb{R}$ lze psát ve tvaru

$$ax + b = 0,$$

kde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$.

Graficky tento kořen určíme jako průsečík přímky $y = ax + b$ s osou x .

Příklad 4.2 V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{2(x-1)}{11} - \frac{x-3}{2} = 9 - \frac{5(x+1)}{8}.$$

Řešení:

Celou rovnici vynásobíme $8 \cdot 11$, tím se zbavíme zlomků:

$$16(x-1) - 44(x-3) = 792 - 55(x+1)$$

a po roznásobení je:

$$16x - 16 - 44x + 132 = 792 - 55x - 55,$$

sloučíme $-28x + 116 = 737 - 55x$,

k oběma stranám rovnice přičteme $55x - 737$

$$27x - 621 = 0$$

a to je rovnice tvaru $ax + b = 0$. Takže

$$x = \frac{621}{27} = \underline{\underline{23.}}$$

Nemusíme provádět zkoušku, veškeré úpravy (násobení rovnice nenulovým číslem, přičítání stejného čísla k oběma stranám rovnice) jsou ekvivalentní. Zkouška pak má jen charakter kontroly výpočtu.

Příklad 4.3 Řešte v \mathbb{R} rovnici:

$$a) 2 + \frac{3}{x+7} = \frac{x+10}{x+7} \quad b) \frac{3+2x}{2} - \left(\frac{7}{6} - \frac{12x-1}{3}\right) = 5x.$$

Řešení:

a) Řešíme za předpokladu $x + 7 \neq 0$, tzn. $x \neq -7$, úpravou:

$$2(x+7) + 3 = x+10$$

$$2x + 14 + 3 = x + 10$$

$$x = -7 \quad \text{což je spor} \Rightarrow \underline{\underline{x \in \{ \}}}$$

b) Zbavíme se zlomků

$$3(3+2x) - 7 + 2(12x-1) = 30x$$

$$9 + 6x - 7 + 24x - 2 = 30x$$

$$0 = 0$$

Rovnice má nekonečně mnoho řešení $x = t, t \in \mathbb{R}$.

Kvadratickou rovnicí o jedné neznámé $x \in \mathbb{R}$ lze psát ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Kořeny této rovnice vypočítáme pomocí diskriminantu $D = b^2 - 4ac$.

Pro $D > 0$ dostaneme dva reálné různé kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Pro $D = 0$ dostaneme jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.

Pro $D < 0$ nemá rovnice v \mathbb{R} řešení.

Graficky kořeny určíme jako průsečíky paraboly $y = ax^2 + bx + c$ s osou x .

Příklad 4.4 Řešte v \mathbb{R} následující kvadratické rovnice:

$$a) x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}} \vee \underline{\underline{x_2 = -5}}$$

$$b) x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \underline{\underline{3}} \text{ dvojnásobný kořen}$$

$$c) 5x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 160}}{10} \text{ v } \mathbb{R} \text{ nemá rovnice řešení}$$

$$d) x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \vee \underline{\underline{x_2 = -6}}$$

$$e) 5x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5}x - 2)(\sqrt{5}x + 2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}}} \vee \underline{\underline{x_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$$

$$f) x^2 + 16 = 0 \text{ v } \mathbb{R} \text{ neřešitelná rovnice}$$

Příklad 4.5 Napište kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou $x_1 = -3\sqrt{3}$ a $x_2 = 2\sqrt{3}$.

Řešení:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Rightarrow (x + 3\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + \sqrt{3}x - 18 = 0}}$$

Nebo podle vztahů mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty p, q kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{kde} \quad x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

pak

$$x^2 + (+3\sqrt{3} - 2\sqrt{3})x - 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 0$$

a úpravou dostaneme

$$\underline{\underline{x^2 + \sqrt{3}x - 18 = 0.}}$$

Při řešení **rovníc s absolutní hodnotou** vycházíme z definice absolutní hodnoty a řešíme rovnice v intervalech, které dostaneme pomocí tzv. kritických bodů.

Příklad 4.6 V oboru reálných čísel řešte rovnice s absolutními hodnotami:

$$a) 3 + 4|x - 2| = 5x \qquad b) |2x - 7| + |x - 2| = 3$$

$$c) 3x - |2x - 1| = x + 1 \qquad d) |3x - 2| + 4 = 2x + 3$$

Řešení:

$$a) \text{ Pro } x \in (-\infty, 2), \text{ rovnice přejde v rovnici } 3 - 4(x - 2) = 5x.$$

Tato má řešení $x = \frac{11}{9}$, které patří do daného intervalu.

Pro $x \in \langle 2, \infty \rangle$: $3 + 4(x - 2) = 5x \Rightarrow x = -5 \notin \langle 2, \infty \rangle$

Sjednocení řešení pak je $x = \underline{\underline{\frac{11}{9}}}$.

b) $x \in (-\infty, 2)$: $-2x + 7 - x + 2 = 3 \Rightarrow x = 2 \notin (-\infty, 2)$

$x \in \langle 2, \frac{7}{2} \rangle$: $-2x + 7 + x - 2 = 3 \Rightarrow x = 2 \in \langle 2, \frac{7}{2} \rangle$

$x \in \langle \frac{7}{2}, \infty \rangle$: $2x - 7 + x - 2 = 3 \Rightarrow x = 4 \in \langle \frac{7}{2}, \infty \rangle$

Závěr: $x \in \underline{\underline{\{2, 4\}}}$

c) $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$: $3x + 2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin (-\infty, \frac{1}{2})$

$x \in \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle$: $3x - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow 0 = 0$

Závěr: $x \in \underline{\underline{\langle \frac{1}{2}, \infty \rangle}}$

d) $x \in (-\infty, \frac{2}{3})$: $-3x + 2 + 4 = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \in (-\infty, \frac{2}{3})$

$x \in \langle \frac{2}{3}, \infty \rangle$: $3x - 2 + 4 = 2x + 3 \Rightarrow x = 1 \in \langle \frac{2}{3}, \infty \rangle$

Závěr: $x \in \underline{\underline{\{1, \frac{3}{5}\}}}$

Rovnice s parametrem jsou rovnice, které kromě neznámých obsahují ještě další proměnné - parametry.

Řešení rovnic s parametry spočívá v určení kořenů v závislosti na parametrech a v úplném rozboru všech možností parametrů.

Příklad 4.7 Řešte v \mathbb{R} rovnici $x + 1 - \frac{2x + a + 1}{a} = \frac{a - x}{a}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení:

Pro $a = 0$ rovnice nemá smysl.

Pro $a \neq 0$ dostaneme $ax + a - 2x - a - 1 = a - x \Rightarrow$

$$(a - 1)x = a + 1 = \begin{cases} \text{pro } a = 1 : 0 \cdot x = 2, \text{ spor} \\ \text{pro } a \neq 1 : x = \frac{a+1}{a-1} \end{cases}$$

Závěr: $a = 0$ rovnice nemá smysl

$a = 1$ rovnice nemá řešení

$a \neq 0 \wedge a \neq 1$ rovnice má jediné řešení $x = \underline{\underline{\frac{a+1}{a-1}}}$

Příklad 4.8 Pro které hodnoty reálného parametru m má kvadratická rovnice $x^2 + 3x - 2m^2 + m + 3 = 0$ o neznámé $x \in \mathbb{R}$ jeden kořen rovný nule? Najděte druhý kořen.

Řešení:

$$\text{Absolutní člen } -2m^2 + m + 3 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} \Rightarrow \underline{\underline{m = -1}} \vee \underline{\underline{m = \frac{3}{2}}}.$$

Druhý kořen $x = -3$.

Příklad 4.9 Pro které hodnoty parametru t má kvadratická rovnice $2x^2 + tx + 2 = 0$ reálné různé kořeny?

Řešení:

$$\text{Reálné různé kořeny} \Rightarrow D = t^2 - 16 > 0 \Rightarrow t^2 > 16 \Rightarrow |t| > 4 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{t \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)}}$$

Algebraické rovnice vyššího stupně řešíme převodem na součinnový tvar, někdy jako rovnice binomické.

Příklad 4.10 V oboru reálných čísel řešte rovnice:

$$a) x^4 = 16 \qquad b) x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

Řešení:

$$a) x^4 - 16 = 0, \text{ upravíme na součinnový tvar } (x-2)(x+2)(x^2+4) = 0 \Rightarrow \text{reálné kořeny jsou } \underline{\underline{x_1 = 2, x_2 = -2}}$$

$$b) x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x \in \{ \}}}$$

Iracionální rovnice obsahují odmocniny z výrazů s neznámou. Odmocniny odstraňujeme neekvivalentní úpravou - umocněním, proto je nutně součástí řešení zkouška.

Příklad 4.11 V oboru reálných čísel řešte iracionální rovnici:

$$a) x - 4 = \sqrt{2x} \qquad b) \sqrt{x-7} - \sqrt{5-x} = 3$$

Řešení:

$$a) \text{Řešíme za předpokladu } x - 4 \geq 0 \wedge 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ \text{Umocněním dostaneme}$$

$$(x-4)^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

Podmínce řešitelnosti vyhovuje pouze $x = 8$.

Umocnění je neekvivalentní operace, provedeme zkoušku:

$$\left. \begin{array}{l} L(8) = 8 - 4 = 4 \\ P(8) = \sqrt{16} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{x = 8}}$$

$$b) \text{Řešíme za předpokladu } x - 7 \geq 0 \wedge 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \in \{ \}$$

\Rightarrow rovnice nemá řešení.

Logaritmické rovnice jsou rovnice, v nichž se vyskytují logaritmy výrazů s neznámou $x \in \mathbb{R}$. Jestliže stanovíme podmínky řešitelnosti a řešíme ekvivalentními úpravami, pak zkouška není nutná.

Příklad 4.12 Řešte v \mathbb{R} logaritmické rovnice:

$$a) \log x + \frac{3}{\log x} = 4 \quad b) \frac{1}{2} \log(2x - 3) = \log(x - 3)$$

Řešení:

$$a) \text{ Podmínky: } x > 0 \wedge \log x \neq 0 \Rightarrow x \in (0, 1) \cup (1, \infty).$$

Rovnici vynásobíme $\log x$, dostaneme

$$\log^2 x - 4 \log x + 3 = 0$$

Odtud $\log x_1 = 3 \vee \log x_2 = 1$, je tedy $x_1 = 10^3 \vee x_2 = 10^1$.

Obě řešení patří do oboru řešitelnosti.

$$b) \text{ Podmínky } x > \frac{3}{2} \wedge x > 3 \Rightarrow x > 3.$$

$$\text{Úpravou } \log(2x - 3) = 2 \log(x - 3).$$

$$\text{Pak } 2x - 3 = (x - 3)^2, \text{ neboli } 2x - 3 = x^2 - 6x + 9.$$

$$\text{Z toho } 0 = x^2 - 8x + 6 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2.$$

Podmínkám vyhovuje pouze $x_1 = 4$.

Exponenciální rovnice jsou rovnice, kde neznámá $x \in \mathbb{R}$ se vyskytuje v exponentu nějaké mocniny. Rovnice řešíme buď logaritmováním, nebo porovnáním exponentu při stejném základu, často až po úpravách.

Příklad 4.13 Řešte v \mathbb{R} exponenciální rovnice.

$$a) \left(\frac{4}{25}\right)^{x+3} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{4x-1} = \frac{5}{2} \quad b) 3 \cdot 2^x + 2^{3-x} = 10 \quad c) 9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Řešení:

$$a) \text{ Upravíme vše na mocniny o základu } a = \frac{5}{2}.$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-2(x+3)} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3(4x-1)} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$-2x - 6 + 12x - 3 = 1 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow \underline{x = 1}$$

$$b) \text{ Položíme } 2^x = y, \text{ pak } 3y + 8 \cdot \frac{1}{y} = 10, \text{ neboli } 3y^2 - 10y + 8 = 0.$$

Kořeny

$$y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

Pak je $2^{x_1} = 2 \Rightarrow \underline{x_1 = 1}$.

Druhý kořen $2^{x_2} = \frac{4}{3}$ a logaritmováním $\underline{x_2 = 2 - \log_2 3}$.

c) Položíme $3^x = y$, pak $y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y - 1)(y + 3) = 0$.

$y_1 = 1 \Rightarrow 3^{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

$y_2 = -3$ není možné, neboť $3^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Zůstává $\underline{x = 0}$.

Příklad 4.14 Užitím rozkladu kvadratického trojčlenu převed'te na součin:

a) $x^5 - x^4 - 56x^3$ b) $x^4 + 2x^2 - 3$ c) $x^4 - 13x^2 + 40$

[a) $x^3(x - 8)(x + 7)$; b) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$; c) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{8})(x - \sqrt{8})$]

Příklad 4.15 Zjednodušte následující výrazy:

a) $\frac{x - 2y}{x + y} - \frac{2x - y}{y - x} - \frac{2x^2}{x^2 - y^2}$ b) $\frac{a^2 - x^2}{a + b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ax + x^2} \cdot \left(a + \frac{ax}{a - x}\right)$

c) $\left(\frac{2x}{x + y} + \frac{y}{x - y} - \frac{y^2}{x^2 - y^2}\right) : \left(\frac{1}{x + y} + \frac{x}{x^2 - y^2}\right)$

d) $\frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)}{\left(\frac{a^4}{b^2} - \frac{b^4}{a^2}\right) : (a^2 - b^2)}$

e) $1 + \frac{(4 - a^2)^{-\frac{1}{2}} - (2 - a)^{-\frac{1}{2}}}{(2 + a)^{-\frac{1}{2}} + (4 - a^2)^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1 - a}{1 - \sqrt{2 - a}}$

f) $\left(\frac{x^2 + y^2}{x} + y\right) : \left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \cdot \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right]$

g) $\left(v + \frac{u - v}{1 + uv}\right) : \left(1 - \frac{v(u - v)}{1 + uv}\right)$ h) $\frac{\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}}{\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{x-1}{x^2-x+1}} : \frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x^2-x}{x+1}}$

[a) $\frac{x-y}{x+y}$, $x \neq \pm y$; b) $\frac{a^2(a-b)}{x}$, $x \neq 0 \wedge x \neq -a \wedge a \neq -b$; c) x , $x \neq \pm y \wedge 2x \neq y$;

d) 1 , $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b$; e) $\sqrt{a+2}$, $a \in (-2; 1) \cup (1; 2)$;

f) $\frac{xy^2}{x-y}$, $x \neq y \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$; g) u , $uv \neq -1$; h) $\frac{1}{x^3}$, $x \neq 0 \wedge x \neq -1$]

Příklad 4.16 Usměrněte zlomky:

a) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$

[a) $5 + 2\sqrt{6}$; b) $\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$, $x > 2$]

Příklad 4.17 Na základě vět o absolutní hodnotě reálného čísla zjistěte, pro která čísla x platí rovnosti:

$$a) |(x-2)(x-4)| = (x-2)(x-4) \quad b) |(x-4)(x-3)| = |x-4||x-3|$$

$$c) |(x-2)(x-5)| = -(x-2)(x-5)$$

$$d) \left| \frac{x-0,5}{x-1,2} \right| = \frac{|x-0,5|}{|x-1,2|} \quad e) \left| \frac{3-x}{x-2} \right| = \frac{3-x}{x-2}$$

$$[a) x \geq 4 \vee x \leq 2 \quad b) \forall x \in \mathbb{R} \quad c) x \in \langle 2, 5 \rangle; \quad d) \forall x \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \quad e) x \in (2, 3)]$$

Příklad 4.18 Rozhodněte, který z výroků je pravdivý:

$$a) -2 < x < 2 \iff |x| < 2$$

$$b) -1 \leq x < 3 \iff |x-1| \leq 2$$

$$c) |2x-1| < 3 \iff |x| < 4$$

$$d) x \in \langle -3; 5 \rangle \iff |x| < 5$$

$$[a) \text{ pravdivý; } b) \text{ není pravdivý; } c) \text{ není pravdivý; } d) \text{ není pravdivý}]$$

Příklad 4.19 Řešte v \mathbb{R} rovnici $\frac{1-x}{x-2} - \frac{x-2}{1-x} = -\frac{8}{3}$.

$$[x_1 = \frac{5}{2} \vee x_2 = \frac{5}{4}]$$

Příklad 4.20 Řešte v \mathbb{R} následující rovnice:

$$a) x^2 + 2|x-1| - 6 = 0 \quad b) |2x+1| - |2x| + 1 = 2x$$

$$c) \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-1}{x-5} = 4 \quad d) 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$e) x^2 - 0,2x + 0,01 = 0 \quad f) 2(1-x)^2 = x-3$$

$$[a) x_1 = 1 - \sqrt{5} \vee x_2 = 2; \quad b) x = 1; \quad c) x_1 = 9 \vee x_2 = 4; \quad d) x_1 = 2 \vee x_2 = -\frac{1}{3}; \\ e) x_{1,2} = 0,1 \quad f) x \in \{ \}]$$

Příklad 4.21 Řešte v \mathbb{R} rovnici $x - \frac{2}{a^3} = \frac{1}{a^2}(4x+1)$, parametr $a \in \mathbb{R}$.

$$[a \neq 0; \text{ pro } a = 2 \text{ rovnice nemá řešení;} \\ a = -2 \text{ nekonečně mnoho řešení } x = t, t \in \mathbb{R}; a \neq -2, 0, 2 \text{ je } x = \frac{1}{a(a-2)}]$$

Příklad 4.22 Určete reálnou hodnotu parametru a tak, aby rovnice $6a - ax + 2x = 15$, $x \in \mathbb{R}$ měla kladný kořen.

$$[x = \frac{3(2a-5)}{a-2} > 0, a \in (-\infty, 2) \cup (\frac{5}{2}, \infty)]$$

Příklad 4.23 Pro které reálné hodnoty parametru má rovnice

a) $x^2 - tx + 1 - 2t^2 = 0$ reálné různé kořeny?

b) $x^2 - x + m^2 - m = 12$ jeden kořen roven nule?

$$[a) t \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty); b) m = -3 \vee m = 4; x_1 = 0, x_2 = 1]$$

Příklad 4.24 Najděte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3$.

$$[2x^2 - 7x + 3 = 0]$$

Příklad 4.25 Řešte v \mathbb{R} iracionální rovnice:

a) $\sqrt{1+x} - \sqrt{4-x} = 1$ b) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

c) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$ d) $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 2$

e) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$

$$[a) x = 3; b) x = \frac{5}{2}; c) x = 16 d) x \in \{\}; e) x = \frac{5}{3}]$$

Příklad 4.26 Řešte v \mathbb{R} logaritmické rovnice:

a) $\log(4x+6) - \log(2x-1) = 1$ b) $2\log(x-2) = \log(14-x)$

c) $\log(x+1) + \log(x-1) = \log x + \log(x+2)$ d) $\frac{1}{2}\log(2x-3) = \log(x-3)$

$$[a) x = 1; b) x = 5; c) x \in \{\}; d) x = 6]$$

Příklad 4.27 Řešte v \mathbb{R} exponenciální rovnice:

a) $5^x + 1 - 3 \cdot 5^x = -49$

b) $3^{x+1} + 3^x = 4^{x-1} + 4^x$

c) $3 \cdot 2^{2x+1} + 2 \cdot 3^{2x+3} = 3 \cdot 2^{2x+4} - 3^{2x+2}$

d) $\frac{64}{25} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\frac{125}{512}\right)^{3-x}$

$$[a) x = 2; b) x = 4,0408; c) x = -\frac{1}{2}; d) x = 4 \vee x = \frac{2}{3}]$$

5 Soustavy rovnic

5.1 Soustavy lineárních rovnic

Několik rovnic o dvou a více neznámých, které mají být současně splněny, tvoří **soustavu rovnic**. Řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých rovnic.

Při řešení soustavy se používají **ekvivalentní úpravy soustavy rovnic**, tj. takové úpravy, jimiž se nemění řešení soustavy. V takovém případě není nutná zkouška, ale je vhodná pro kontrolu.

Přehled ekvivalentních úprav soustavy rovnic:

Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní, tj. má totéž řešení.

Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.

Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

My se budeme zabývat **soustavou lineárních rovnic**. Základním typem metod řešení lineárních algebraických rovnic jsou eliminační metody, jejichž podstatou je postupná eliminace (vylučování) neznámých z rovnic soustavy. Podle způsobu, jímž eliminujeme jednu neznámou, rozlišujeme několik metod řešení:

Metoda sčítací - rovnice soustavy násobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení vynásobených rovnic jedna neznámá vyloučila.

Příklad 5.1 *Metodou sčítací řešte v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soustavu rovnic.*

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 3y &= 11. \end{aligned}$$

Řešení:

První rovnici vynásobíme třemi, dostáváme rovnici $6x - 3y = 3$. Získali jsme tímto způsobem ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned} 6x - 3y &= 3 \\ x + 3y &= 11. \end{aligned}$$

Rovnice teď sečteme, tím vyloučíme neznámou y a pro neznámou x dostáváme rovnici

$$7x = 14, \quad x = 2.$$

Obdobně lze vyloučit neznámou x vynásobením druhé rovnice minus dvěma a sečtením s první rovnicí. Dostáváme rovnici

$$-7y = -21, \quad y = 3.$$

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y]$, $x = 2$, $y = 3$.

Metoda dosazovací - vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme ji do dalších rovnic, čímž se jedna neznámá ze soustavy vyloučí.

Příklad 5.2 Metodou dosazovací řešte v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 3x + 4y &= -9. \end{aligned}$$

Řešení:

Z první rovnice vyjádříme $y = 2x - 5$, a dosadíme do druhé rovnice. Dostáváme

$$3x + 4(2x - 5) = -9, \quad 11x = -9 + 20, \quad x = 1.$$

Potom $y = 2x - 5 = 2 - 5 = -3$. Dostali jsme řešení $x = 1, y = -3$.

Metodu sčítací a dosazovací můžeme také kombinovat.

Příklad 5.3 V $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{lll} a) \ x + y = 4 & b) \ 14x + 4y = 13 & c) \ 2x - 3y = 5 \\ \quad 2x + 3y = 7 & \quad 7x + 2y = 12 & \quad 4x - 6y = 10 \end{array}$$

Řešení:

$$\begin{array}{llll} a) \ x + y = 4 & / \cdot (-3) & \Rightarrow & -3x - 3y = -12 & \Rightarrow & \underline{\underline{x = 5, y = -1}} \\ \quad 2x + 3y = 7 & & & \quad 2x + 3y = 7 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b) \ 14x + 4y = 13 & \Rightarrow & 14x + 4y = 13 & \Rightarrow & \underline{\underline{soustava nemá}} \\ \quad 7x + 2y = 12 & / \cdot 2 & \quad 14x + 4y = 24 & & \underline{\underline{řešení}} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} c) \ 2x - 3y = 5 & / \cdot 2 & \Rightarrow & 4x - 6y = 10 \\ \quad 4x - 6y = 10 & & & \quad 4x - 6y = 10 \end{array}$$

\Rightarrow soustava má nekonečně mnoho řešení $x = t, y = \frac{1}{3}(2t - 5), t \in \mathbb{R}$

5.2 Gaussova eliminační metoda

Při řešení více než dvou rovnic je nejvýhodnější použití **Gaussovy eliminační metody**, která spočívá v postupném převedení dané soustavy rovnic ekvivalentními úpravami na tzv. trojúhelníkový tvar.

Příklad 5.4 Užitím Gaussovy eliminační metody řešte v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} 9x + 5y - 2z &= 15 & (1) \\ 8x + 6y + 3z &= 15 & (2) \\ 3x - 7y + 4z &= 27 & (3) \end{aligned}$$

Řešení:

Nejprve soustavu upravíme tak aby v první rovnici koeficient u neznámé x byl 1. Bylo by možné toho dosáhnout dělením první rovnice číslem 9, tím bychom ovšem dostali v první rovnici desetinná čísla. Raději od první rovnice odečteme druhou, čímž dostaneme soustavu rovnic:

$$x - y - 5z = 0 \quad (1)$$

$$8x + 6y + 3z = 15 \quad (2)$$

$$3x - 7y + 4z = 27 \quad (3)$$

Dále v získané soustavě od druhé rovnice odečteme 8-krát první, a od třetí rovnice odečteme 3-krát první. Tím eliminujeme neznámou x v těchto rovnicích a dostáváme tuto ekvivalentní soustavu:

$$x - y - 5z = 0 \quad (1)$$

$$14y + 43z = 15 \quad (2)$$

$$-4y + 19z = 27 \quad (3)$$

Nyní druhou rovnici dělíme čtrnácti, abychom u neznámé y získali koeficient 1. Dále k třetí rovnici přičteme 4-krát druhou, čímž v ní eliminujeme neznámou y . Tím přecházíme k této soustavě rovnic:

$$x - y - 5z = 0 \quad (1)$$

$$y + \frac{43}{14}z = \frac{15}{14} \quad (2)$$

$$219z = 219 \quad (3)$$

Tato soustava má trojúhelníkový tvar a její řešení určíme snadno takto: Z třetí rovnice po dělení číslem 219 dostáváme: $z = 1$. Dosazením do druhé rovnice vypočteme

$$y = \frac{1}{14}(15 - 43) = -2$$

a po dosazení do první rovnice vychází $x = -2 + 5 = 3$.

Dostali jsme řešení $x = 3, y = -2, z = 1$.

Příklad 5.5 V \mathbb{R}^3 řešte soustavu rovnic:

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - y + z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 5z = 2 \\ 2x + 5y + 8z = 12 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

Řešení:

Soustavy budeme řešit Gaussovou eliminační metodou.

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - y + z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ -7y - 8z = -15 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ y + 2z = 3 \\ 6z = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ -7y - 8z = -15 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ y + 2z = 3 \\ 6z = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ y + 2z = 3 \\ 6z = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ y + 2z = 3 \\ 6z = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ y + 2z = 3 \\ 6z = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ y + 2z = 3 \\ 6z = 6 \end{cases}$$

Tato soustava má trojúhelníkový tvar a můžeme jej snadno vyřešit.

Postupně dostáváme $z = 1$, $y = 3 - 2z = 1$, $x = 7 - 2y - 3z = 7 - 2 - 3 = 2$.

Dostali jsme tedy řešení $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

$$\begin{array}{l} b) \quad x + 2y + 3z = 1 \quad x + 2y + 3z = 1 \quad x + 2y + 3z = 1 \\ \quad x + 3y + 5z = 2 \quad \Rightarrow \quad y + 2z = 1 \quad \Rightarrow \quad y + 2z = 1 \\ \quad 2x + 5y + 8z = 12 \quad \quad \quad y + 2z = 10 \quad \quad \quad 0 = 9 \end{array}$$

Z trojúhelníkového tvaru vidíme, že soustava nemá řešení.

$$\begin{array}{l} c) \quad x + 2y + 3z = 1 \quad x + 2y + 3z = 1 \quad x + 2y + 3z = 1 \\ \quad 2x + 4y + 6z = 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y + 2z = -3 \\ \quad \quad x - y + z = 4 \quad \quad \quad 3y + 2z = -3 \end{array}$$

\Rightarrow soustava má nekonečně mnoho řešení.

Zvolíme-li $z = t$, pak postupně máme

$$y = -\frac{2}{3}t - 1 \quad a \quad x = 1 + \frac{4}{3}t + 2 - 3t = 3 - \frac{5}{3}t.$$

Řešením soustavy potom bude uspořádaná trojice $x = 3 - \frac{5}{3}t$, $y = -1 - \frac{2}{3}t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 5.6 Řešte v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{array}{lll} a) \quad 8x - 3y + 12 = 0 & b) \quad 2x - 6y = -2 & c) \quad x + 2y = 4 \\ \quad 3x + 2y - 33 = 0 & \quad x - 3y = 4 & \quad 2x + 4y = 8 \end{array}$$

[a) $x = 3, y = 12$; b) nemá řešení; c) $x = 4 - 2a, y = a, a \in \mathbb{R}$]

Příklad 5.7 Převedením na trojúhelníkový tvar řešte v \mathbb{R}^3 soustavy rovnic:

$$\begin{array}{lll} a) \quad 2x - 3y + 4z = 8 & b) \quad x + 4y - 3z = 0 & c) \quad x + 2y + 4z = 31 \\ \quad 3x + 5y - z = 10 & \quad x - 3y - z = 0 & \quad 5x + y + 2z = 29 \\ \quad 7x - y + 7z = 15 & \quad 2x + y - 4z = 0 & \quad 3x - y + z = 10 \end{array}$$

[a) nemá řešení; b) $x = 13t/7, y = 2t/7, z = t$; c) $x = 3, y = 4, z = 5$]

Příklad 5.8 Převedením na trojúhelníkový tvar řešte v \mathbb{R}^4 soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ll} a) \quad 2x - 3y + 6z - u = 1 & b) \quad x + 2y - z - 2u = -2 \\ \quad x + 2y - z = 0 & \quad 2x + y + z + u = 8 \\ \quad x + 3y - z - u = -2 & \quad x - y - z + u = 1 \\ \quad 9x - y + 15z - 5u = 1 & \quad x + 2y + 2z - u = 4 \end{array}$$

[a) soustava nemá řešení; b) $x = 1, y = 2, z = 1, u = 3$]

Příklad 5.9 Určete vzájemnou polohu tří rovin:

$$\alpha : 2x - 3y + z = 0$$

$$\beta : x + 2y - z - 3 = 0$$

$$\gamma : 2x + y + z - 12 = 0$$

[roviny se protínají v bodě $[2, 3, 5]$]

Příklad 5.10 Užitím Gaussovy eliminační metody řešte v \mathbb{R}^3 soustavu rovnic v závislosti na parametru a .

$$2x + 9y + 2z = 7a - 4$$

$$3x + 3y + 4z = 3a - 6$$

$$4x - 6y + 2z = -a - 8$$

$[x, y, z] = [a - 2, 2a/3, -a/2]$

6 Řešení nerovnic

6.1 Operace s nerovnicemi

Jsou-li f a g funkce proměnné x definované na množině $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, pak úloha: "najděte všechna $x \in \mathcal{D}$, která po dosazení do jednoho ze vztahů:

$$f(x) < g(x), f(x) > g(x), f(x) \leq g(x), f(x) \geq g(x)$$

dají pravdivou nerovnost" znamená řešit nerovnici s neznámou x .

Při řešení nerovnic používáme ekvivalentní úpravy:

1. Záměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnice:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x)$$

2. Přičtení konstanty nebo funkce $h(x)$, definované v \mathcal{D} , k oběma stranám nerovnice:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$

3. Násobení nenulovou konstantou nebo funkcí $h(x)$ definovanou v \mathcal{D} :

$$a) h(x) > 0 \text{ pro } x \in \mathcal{D} : f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x)$$

$$b) h(x) < 0 \text{ pro } x \in \mathcal{D} : f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) > g(x)h(x)$$

4. Umocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

$$0 \leq f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^n(x) < g^n(x), n \in \mathbb{N}$$

5. Odmocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

$$0 \leq f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}, n \in \mathbb{N}$$

Pokud používáme při řešení nerovnic ekvivalentní úpravy, není potřeba provádět zkoušku, snad jen pro vyloučení vlastních chyb.

Klasifikace nerovnic

Elementární nerovnice s neznámou x můžeme rozdělit (podobně jako rovnice) podle toho, v jaké pozici se v dané nerovnici nachází neznámá. Rozlišujeme nerovnice lineární a kvadratické, nerovnice s absolutní hodnotou, exponenciální a logaritmické nerovnice, iracionální nerovnice.

Postup řešení pro jednotlivé typy nerovnic ukážeme na příkladech.

6.2 Lineární nerovnice

Příklad 6.1 Řešte v \mathbb{R} nerovnici

$$\frac{2x - 17}{4} - \frac{8 - x}{2} - 2 \leq x - 4 + \frac{x}{8}.$$

Řešení:

Odstraníme zlomky a upravíme roznásobením.

$$\begin{aligned} 2(2x - 17) - 4(8 - x) - 16 &\leq 8(x - 4) + x \\ 4x - 34 - 32 + 4x - 16 &\leq 8x - 32 + x \\ 4x + 4x - 8x - x &\leq -32 + 34 + 32 + 16 \\ -x &\leq 50 \quad \cdot (-1) \\ x &\geq -50 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \in \langle -50; \infty \rangle}} \end{aligned}$$

Příklad 6.2 Řešte v \mathbb{N} nerovnici

$$\frac{3x - 1}{4} - \frac{5 - 6x}{2} - 2 \leq 8 + \frac{3x}{2}.$$

Řešení:

Odstraníme zlomky a upravíme roznásobením, stejně jako když hledáme řešení nerovnice v \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \frac{3x - 1}{4} - \frac{5 - 6x}{2} - 2 &\leq 8 + \frac{3x}{2} \quad \cdot 4 \\ 3x - 1 - 2(5 - 6x) &\leq 32 + 2 \cdot 3x \\ 3x - 1 - 10 + 12x &\leq 32 + 6x \\ 3x + 12x - 6x &\leq 32 + 1 + 10 \\ 9x &\leq 43 \\ x &\leq \frac{43}{9} \quad \wedge \quad x \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Hledáme řešení v oboru přirozených čísel. Dostaneme

$$\underline{\underline{x \in \{1, 2, 3, 4\}}}$$

Příklad 6.3 Řešte v \mathbb{R} nerovnici v podílovém tvaru $\frac{12 - x}{x - 4} > 0$.

Řešení:

$$\frac{12-x}{x-4} > 0 \Leftrightarrow [(12-x) > 0 \wedge (x-4) > 0] \vee [(12-x) < 0 \wedge (x-4) < 0]$$

$$[x < 12 \wedge x > 4] \vee [x > 12 \wedge x < 4]$$

$$4 < x < 12 \vee x \in \{ \}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in (4; 12)}}$$

Jiný způsob řešení:

Najdeme tzv. nulové body čitatele a jmenovatele - to jsou body, ve kterých je polynom v čitateli nebo ve jmenovateli roven nule - a v intervalech mezi nulovými body zjistíme znaménko čitatele, jmenovatele a nakonec celého zlomku.

	$(-\infty; 4)$	$(4; 12)$	$(12; \infty)$
$12 - x$	+	+	-
$x - 4$	-	+	+
podíl	-	+	-

Máme ostrou nerovnost, takže řešením naší nerovnice je $x \in (4; 12)$.

Příklad 6.4 Řešte v \mathbb{R} nerovnici $\frac{2-x}{4+x} \leq 1$.

Řešení:

Upravíme na podílový tvar:

$$\frac{2-x-4-x}{4+x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x+1)}{4+x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{4+x} \geq 0.$$

Můžeme využít nulových bodů čitatele a jmenovatele, pak dostaneme řešení

$$\underline{\underline{x \in (-\infty; -4) \cup \langle -1; \infty \rangle}}$$

Danou rovnici můžeme řešit i jinak:

$$\frac{2-x}{4+x} \leq 1 \quad | \cdot (4+x)$$

$$a) 4+x > 0 \Rightarrow 2-x \leq 4+x \Rightarrow -2 \leq 2x \Rightarrow x \geq -1$$

Dostali jsme, že

$$(x > -4 \wedge x \geq -1) \Rightarrow x \geq -1.$$

$$b) 4+x < 0 \Rightarrow 2-x \geq 4+x \Rightarrow x \leq -1$$

Dostali jsme, že

$$(x < -4 \wedge x \leq -1) \Rightarrow x < -4.$$

Tedy $x < -4 \vee x \geq -1$ čili $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -1; \infty \rangle$.

6.3 Kvadratická nerovnice

Příklad 6.5 Řešte v \mathbb{R} nerovnici $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

Řešení:

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [(x - 5) \geq 0 \wedge (x + 1) \geq 0] \vee [(x - 5) \leq 0 \wedge (x + 1) \leq 0]$$

$$x \geq 5 \vee x \leq -1 \Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty; -1) \cup \langle 5; \infty)}}}$$

Úlohu můžeme řešit i pomocí nulových bodů

polynomu nebo také graficky:

$y = x^2 - 4x - 5$ je rovnice paraboly,

její vrcholový tvar je $y + 9 = (x - 2)^2$,

vrchol je $V[2; -9]$, průsečíky s osou x :

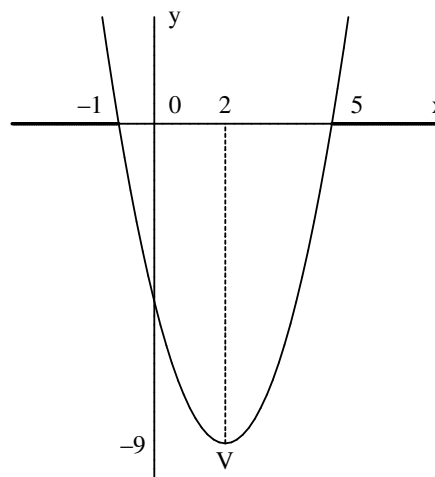
$$P_1[-1; 0] \quad P_2[5; 0],$$

$$\text{protože } (x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3$$

$$\Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -1.$$

Načrtneme graf.

Vidíme, že $y \geq 0$ pro $x \in \underline{\underline{(-\infty; -1) \cup \langle 5; \infty)}}$.



Příklad 6.6 Řešte v \mathbb{R} nerovnici $\frac{x + 3}{x - 1} + \frac{x + 4}{x - 4} \geq 2$.

Řešení:

Převědeme na podílový tvar $\frac{(x + 3)(x - 4) + (x + 4)(x - 1) - 2(x - 1)(x - 4)}{(x - 1)(x - 4)} \geq 0$ a po

úpravě čitatele $\frac{12(x - 2)}{(x - 1)(x - 4)} \geq 0$.

Pomocí nulových bodů:

	$(-\infty; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 4)$	$(4; \infty)$
$x - 1$	-	+	+	+
$x - 2$	-	-	+	+
$x - 4$	-	-	-	+
zlomek	-	+	-	+

$$\underline{\underline{x \in (1; 2) \cup (4; \infty)}}$$

6.4 Nerovnice s absolutními hodnotami

Příklad 6.7 Řešte v \mathbb{R} nerovnici $|12 - x| > 15 - |x + 3|$.

Řešení:

Pomocí nulových bodů výrazů v absolutních hodnotách rozdělíme \mathbb{R} na intervaly, ve kterých nerovnice řešíme.

$$\text{Pro } x \in (-\infty; -3) : \underbrace{12 - x > 15 + (x + 3)}_{x < -3} \Rightarrow x < -3.$$

$$\text{Pro } x \in (-3; 12) : \underbrace{12 - x > 15 - (x + 3)}_{x \in \{ \}} \Rightarrow 12 < 12.$$

$$\text{Pro } x \in (12; \infty) : \underbrace{-12 + x > 15 - (x + 3)}_{x > 12} \Rightarrow x > 12.$$

Celé řešení rovnice $x \in \underline{\underline{(-\infty; -3) \cup (12; \infty)}}$.

6.5 Iracionální nerovnice a soustavy nerovnic

Příklad 6.8 Řešte v \mathbb{R} nerovnici $\sqrt{x - 3} < 5$.

Řešení:

Nerovnice má smysl pouze pro $x - 3 \geq 0$ t.j. $x \geq 3$, potom na obou stranách nerovnice jsou nezáporná čísla a lze umocnit:

$$x - 3 < 25 \Rightarrow x < 28.$$

Řešení je pak $x \in \underline{\underline{\langle 3; 28 \rangle}}$.

Příklad 6.9 Řešte v \mathbb{R} nerovnici $x + 1 < \sqrt{6x - 14}$.

Řešení:

Řešíme za předpokladu $6x - 14 \geq 0 \wedge x + 1 \geq 0$, tedy $x \geq \frac{7}{3}$.

Po umocnění $x^2 + 2x + 1 < 6x - 14 \Rightarrow x^2 - 4x + 15 < 0$.

Kvadratický trojčlen $x^2 - 4x + 15$ má komplexní kořeny ($D < 0$).

Parabola $y = x^2 - 4x + 15$ nikde neprotne osu x , proto řešení je $x \in \underline{\underline{\{ \}}}$.

Příklad 6.10 Řešte v \mathbb{R} soustavu nerovnic

$$\frac{1}{x+1} > 0 \wedge x^3 - x^2 < 0.$$

Řešení:

Ekvivalentní soustava je $x + 1 > 0 \wedge x^2(x - 1) < 0$.

Na znaménko polynomu nemají vliv kořeny se sudou násobností.

Tedy $x \in \underline{\underline{(-1; 0) \cup (0; 1)}}$.

Příklad 6.11 Která přirozená čísla splňují nerovnici $\frac{3}{2}x - \frac{2x+6}{3} > \frac{4x-2}{5}$.

$$[x \in \{49, 50, 51, \dots\}]$$

Příklad 6.12 Řešte v \mathbb{R} nerovnice:

$$a) \frac{1-3x}{x+4} < 2 \quad b) \frac{x+2}{1-x} \leq -2 \quad c) \frac{3x-1}{x+1} < 2 \quad d) \frac{x^2+x}{x^2+1} \leq 1$$

$$[a) (-\infty; -4) \cup (-\frac{7}{5}; \infty); b) (1; 4); c) (-1; 3); d) (-\infty; 1)]$$

Příklad 6.13 V množině celých záporných čísel řešte nerovnici

$$\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{3} - 5 > \frac{x-1}{2}.$$

$$[x \in \{-8, -9, -10, \dots\}]$$

Příklad 6.14 Jaké musí být číslo k , aby rovnice $5kx - 9 = 10x - 3k$ měla kladné řešení?

$$[2 < k < 3]$$

Příklad 6.15 Řešte v \mathbb{R} kvadratické nerovnice:

$$a) 2x^2 - 3x - 2 > 0 \quad b) 20x - x^2 \geq 36$$

$$c) x^2 + x + 1 < 0 \quad d) x^2 - 0,2x + 0,01 \leq 0$$

$$[a) x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty); b) x \in (2; 18); c) x \in \{ \}; d) x = 0,1]$$

Příklad 6.16 Pro která $m \in \mathbb{R}$ bude platit $x^2 + 6x + (5m - 1)(m - 1) > 0$ pro všechna reálná x ?

$$[m \in (-\infty; -\frac{4}{5}) \cup (2; \infty)]$$

Příklad 6.17 Řešte v \mathbb{R} nerovnice:

$$a) \frac{x+2}{x+3} - \frac{2x-1}{3x+1} \geq 0 \quad b) x(x^2 - 7x + 10) > 0$$

$$c) \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - x - 2} < 0 \quad d) \frac{x^4}{x+2} + \frac{x^4}{3-x} < \frac{(10x-6)x^2}{-x^2+x+6}$$

$$[a) x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{1}{3}; \infty); b) x \in (0; 2) \cup (5; \infty);$$

$$c) x \in (-1; 2) \cup (3; 6); d) x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)]$$

Příklad 6.18 V oboru reálných čísel řešte nerovnice:

$$a) |x-3| > 5 \quad b) |x+2| < 8$$

$$[a) x \in (-\infty; -2) \cup (8; \infty); b) x \in (-10; 6)]$$

Příklad 6.19 Pomocí absolutní hodnoty запиšte nerovnice:

$$a) -2 < x < 2 \quad b) 1 \leq x \leq 3 \quad c) -3 \leq x \leq -1$$

$$[a) |x| < 2; b) |x-2| \leq 1; c) |x+2| \leq 1]$$

Příklad 6.20 Najděte množinu všech řešení rovnic s absolutní hodnotou:

$$a) |x| + \frac{1}{x} < 0 \quad b) \frac{|x|}{x} - 1 < 0$$

$$c) |x+1| + |x| \leq 2 \quad d) 1 - |x| \leq |x+1|$$

$$e) \frac{|2x-2|}{2-x} < 1 \quad f) |x| \leq |x-1|$$

$$g) |3x+1| < 2x \quad h) |x+2| - 2|2x+4| \leq |3x-1|$$

$$i) |x-3| \cdot |x-2| \cdot |x+4| > 0$$

$$[a) x \in (-1; 0); b) x \in (-\infty; 0); c) x \in \langle -\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \rangle; d) x \in \mathbb{R}; e) x \in (0; \frac{4}{3}) \cup (2; \infty);$$

$$f) x \in (-\infty; \frac{1}{2}); g) x \in \emptyset; h) x \in \mathbb{R}; i) x \in \mathbb{R}, x \neq -4, 2, 3]$$

Příklad 6.21 Řešte v \mathbb{R} iracionální nerovnice:

$$a) \sqrt{x^2 + x - 12} \leq 6 - x \quad b) x - 3\sqrt{x} - 4 \geq 0$$

$$c) \sqrt{x+2} < \sqrt{2x-8} \quad d) \sqrt{x-2} + x > 4$$

$$e) \sqrt{-x^2 + 8x - 12} > \sqrt{3}$$

$$[a) x \in (-\infty; -4) \cup \langle 3; \frac{48}{13} \rangle; b) x \in \langle 16; \infty \rangle; c) x \in (10; \infty);$$

$$d) x \in (3; \infty); e) x \in (3; 5)]$$

Příklad 6.22 Řešte v \mathbb{R} soustavu nerovnic

$$x^2 - 4x - 5 < 0 \quad \wedge \quad x^2 - 8x + 15 < 0.$$

$$[x \in (3; 5)]$$

Příklad 6.23 Najděte $x \in \mathbb{R}$, která splňují složenou nerovnost.

$$a) \frac{x}{2} - 1 < |x| < \frac{x}{2} + 1 \quad b) |3x - 1| < x < |3x + 1|$$

$$[a) -\frac{2}{3} < x < 2; b) \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}]$$

Příklad 6.24 Najděte zlomek, pro nějž platí:

zmenšíme-li jmenovatele o 1, je zlomek roven $\frac{1}{2}$, zvětšíme-li čitatele o 20, dostaneme zlomek z intervalu $(2;3)$.

$$[\frac{4}{9}, \frac{5}{11}]$$

7 Elementární funkce

7.1 Lineární funkce

Lineární funkcí nazýváme každou funkci f , která je daná předpisem

$$f : y = kx + q, \quad k, q \in \mathbb{R}.$$

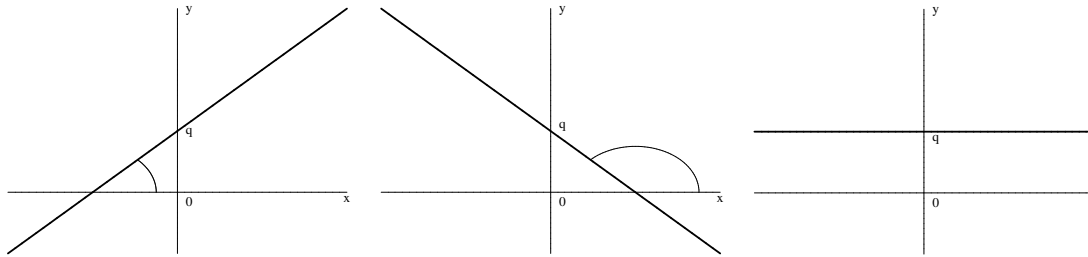
Grafem lineární funkce je vždy přímka různoběžná s osou O_y .

Definiční obor \mathcal{D} lineární funkce f (značíme \mathcal{D}_f) je \mathbb{R} .

Obor hodnot funkce f pro $k \neq 0$ (značíme \mathcal{H}_f) je \mathbb{R} .

Význam konstant k, q je vidět z následujícího obrázku:

Pro $k = 0$ dostáváme **konstantní funkci**.



$k > 0$
 $k = \operatorname{tg} \alpha, \alpha < \frac{\pi}{2}$
 rostoucí funkce

$k < 0,$
 $k = \operatorname{tg} \alpha, \alpha > \frac{\pi}{2}$
 klesající funkce

$k = 0$
 $k = \operatorname{tg} \alpha, \alpha = 0$
 konstantní funkce

Příklad 7.1 Určete lineární funkci, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice $[-2; -3], [-1; -4]$ a jejíž obor funkčních hodnot je interval $\langle -6; 0 \rangle$.

Sestrojte graf.

Řešení:

Je $y = kx + q$ a dosadíme souřadnice bodů.

Pak $-3 = -2k + q \wedge -4 = -k + q$.

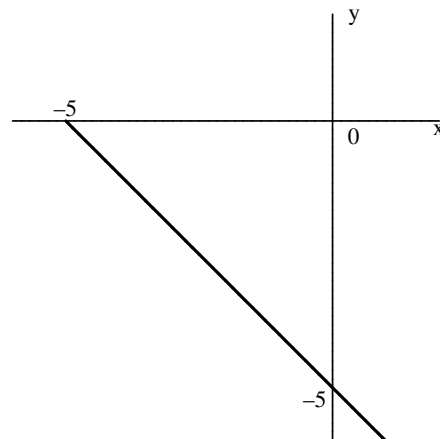
Řešením této soustavy dostaneme

$k = -1, q = -5$.

Lineární funkce pak je

$$\underline{\underline{y = -x - 5.}}$$

Pro $y \in \langle -6; 0 \rangle$ dostaneme krajní body úsečky $[1; -6], [-5; 0]$.



Příklad 7.2 Nakreslete grafy těchto funkcí:

a) $f_1 : y = -x + 3$

Funkce je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$, grafem lineární závislosti je přímka.

$$H(f_1) = \mathbb{R}$$

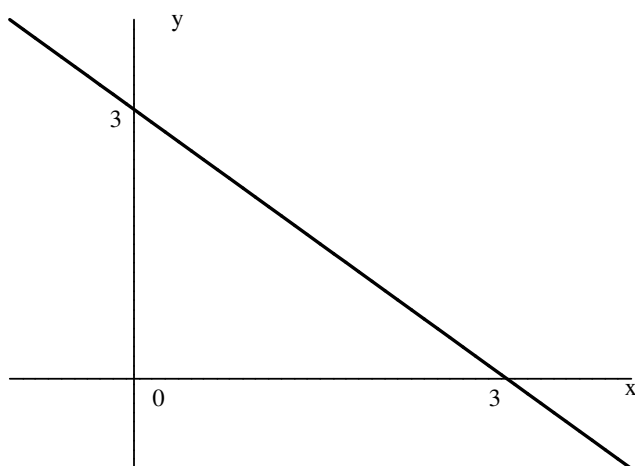
$$\text{Zvolíme } x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 3, \text{ dále } y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3.$$

Tyto průsečíky se souřadnicovými osami nám určí přímku.

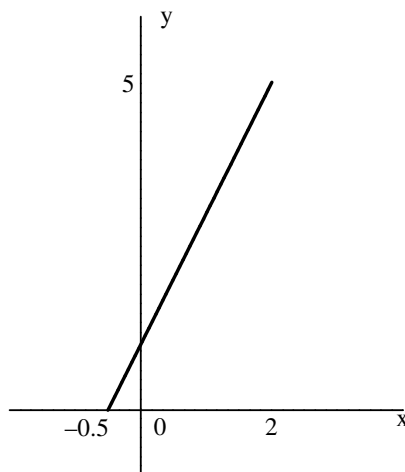
b) $f_2 : y = 2x + 1$ pro $x \in \langle -0,5; 2 \rangle$

Příslušná úsečka má krajní body $[-\frac{1}{2}; 0]$ a $[2; 5]$

$$D(f_2) = \langle -0,5; 2 \rangle, \quad H(f_2) = \langle 0; 5 \rangle$$



$$f_1 : y = -x + 3$$



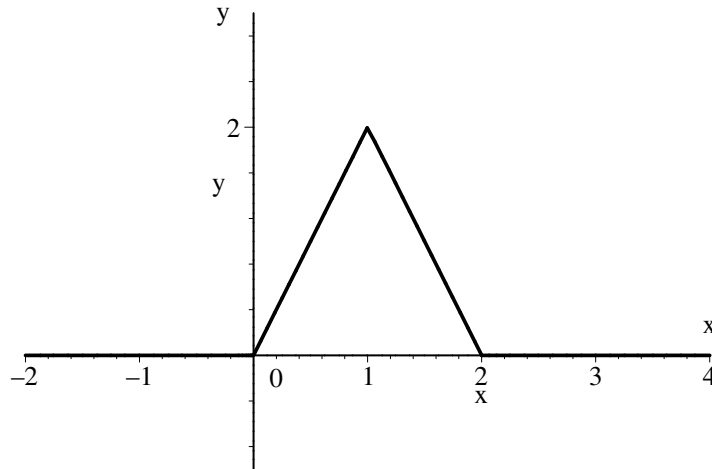
$$f_2 : y = 2x + 1$$

Příklad 7.3 Nakreslete graf funkce $y = |x| - 2|x - 1| + |x - 2|$.

Řešení:

Body $x = 0, 1, 2$ rozdělí osu x na čtyři intervaly a určíme tvar funkce y v jednotlivých intervalech:

	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$ x $	$-x$	x	x	x
$-2 x-1 $	$-2(-x+1)$	$-2(-x+1)$	$-2(x-1)$	$-2(x-1)$
$ x-2 $	$-x+2$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
y	0	$2x$	$-2x+4$	0



$$y = |x| - 2|x - 1| + |x - 2|$$

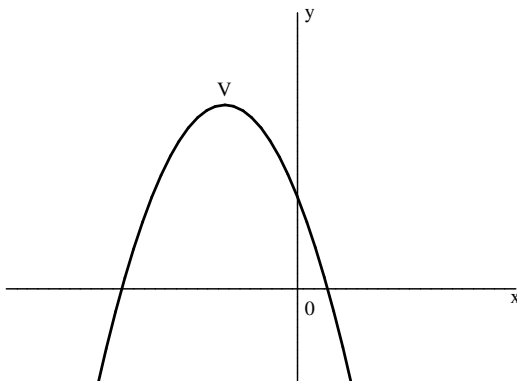
7.2 Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci, která je daná předpisem

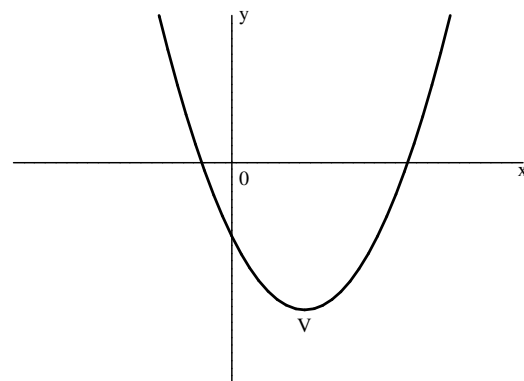
$$f : y = ax^2 + bx + c, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Definiční obor kvadratické funkce f je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Grafem kvadratické funkce je parabola s osou rovnoběžnou s osou y .



$$f : y = ax^2 + bx + c, a < 0$$



$$f : y = ax^2 + bx + c, a > 0$$

Máme-li sestrojit graf kvadratické funkce

$$y = ax^2 + bx + c,$$

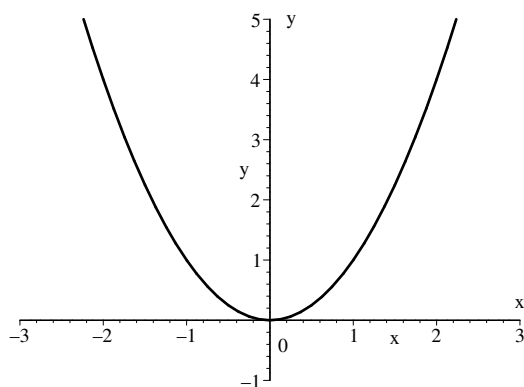
vyjdeme ze základní paraboly $y = x^2$ a postupnými transformacemi určíme souřadnice vrcholu. Je také vhodné určit průsečíky s osami.

Příklad 7.4 Načrtněte graf kvadratické funkce $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$.

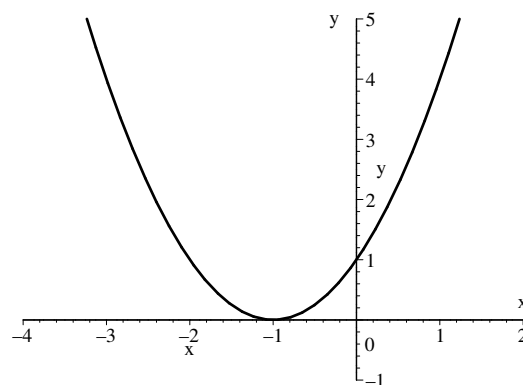
Řešení:

Předpis upravíme na tvar $y + 3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2$ a postupně sestrojíme

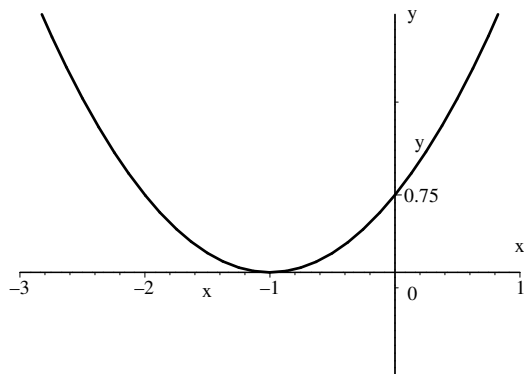
$$y_1 = x^2, \quad y_2 = (x + 1)^2, \quad y_3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2, \quad y = \frac{3}{4}(x + 1)^2 - 3 \text{ neboli } y - 3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2.$$



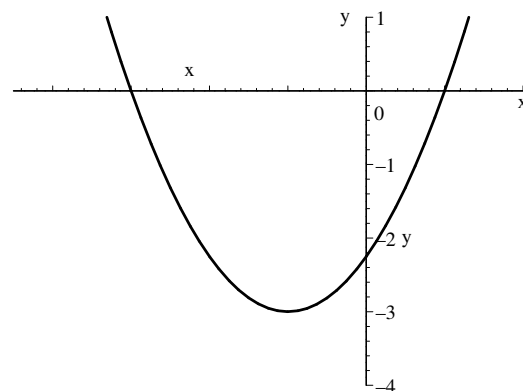
$$y_1 = x^2$$



$$y_2 = (x + 1)^2$$



$$y_3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2$$



$$y + 3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2$$

Obecně tedy:

Rovnoběžným posunutím paraboly $y = ax^2$ do vrcholu $V(m; n)$ dostaneme parabolu

$$y - n = a(x - m)^2.$$

Osa paraboly zůstává rovnoběžná s osou y .

7.3 Mocninná funkce

Mocninná funkce s přirozeným exponentem je funkce

$$f : y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, n > 2.$$

Definiční obor mocninné funkce je $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Příklad 7.5 *Načrtněte grafy funkcí*

$$f_1 : y = x^3 - 1, \quad f_2 : y = (x - 1)^3, \quad f_3 : y = \frac{1}{4}x^4, \quad f_4 : y = |x^4 - 3|.$$

Řešení:

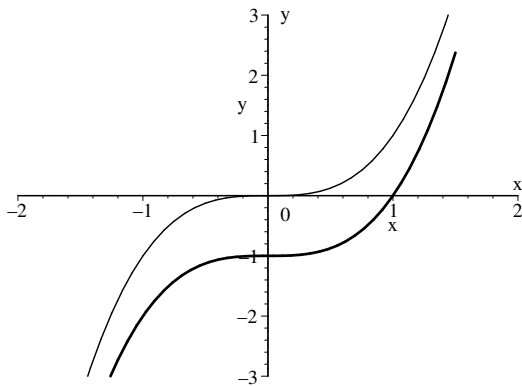
Upravíme analogicky jako u kvadratické funkce:

$$f_1 : y + 1 = x^3, \text{ graf dostaneme posunutím grafu funkce } y = x^3 \text{ do vrcholu } V[0; -1].$$

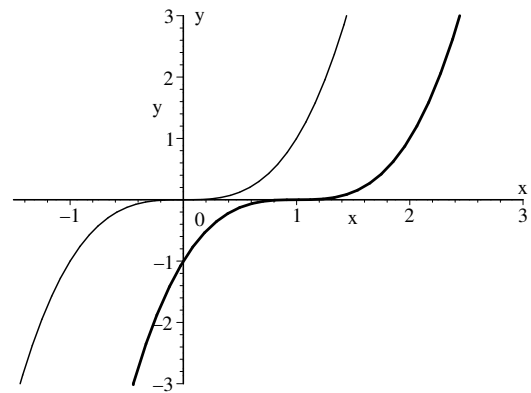
$$f_2 : y + 0 = (x - 1)^3, \quad V[1; 0]$$

$$f_3 : y + 0 = \frac{1}{4}(x + 0)^4, \quad V[0; 0]$$

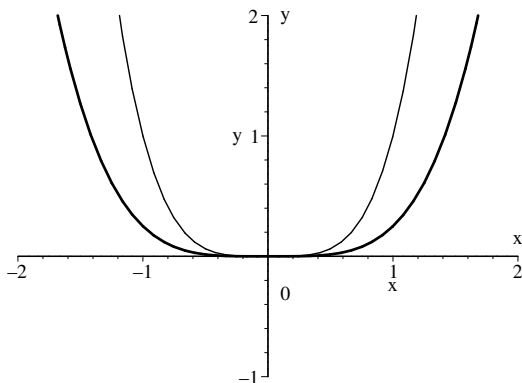
$$f_4 : \text{Nakreslíme postupně grafy } y_1 + 3 = x^4 \text{ a pak } y = |y_1|.$$



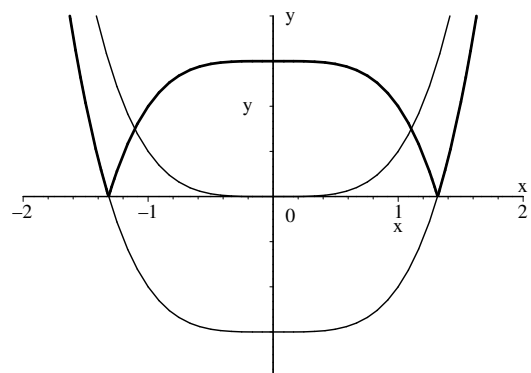
$$f_1 : y + 1 = x^3$$



$$f_2 : y + 0 = (x - 1)^3$$



$$f_3 : y = \frac{1}{4}x^4$$



$$f_4 : y = |x^4 - 3|$$

Příklad 7.6 Bez výpočtu rozhodněte, které z čísel 4^{300} , 3^{400} je větší.

Řešení:

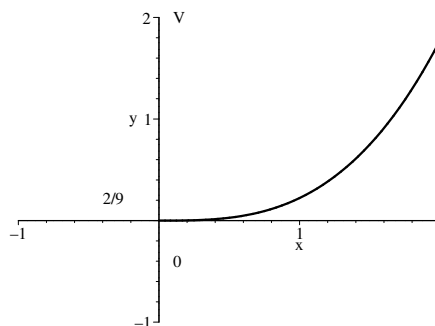
Upravíme $4^{300} = (4^3)^{100}$, $3^{400} = (3^4)^{100}$.

Obě mocniny lze chápat jako hodnoty funkce $y = x^{100}$.

Tato funkce je pro $x \in \langle 0 : \infty \rangle$ rostoucí, $4^3 < 3^4$, proto $4^{300} < 3^{400}$.

Příklad 7.7 Uvažujme množinu všech kvádrů, jejichž délky hran jsou v poměru $1 : 2 : 3$. Určete funkci vyjadřující závislost objemu kvádrů na délce jeho nejdelší hrany a načrtněte její graf.

Řešení:



Označme délku nejdelší hrany b ,

pak $a = \frac{b}{3}$; $c = \frac{2}{3}b$ pro $b > 0$.

Pak $V = \underline{\underline{\frac{2}{9}b^3}}$.

Příklad 7.8 Určete definiční obor funkcí:

$$a) y = \sqrt{2x - 6} \quad b) y = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$$

Řešení:

a) Aby byla funkce $y = \sqrt{2x - 6}$ definovaná, musí být $2x - 6 \geq 0$, tedy $x \geq 3$.

Můžeme tedy psát, že

$$\underline{\underline{D(f) = \langle 3, \infty \rangle}}$$

b) Definičním oborem funkce bude řešení nerovnice $\frac{x - 1}{x + 1} \geq 0$, $x \neq -1$

Nulové body čitatele a jmenovatele jsou $x = -1$ a $x = 1$.

Dostaneme

$$\underline{\underline{D(f) = (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty \rangle}}$$

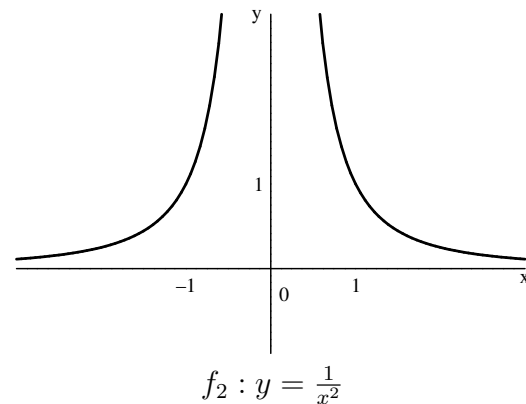
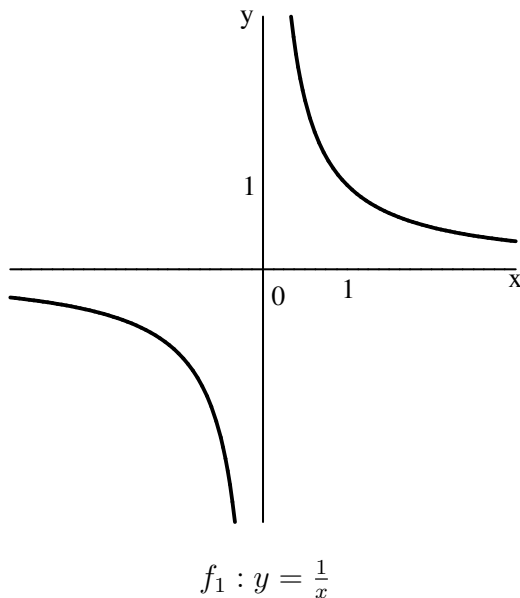
Mocninná funkce s celým záporným exponentem je funkce

$$f : y = x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Definiční obor této funkce $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

Příklad 7.9 Nakreslete grafy funkcí $f_1 : y = \frac{1}{x}$ a $f_2 : y = \frac{1}{x^2}$.

Řešení:



Lineární lomená funkce je funkce daná předpisem

$$f : y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{kde } a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0.$$

Definiční obor této funkce je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$.

Nejjednodušší případ nastane pro $a = d = 0$, pak $y = \frac{k}{x}$ a grafem je **rovnoosá hyperbola**.

V případě, kdy $ad - cb \neq 0$ dostaneme po úpravě

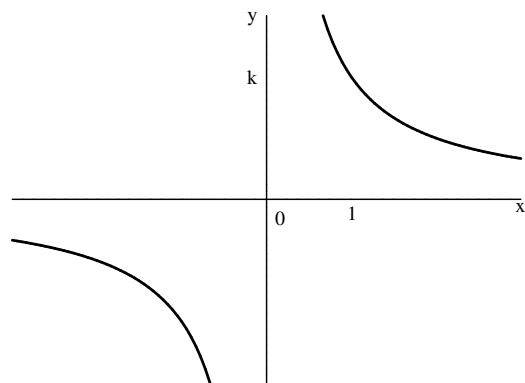
$$y - \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

opět rovnoosou hyperbolu se středem v bodě $S[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}]$, asymptoty procházejí středem a

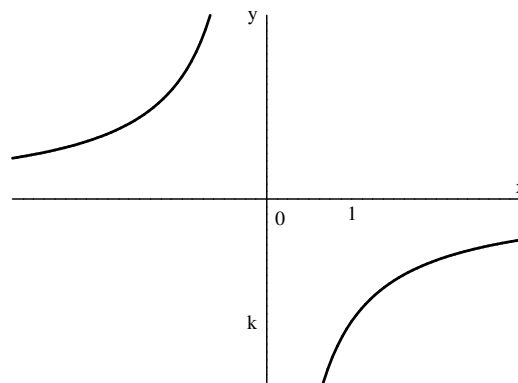
jsou rovnoběžné s osami souřadnými.

Příklad 7.10 Nakreslete graf funkce $f : y = \frac{k}{x}$ (nepřímá úměrnost).

Řešení:



$$f : y = \frac{k}{x} \quad k > 0$$



$$f : y = \frac{k}{x} \quad k < 0$$

Příklad 7.11 V kartézském souřadnicovém systému nakreslete graf funkce

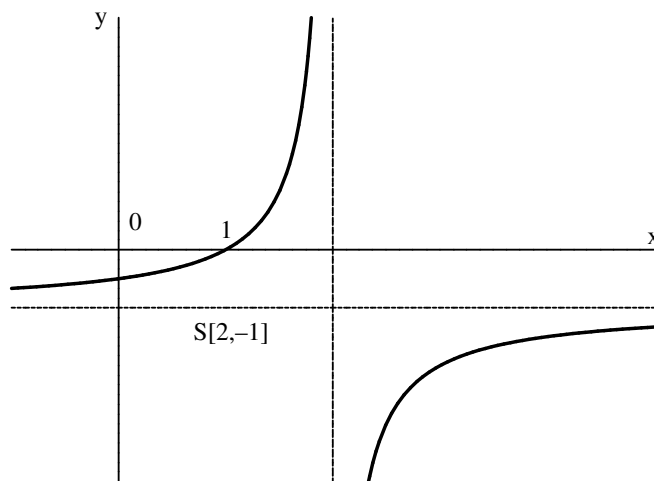
$$f : y = \frac{1-x}{x-2}.$$

Řešení:

$$\text{Upravíme } y = \frac{1-x+2-2}{x-2} = \frac{-x+2-1}{x-2} = -1 - \frac{1}{x-2}, \text{ tedy } y+1 = \frac{-1}{x-2}.$$

Asymptoty procházejí bodem $S[2; -1]$.

Můžeme určit průsečíky se souřadnicovými osami: $X[1; 0]$, $Y[0; -0,5]$



7.4 Exponenciální funkce a logaritmická funkce

Exponenciální funkce o základu $a > 0 \wedge a \neq 1$ je každá funkce

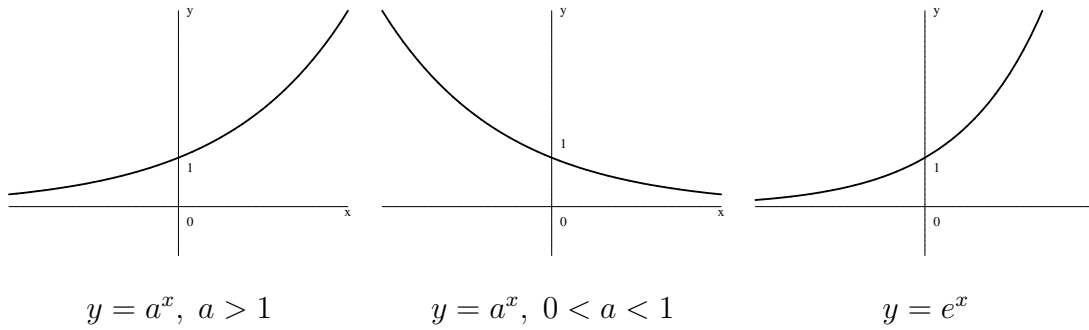
$$f : y = a^x.$$

Definiční obor této funkce $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Obor hodnot $\mathcal{H}_f = (0; \infty)$.

Pro případ $a = e$ dostaneme **přirozenou** exponenciální funkci.

Graficky:



Inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$ je:

Logaritmická funkce o základu $a > 0 \wedge a \neq 1$. Značíme

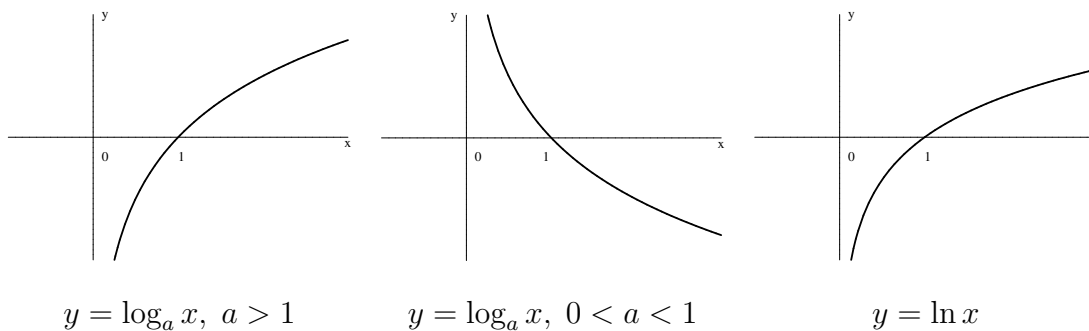
$$f : y = \log_a x.$$

Definiční obor $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

Obor hodnot $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$.

Pro základ $a = e$ dostaneme **přirozený** logaritmus, který používáme nejčastěji.

Graficky:



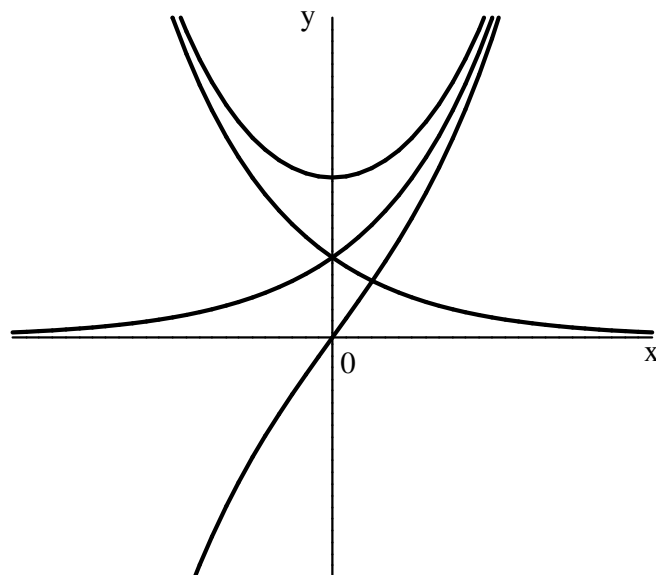
Příklad 7.12 V téže kartézské soustavě souřadnic načrtněte grafy funkcí:

$$f_1 = 2^x, f_2 = 2^{-x}, f_3 = 2^x + 2^{-x} \text{ a } f_4 = 2^x - 2^{-x}.$$

Řešení:

Sestavíme tabulku pro získání několika funkčních hodnot:

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
2^{-x}	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$2^x + 2^{-x}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{4}$
$2^x - 2^{-x}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$



Příklad 7.13 Načrtněte grafy funkcí:

a) $y = 2|x + 1| - 3|x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ b) $y = |x| + x$, $x \in \mathbb{R}$

c) $y = \sqrt{(x - 1)^2}$, $x \in \langle -3; \infty \rangle$

[a) $y = x - 5$, $x \in (-\infty; -1)$; $y = 5x - 1$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$; $y = -x + 5$, $x \in \langle 1; \infty \rangle$;

b) $y = 0$, $x \in (-\infty; 0)$; $y = 2x$, $x \in \langle 0; \infty \rangle$;

c) $y = -x + 1$, $x \in \langle -3; 1 \rangle$; $y = x - 1$, $x \in \langle 1; \infty \rangle$]

Příklad 7.14 Úpravou rovnice paraboly určete souřadnice vrcholu a průsečíky P_1 a P_2 s osou O_x , průsečík Q s osou O_y .

a) $y = 2x^2 - 4x - 6$ b) $y = -x^2 + 4x$

[a) $y = 2(x - 1)^2 - 8, V[1; -8], P_1[-1; 0], P_2[3; 0], Q[0; -6];$

b) $y = -(x - 2)^2 + 4, V[2; 4], P_1[0; 0], P_2[4; 0], Q[0; 0]$]

Příklad 7.15 Sestrojte graf lineární lomené funkce:

a) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ b) $y = \frac{1 + 4x}{x}$ c) $y = \frac{2x}{2 + x}$

Příklad 7.16 Najděte všechna $p \in \mathbb{R}$, pro něž exponenciální funkce $\left(\frac{p}{p+2}\right)^x$ je

a) rostoucí,

b) klesající.

[a) $p \in (-\infty; -2);$ b) $p \in (0; \infty)$]

Příklad 7.17 V téže kartézské soustavě souřadnic nakreslete grafy funkcí:

a) $y = 1,5^x, y = 1,5^{|x|}, y = 1,5^{-|x|}, y = -1,5^{|x|}$

b) $y = \log_3 x, y = \log_3(x - 2), y = \log_3(x + 2), y = 2 - \log_3 x$

Příklad 7.18 Najděte definiční obor těchto funkcí:

a) $y = \log_a(x + 3)$ b) $y = \log_3 x^2$ c) $y = \log_5(-x)$

d) $y = \ln \frac{x - 2}{x + 1}$ e) $y = \log_5 \sqrt{4 - x}$ f) $y = \sqrt{\log_3 x}$

g) $y = \log_{\frac{1}{10}} \sqrt{\frac{x}{3-2x}}$ h) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

[a) $(-3; \infty);$ b) $x \in \mathbb{R}, x \neq 0;$ c) $(-\infty; 0);$
d) $(-\infty; -1) \cup (2; \infty);$ e) $(-\infty; 4);$ f) $\langle 1; \infty);$ g) $(0; \frac{3}{2});$ h) $(0; 1)$]

Příklad 7.19 Najděte definiční obor následujících funkcí:

a) $y = \sqrt{-x^2 + 7x - 12}$ b) $y = 2^{\sqrt{9-x^2}} + \log(3x - 5)$

c) $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + \ln(x+2)$ d) $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 5x - 3}}$

e) $y = \sqrt{1 - \log \frac{1-x}{1+x}}$ f) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 10} + \sqrt{\log(2x + 5)}$

[a) $\langle 3; 4);$ b) $(\frac{5}{3}; 3);$ c) $(1; \infty);$ d) $(-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty);$ e) $\langle -\frac{9}{11}; 1);$ f) $\langle -2; \infty)$]

8 Vlastnosti funkce jedné proměnné

8.1 Vlastnosti a druhy funkcí

Sudá funkce, lichá funkce

Nechť je f funkce definována na množině $D(f) \subset \mathbb{R}$, taková, že pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.

Říkáme, že funkce f je **sudá funkce**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = f(-x)$.

Říkáme, že funkce f je **lichá funkce**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = -f(-x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y , graf liché funkce je souměrný podle počátku.

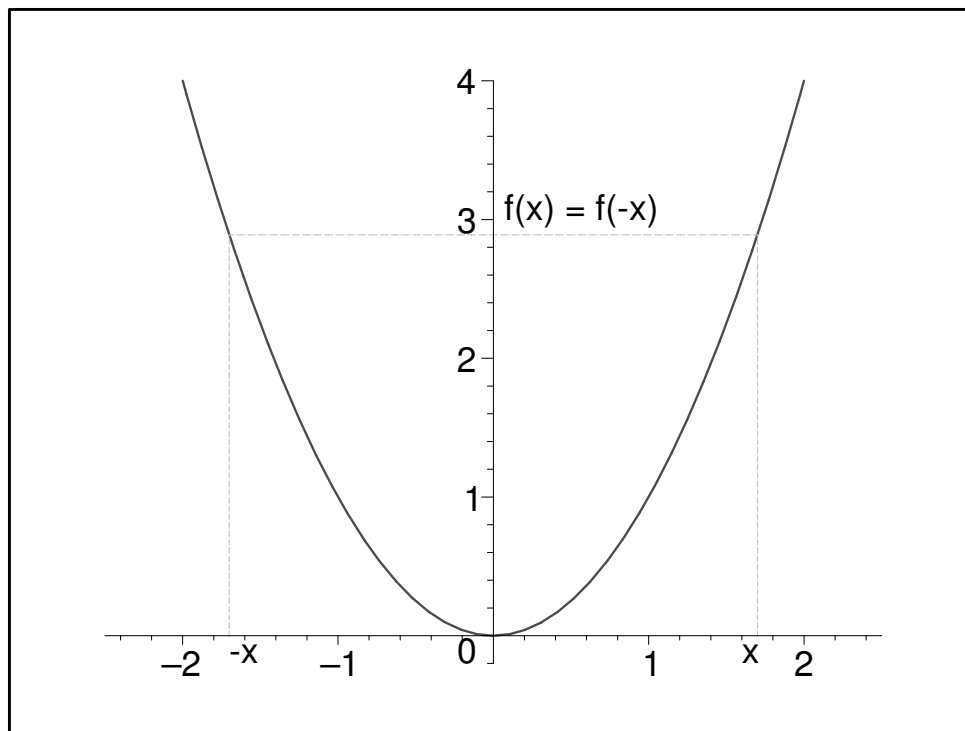
Příklad 8.1 Zjistěte zda funkce :

$$a) y = x^2 \quad b) y = x^3 \quad c) y = (x - 1)^2$$

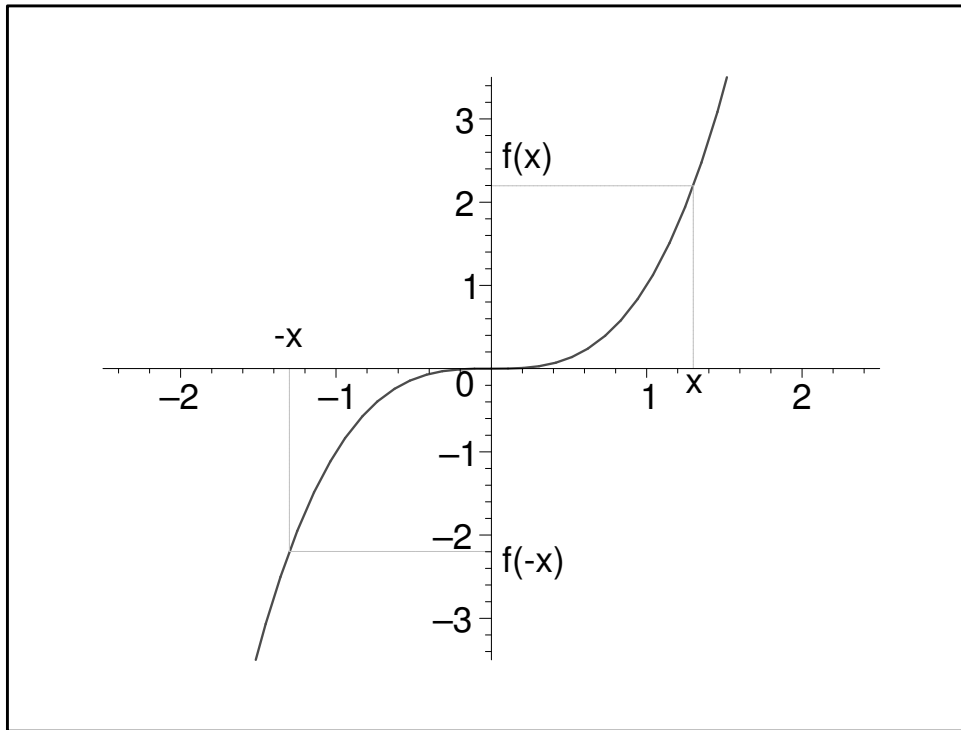
je sudá nebo lichá.

Řešení:

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Funkce je sudá.



Obrázek 8.1: Sudá funkce



Obrázek 8.2: Lichá funkce

b) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Funkce je lichá.

c) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x - 1)^2 = (x + 1)^2 \neq f(x)$, $(x + 1)^2 \neq f(-x)$.

Funkce není ani sudá ani lichá.

Periodická funkce

Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a platí

$$f(x \pm p) = f(x).$$

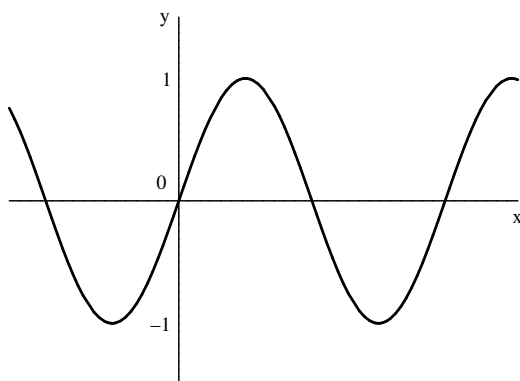
Číslo p se nazývá **perioda funkce** f .

Jestliže p je perioda funkce f , potom platí, že

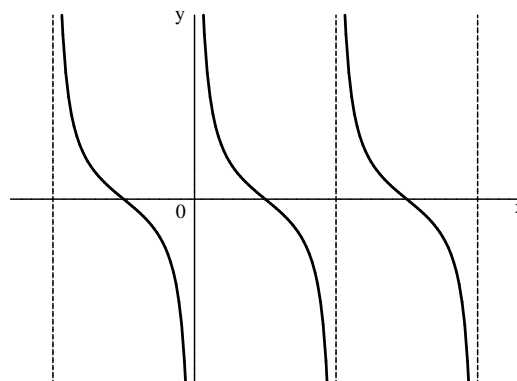
$$f(x + kp) = f(x)$$

pro každé $x \in D(f)$ a každé celé k . Má-li tedy periodická funkce f periodu p , pak také každé číslo kp , ($k \neq 0$, celé) je rovněž periodou funkce f .

Nejvýznamnějšími příklady periodických funkcí jsou goniometrické funkce.



$$y = \sin x, \text{ perioda } p = 2\pi$$



$$y = \cotg x, \text{ perioda } p = \pi$$

Omezená funkce

Funkce f se nazývá **zdola omezená na množině** $M \subset D(f)$, právě když existuje takové reálné číslo d , že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq d$.

Funkce f se nazývá **shora omezená na množině** $M \subset D(f)$, právě když existuje takové reálné číslo h , že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq h$.

Funkce f se nazývá **omezená na množině** $M \subset D(f)$, právě když je zdola omezená a shora omezená na množině M .

Monotonní funkce

Funkce f se nazývá **rostoucí na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:

$$\text{Je-li } x_1 < x_2 \text{ pak } f(x_1) < f(x_2).$$

Funkce f se nazývá **klesající na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:

$$\text{Je-li } x_1 < x_2 \text{ pak } f(x_1) > f(x_2).$$

Funkce f se nazývá **neklesající na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:

$$\text{Je-li } x_1 < x_2 \text{ pak } f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funkce f se nazývá **nerostoucí na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:

$$\text{Je-li } x_1 < x_2 \text{ pak } f(x_1) \geq f(x_2).$$

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají **ryze monotonní funkce na množině** M ; nerostoucí a neklesající funkce se souhrnně nazývají **monotonní funkce na množině** M .

8.2 Inverzní funkce

Funkce f s definičním oborem $D(f)$ se nazývá **prostá funkce** právě když pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Je-li f prostá funkce s definičním oborem $D(f)$, a oborem hodnot $H(f)$, potom k tomuto zobrazení existuje zobrazení inverzní, které je opět prosté a zobrazuje množinu $H(f)$ na množinu $D(f)$. Je to **funkce inverzní k funkci** f a značíme ji f^{-1} .

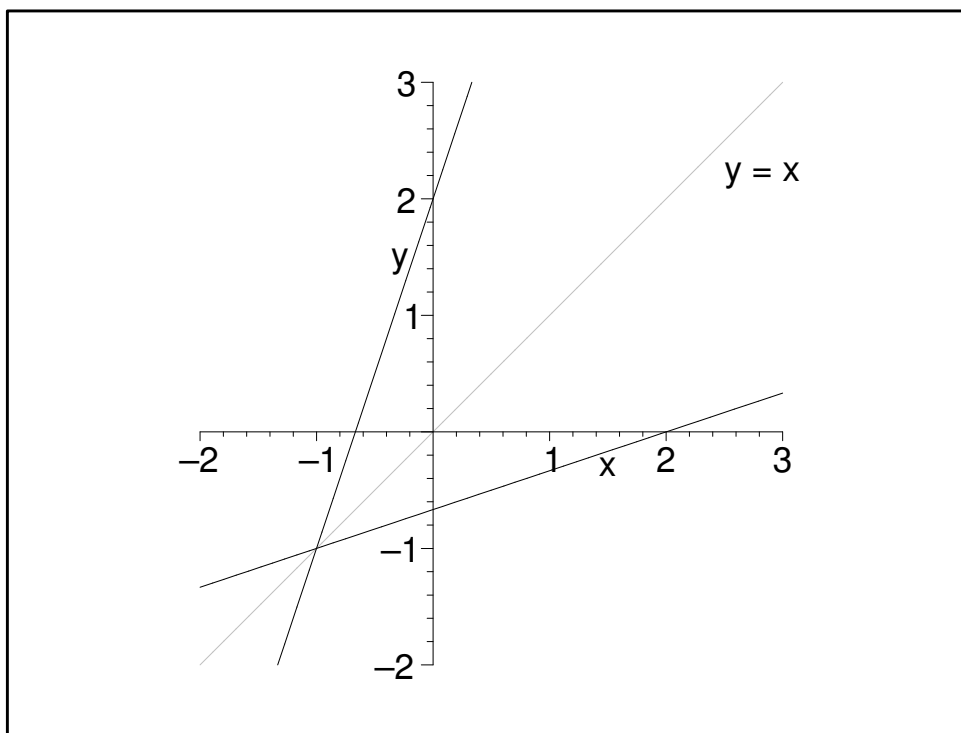
Platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ a $x = f^{-1}(y)$ právě když $y = f(x)$.

Graf inverzní funkce f^{-1} je souměrný s grafem funkce f podle přímky o rovnici $y = x$.

Příklad 8.2 Určete funkci inverzní k funkci $f : y = 3x + 2$.

Řešení:

Funkce f je lineární a je prostá.



Obrázek 8.3: Inverzní funkce k funkci $f : y = 3x + 2$

Inverzní funkci budeme hledat tak, že zaměníme x a y a z nové rovnice vyjádříme y .

$$f^{-1} : x = 3y + 2$$

Z toho $f^{-1} : y = \frac{1}{3}(x - 2)$.

Pro definiční obor inverzní funkce platí, že $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 8.3 Určete funkci inverzní k funkcím :

$$a) y = \ln(2x + 8) \quad b) y = \frac{2x - 5}{x - 1}$$

Řešení:

a) Definičním oborem funkce bude řešení nerovnice $2x + 8 > 0$.

Dostaneme $D(f) = (-4, \infty)$.

Funkce f je logaritmická funkce složená s lineární. Je to funkce složená ze dvou prostých funkcí, tedy je i f prostá funkce.

Zaměníme x a y a z této nové rovnice vyjádříme y .

$$f^{-1} : x = \ln(2y + 8)$$

Inverzní funkce k logaritmické funkci je exponenciální funkce. Aplikujeme tedy exponenciální funkci na obě strany rovnice a dostaneme:

$$e^x = 2y + 8 \quad e^x - 8 = 2y$$

Proto inverzní funkce k funkci $f : y = \ln(2x + 8)$ je funkce

$$\underline{\underline{f^{-1} : y = \frac{e^x - 8}{2}}}$$

Pro definiční obor inverzní funkce platí, že

$$D(f^{-1}) = \mathbb{R},$$

a pro obor hodnot inverzní funkce platí, že

$$H(f^{-1}) = D(f) = (-4, \infty).$$

b) Aby byla funkce $y = \frac{2x - 5}{x - 1}$ definovaná, musí být $x \neq 1$.

Můžeme tedy psát, že $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Funkce f je lineární lomená funkce, a je i prostá (grafem této funkce je hyperbola).

Pro výpočet inverzní funkce zaměníme v zadání funkce x a y .

$$f^{-1} : x = \frac{2y - 5}{y - 1} \Rightarrow$$

$$x(y - 1) = 2y - 5 \Rightarrow xy - x = 2y - 5 \Rightarrow xy - 2y = x - 5 \Rightarrow y(x - 2) = x - 5$$

$$\underline{\underline{f^{-1} : y = \frac{x - 5}{x - 2}}}$$

Pro definiční obor inverzní funkce platí, že $x \neq 2$.

$$D(f^{-1}) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) = H(f),$$

a pro obor hodnot inverzní funkce platí, že

$$H(f^{-1}) = D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

8.3 Limita a spojitost funkce

Funkce jedné proměnné $f : y = f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže v případě, kdy se hodnota x blíží k číslu a , funkční hodnoty $f(x)$ se blíží k hodnotě (limitě) L .

K vyjádření blízkosti dvou bodů $x, a \in \mathbb{R}$ používáme v matematice pojem okolí bodu.

r-okolím bodu a ($a, r \in \mathbb{R}, r > 0$) označovaným $U(a; r)$ se rozumí otevřený interval

$$U(a; r) = (a - r, a + r)$$

Číslo $r > 0$ se nazývá **poloměr okolí** $U(a; r)$. Místo $U(a; r)$ se někdy píše $U(a)$, pokud hodnota poloměru okolí není v dané situaci podstatná.

Říkáme, že **funkce** f **má v bodě** $a \in \mathbb{R}$ **limitu** $L \in \mathbb{R}$, právě když ke každému libovolně zvolenému ε -okolí $U(L; \varepsilon)$ bodu L existuje δ -okolí $U(a; \delta)$ bodu a takové, že pro všechna $x \neq a$ z $U(a; \delta)$ příslušné hodnoty $f(x)$ jsou ve zvoleném okolí $U(L; \varepsilon)$.

Symbolicky pak píšeme: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Symbolický zápis definice vlastní limity funkce ve vlastním bodě:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) : x \in U(a; \delta), x \neq a \Rightarrow f(x) \in U(L; \varepsilon).$$

Platí, že funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Každá základní elementární funkce f má v každém bodě definičního oboru $D(f)$ limitu rovnou funkční hodnotě v tomto bodě.

Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí.

Mají-li funkce f, g v bodě $a \in \mathbb{R}$ limity, tj. existují-li limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, pak mají v tomto bodě limity i funkce $f + g, f - g, fg, cf$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta, a je-li

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, také funkce $\frac{f}{g}$ a platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Příklad 8.4 Určete limity funkcí:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 7) \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \quad c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x - 1}$$

Řešení:

a) Funkce $f : y = x^2 - 5x + 7$ je polynomičká funkce, která je definována na celém \mathbb{R} , tedy i v bodě $x = 1$. Dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 7) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 7 = \underline{\underline{3}}$$

Podobně postupujeme i v části b) a c).

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x + 1}{\lim_{x \rightarrow -1} x - 1} = \frac{-1 + 1}{-1 - 1} = \underline{\underline{0}}$$

Pro výpočet limit funkce se často použije tato věta:

Jestliže pro dvě funkce f, g platí, že pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a je $f(x) = g(x)$, potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje, právě když existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Příklad 8.5 Určete limity následujících funkcí:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\sin x} \quad c) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2 - \sqrt{x + 9}}{x + 5}$$

Řešení:

a) Funkce $f : y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ není v bodě $x = 1$ definována. Můžeme však v $\mathbb{R} - \{1\}$ provést následující úpravu:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = x + 2 = g(x)$$

Danou limitu pak vypočteme užitím poslední věty:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} + 1 \right)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} + 1 \right) = \frac{1}{1} + 1 = \underline{\underline{2}}$$

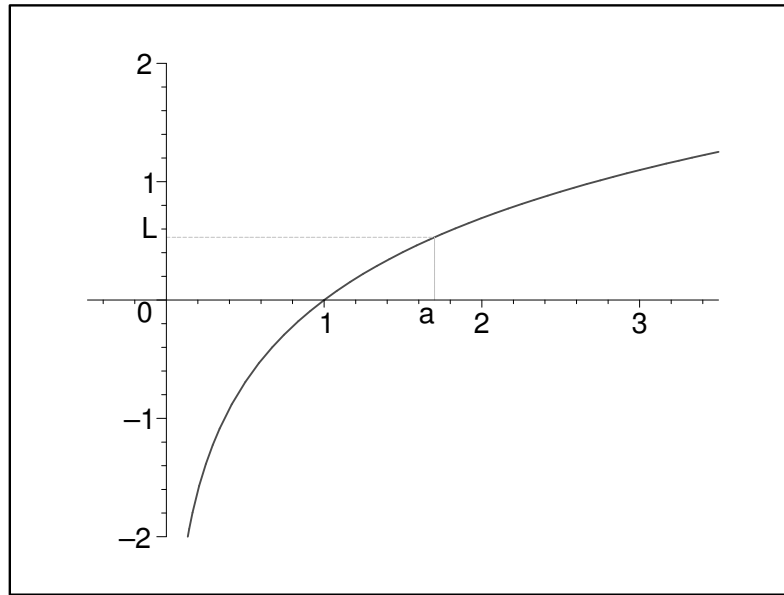
c) *Lomený výraz rozšíříme dvojčlenem $2 + \sqrt{x+9}$.*

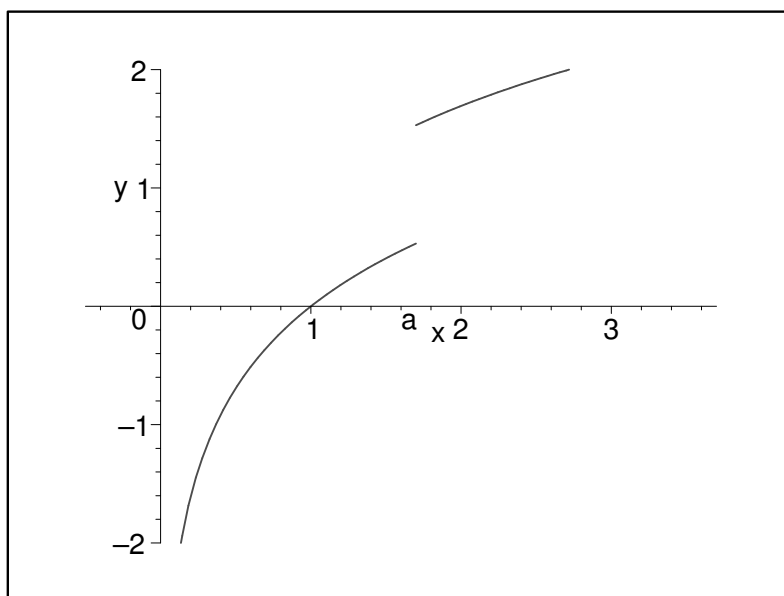
$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2 - \sqrt{x+9}}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2 - \sqrt{x+9}}{x+5} \cdot \frac{2 + \sqrt{x+9}}{2 + \sqrt{x+9}} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{4 - (x+9)}{(x+5)(2 + \sqrt{x+9})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{-(x+5)}{(x+5)(2 + \sqrt{x+9})} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{-1}{2 + \sqrt{x+9}} = \frac{-1}{2 + \sqrt{-5+9}} = \underline{\underline{\frac{-1}{4}}}$$

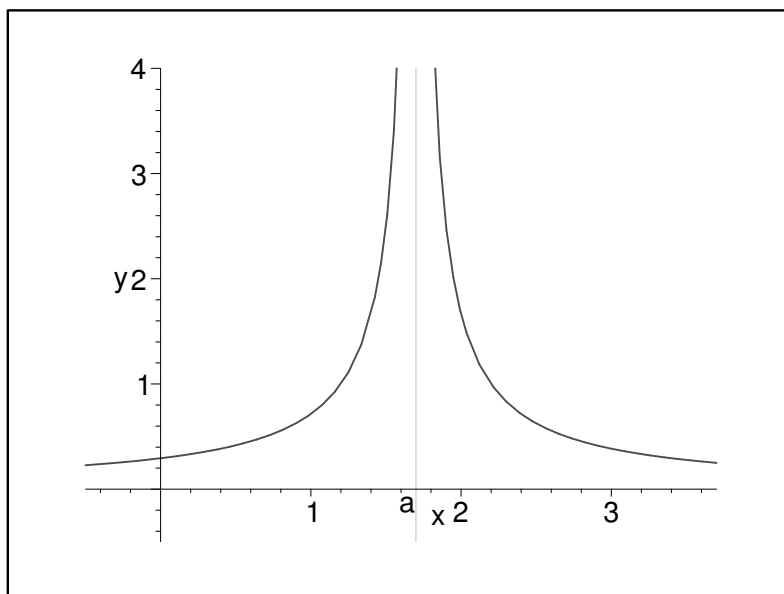
Říkáme, že funkce f , která je definovaná v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, je **spojitá v bodě a** , právě když existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Obrázek 8.4: Spojitá funkce v bodě a



Obrázek 8.5: Funkce není v bodě a spojitá, má v tomto bodě skok



Obrázek 8.6: Funkce má v bodě a nevlastní limity

Příklad 8.6 Zjistěte zda je funkce :

$$a) y = \frac{x^3}{\sin x} \quad b) y = x^2 \sin x \quad c) y = \frac{\sin x}{x-1} \quad d) y = e^x \cos x$$

sudá nebo lichá.

[a) sudá b) lichá c) ani sudá ani lichá d) ani sudá ani lichá]

Příklad 8.7 Určete funkci inverzní k funkcím :

$$a) y = 3x - 4 \quad b) y = 10^x + 5 \quad c) y = \frac{2x + 1}{3x - 6}$$

$$[a) (x + 4)/3 \quad b) \log(x - 5) \quad c) (6x + 1)/(3x - 2)]$$

Příklad 8.8 Najděte příklad (načrtněte graf) funkce, která je :

a) omezená zdola na svém definičním oboru

b) omezená shora na svém definičním oboru

c) omezená shora i zdola na intervalu $(0, 5)$

d) rostoucí na svém definičním oboru

e) klesající na intervalu $(-6, 0)$

f) periodická na svém definičním oboru

g) prostá na svém definičním oboru

h) není prostá na svém definičním oboru

Příklad 8.9 Určete limity funkcí:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 - 6x + 7) \quad b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

$$[a) 6, \quad b) 10, \quad c) 1/8]$$

Příklad 8.10 Vypočtěte limity funkcí:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$$

$$[a) 0, \quad b) 4, \quad c) 3/2]$$

Příklad 8.11 Vypočtěte limity funkcí:

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^3}{x^4 - 2x^3} \quad c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

$$[a) 2, \quad b) -1/2, \quad c) 3/4]$$

9 Derivace funkce

9.1 Geometrický a fyzikální význam derivace

Je-li funkce definována v okolí bodu x_0 a existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$, nazýváme ji **derivací funkce f v bodě x_0** . Značíme ji $f'(x_0)$.

Má-li funkce f derivaci v každém bodě x jisté množiny M , potom funkci

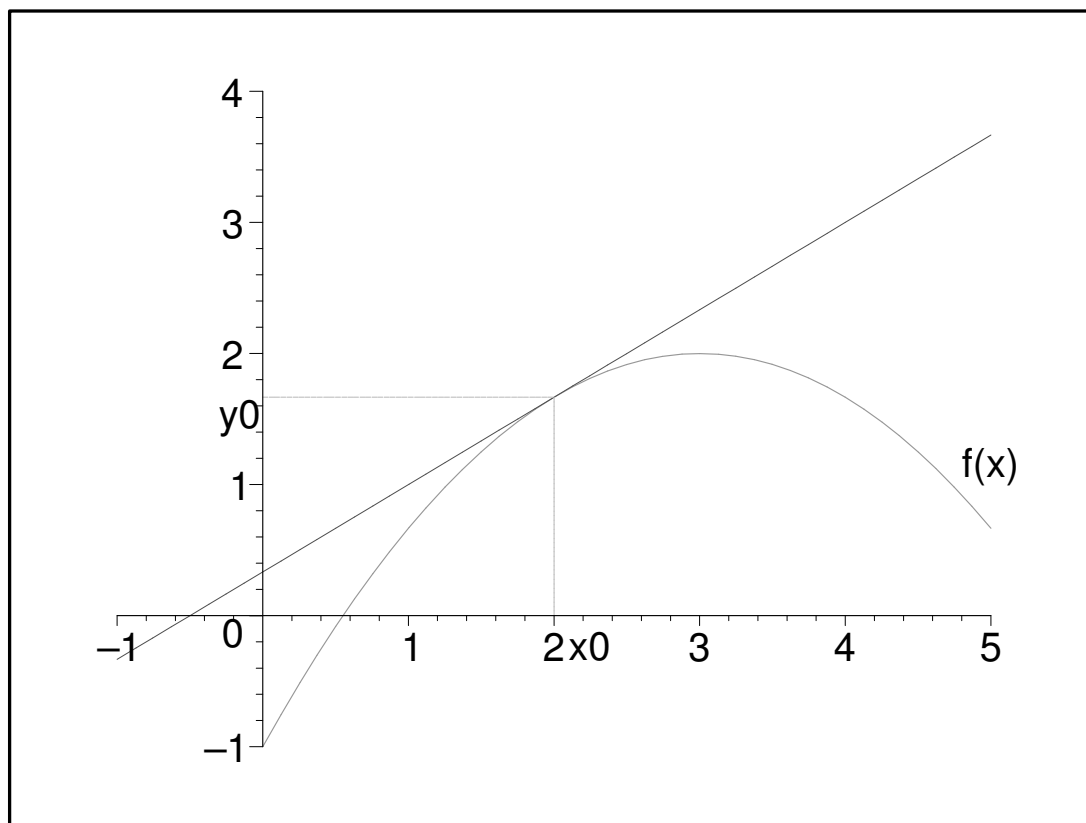
$$f' : y = f'(x), x \in M$$

nazýváme derivací funkce f na množině M .

Geometrický význam derivace

Derivace funkce $f'(x_0)$ představuje geometricky směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce f , pak tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má rovnici

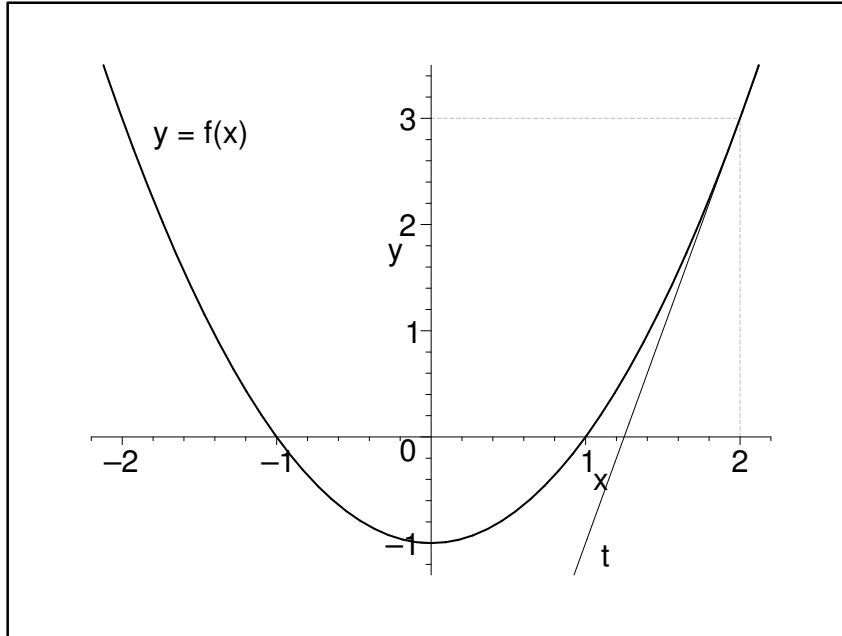
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Obrázek 9.1: Geometrický význam derivace

Příklad 9.1 Určete rovnici tečny ke křivce $y = x^2 - 1$ v bodě $[2, 3]$.

Řešení:



Obrázek 9.2: Tečna ke křivce $y = x^2 - 1$ v bodě $[2, 3]$

Pro směrnici tečny v bodě $[2, 3]$ platí

$$k = y'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1 - 3}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = 4.$$

Po dosazení do rovnice tečny $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ obdržíme

$$y - 3 = 4(x - 2) \quad \text{tj.} \quad \underline{\underline{4x - y - 5 = 0.}}$$

Fyzikální význam derivace

Je-li dána funkční závislost hodnot nějaké fyzikální veličiny na čase, pak její derivace vyjadřuje okamžitou rychlost změny hodnot této veličiny.

Nechť $s = s(t)$ je rovnice dráhy přímočarého pohybu hmotného bodu, přičemž t značí čas měřený od jistého počátečního okamžiku a s značí dráhu, kterou hmotný bod urazil po přímce od zvoleného počátečního bodu.

Derivace dráhy $s(t)$ podle času t pro $t = t_0$ definuje okamžitou rychlost pohybu hmotného bodu v čase t_0 .

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

9.2 Výpočet derivace

Tabulka 9.1: Vzorce pro derivace elementárních funkcí

Funkce f	Vzorec pro derivaci funkce f	Podmínky platnosti vzorce
$y = c, (c \in \mathbb{R})$	$c' = 0$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^n, n \in \mathbf{N}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^r, r \in \mathbf{R},$	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$x \in (0, \infty)$
$y = e^x$	$(e^x)' = e^x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$y = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Příklad 9.2 Zderivujte funkce :

$$a) y = \frac{1}{x^3} \quad b) y = \sqrt{x}$$

Řešení:

$$a) y = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow y' = (-3)x^{-4} = \underline{\underline{-\frac{3}{x^4}}} \quad b) y' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkce

Jestliže funkce $f : u = f(x)$, $g : v = g(x)$ mají derivaci v každém bodě $x \in M$, pak platí následující vzorce pro všechna $x \in M$ (u podílu za předpokladu, že $g(x) \neq 0$):

$$\begin{aligned}(u + v)' &= u' + v' \\ (u - v)' &= u' - v' \\ (uv)' &= u'v + uv' \\ (cu)' &= cu', \quad c \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0\end{aligned}$$

Příklad 9.3 Vypočtěte v přípustných bodech derivace funkcí daných předpisy:

$$a) y = 5x^4 - 6e^x \quad b) y = 6x^2 - \sqrt{x} \quad c) y = (x - 1)(x^2 + 3x - 5) \quad d) y = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Řešení:

$$a) y' = \underline{\underline{20x^3 - 6e^x}}$$

$$b) y' = \underline{\underline{12x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

c) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování součinu.

$$y' = (x^2 + 3x - 5) + (x - 1)(2x + 3) = x^2 + 3x - 5 + 2x^2 + 3x - 2x - 3 = \underline{\underline{3x^2 + 4x - 8}}$$

d) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování podílu.

$$y' = \frac{(x - 1) - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \underline{\underline{\frac{-2}{(x - 1)^2}}}$$

Vzorec pro derivaci složené funkce

Jestliže je dána funkce $F : y = f(g(x))$, přičemž vnitřní funkce g má derivaci v každém bodě $x \in M$ a vnější funkce f má derivaci f' v každém odpovídajícím bodě $u = g(x)$, pak složená funkce $F = f \circ g$ má derivaci F' v každém bodě $x \in M$, pro niž platí:

$$F'(x) = f'(u)g'(x).$$

Příklad 9.4 Vypočtěte derivace funkcí:

$$a) y = \ln(x^2 - 8) \quad b) y = e^x \sin^2 x \quad c) y = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

Řešení:

$$a) y' = \frac{1}{x^2 - 8} \cdot (2x - 0) = \frac{2x}{\underline{\underline{x^2 - 8}}}$$

$$b) y' = e^x \sin^2 x + e^x 2 \sin x \cos x = \underline{\underline{e^x \sin x (\sin x + 2 \cos x)}}$$

$$c) y' = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \underline{\underline{\frac{-2}{x^2 - 1}}}$$

Vzorec pro derivaci inverzní funkce

Jestliže funkce $f^{-1} : y = f^{-1}(x)$, $x \in (a_1, b_1)$, je inverzní funkce k funkci $f : y = f(x)$, $x \in (a_2, b_2)$, která je na intervalu (a_2, b_2) spojitá a ryze monotonní a má na něm nenulovou derivaci f' , pak také inverzní funkce má na intervalu (a_1, b_1) derivaci $(f^{-1})'$, přičemž platí:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Příklad 9.5 Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v jejich průsečících s osou x .

Řešení:

Průsečíky dané křivky s osou x určíme řešením rovnice $x^3 + x^2 - 2x = 0$. Rovnici převedeme na součinný tvar

$$x(x-1)(x+2) = 0$$

a dostaneme kořeny $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Hledáme tedy rovnice tečen dané křivky v bodech $T_1 = [-2, 0]$, $T_2 = [0, 0]$, $T_3 = [1, 0]$.

Pro směrnici tečny v libovolném bodě $[x_0, y(x_0)]$ platí

$$k = y'(x_0).$$

Protože

$$y'(x) = 3x^2 + 2x - 2,$$

dostaneme

$$k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 - 2.$$

Směrnice tečen uvažované křivky v bodech T_1 , T_2 , T_3 jsou

$$k_1 = y'(-2) = 6,$$

$$k_2 = y'(0) = -2,$$

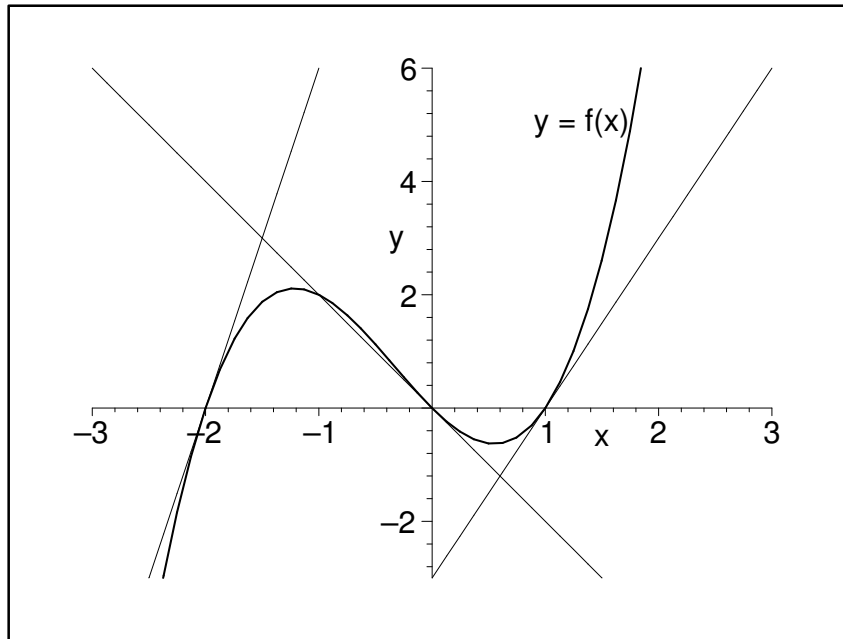
$$k_3 = y'(1) = 3.$$

Po dosazení do rovnice tečny $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ obdržíme

$$\text{pro } T_1 = [-2, 0] \text{ a } k_1 = 6 : y = 6(x + 2) \text{ tj. } \underline{\underline{6x - y + 12 = 0}}$$

$$T_2 = [0, 0], k_2 = -2 : y = -2x \text{ tj. } \underline{\underline{2x + y = 0}}$$

$$T_3 = [1, 0], k_3 = 3 : y = 3(x - 1) \text{ tj. } \underline{\underline{3x - y - 3 = 0}}.$$



Obrázek 9.3: Tečny ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v jejich průsečících s osou x

9.3 L'Hospitalovo pravidlo

K aplikacím diferenciálního počtu patří metoda výpočtu limit pomocí derivací. Vyjadřuje ji **L'Hospitalovo pravidlo**:

Nechť funkce f, g mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ funkční hodnoty $f(x_0) = g(x_0) = 0$ a necht' existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Potom existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo platí i v případě, kdy funkce f a g mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nevlastní limitu, tzn. platí:

Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potom existuje také

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Příklad 9.6 *Užitím l'Hospitalova pravidla vypočtete limity funkcí:*

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 + 6} \quad c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^5 + 1}$$

Řešení:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{(\sin 5x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{5 \cos 5x} = \frac{2 \cos 0}{5 \cos 0} = \frac{2}{5}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2 + 6)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 0 = \underline{0}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^5 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 1)'}{(x^5 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{5x^4} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

Příklad 9.7 *Vypočtete derivace funkcí:*

$$a) y = \pi x^3 - 7x \quad b) y = e^x(x^2 - 1) \quad c) y = \frac{x + 5}{x^2} \quad d) y = \frac{x - 2}{x + 2}$$

$$[a) 3\pi x^2 - 7, b) e^x(x^2 + 2x - 1), c) (-x - 10)/x^3, d) 4/(x + 2)^2]$$

Příklad 9.8 *Určete derivaci funkcí:*

$$a) y = \sqrt{\sin x} \quad b) y = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \quad c) y = e^{\sin x} \quad d) y = \cos e^x$$

$$[a) \cos x / 2\sqrt{\sin x}, b) \sin^2 x, c) e^{\sin x} \cos x, d) -e^x \sin e^x]$$

Příklad 9.9 *Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f: y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ v bodě $T = [1, ?]$.*

$$[2x - 9y + 1 = 0]$$

Příklad 9.10 *Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 6x$ v jejich průsečících s osou x .*

$$[15x - y + 45 = 0, 6x + y = 0, 10x - y - 20 = 0]$$

Příklad 9.11 *Užitím l'Hospitalova pravidla vypočtete limity funkcí:*

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{3x} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 7x^2}{x^2 + 6} \quad c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 5} - 2}$$

$$[a) 8/3, b) -7, c) 4]$$

10 Goniometrické funkce

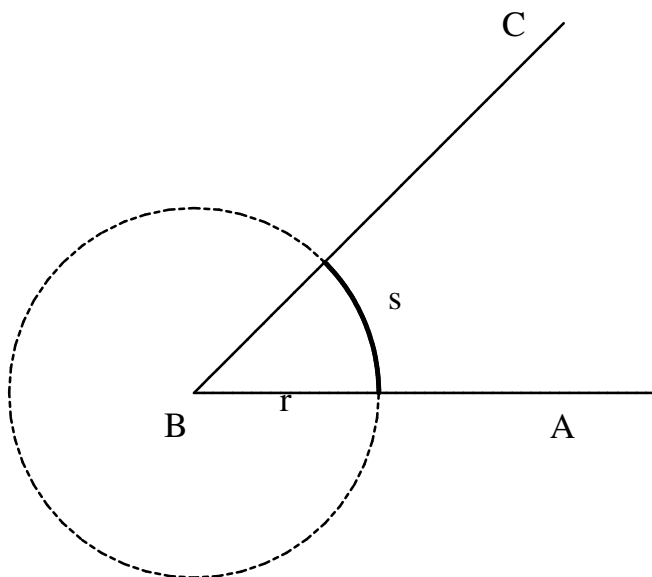
10.1 Oblouková míra

V matematice, ve fyzice a v technické praxi se používá na určování velikosti úhlu tzv. **oblouková míra**.

Je dán úhel ABC . Sestrojíme kružnici se středem v bodě B , (ve vrcholu úhlu). Jestliže r je poloměr kružnice a s je délka oblouku kružnice uvnitř úhlu ABC , potom velikost tohoto úhlu je $\frac{s}{r}$ radiánů.

$$\angle ABC = \frac{s}{r} \text{ rad.}$$

Toto číslo nezávisí na poloměru kružnice.



Příklad 10.1 Vyjádřete úhel 15° v obloukové míře.

Řešení:

Kružnice má délku $2\pi r$ a velikost úhlu 360° v radiánech je $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

Z toho $1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ radiánů.

Tedy $15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}$.

Dále budeme pracovat s orientovanými úhly. **Orientovaný úhel** si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky (nejlépe kladné poloosy O_x) otáčející se kolem svého počátku a to v jednom ze dvou navzájem opačných smyslů. Buď proti pohybu hodinových ručiček, tak dostaneme kladné úhly (např. $\frac{\pi}{2}$, 6π , atd), nebo ve směru hodinových ručiček a tak dostaneme záporné úhly (např. $-\frac{\pi}{12}$, -4π , atd).

10.2 Goniometrické funkce

V kartézské souřadnicové soustavě sestrojme kružnici o středu v počátku a poloměru 1. Uvažujme orientovaný úhel o velikosti ψ radiánů jehož vrchol je v počátku a počáteční rameno kladná poloosa x . Druhé rameno protne kružnici v bodě P . Potom definujeme **kosinus** úhlu ψ jako x -ovou souřadnici bodu P . Označujeme $\cos \psi$.

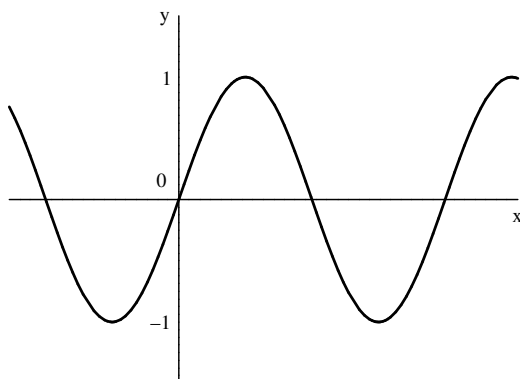
Podobně y -ová souřadnice bodu P se nazývá **sinus** úhlu ψ . Označujeme $\sin \psi$.

Obě funkce jsou periodické, jejich nejmenší perioda je 2π .

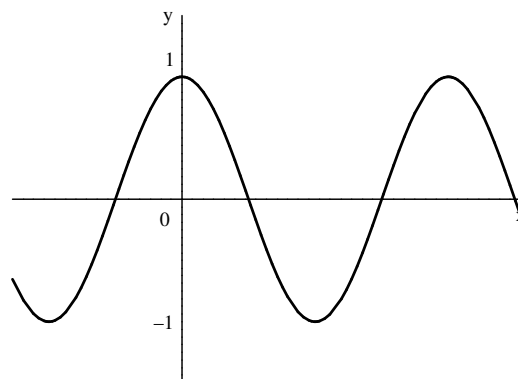
Definičním oborem obou funkcí je \mathbb{R} , oborem hodnot je $\langle -1; 1 \rangle$.

Grafem je sinusoida (kosinusoida).

Snadno se dá ukázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$.



$y = \sin x$



$y = \cos x$

Funkce $f : y = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ je lichá: $\sin(-x) = -\sin x$.

Funkce $f : y = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ je sudá: $\cos(-x) = \cos x$.

Tangens je funkce, která každému reálnému číslu x , pro něž je $\cos x \neq 0$, přiřadí číslo

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Definičním oborem této funkce je $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, \text{ kde } k \text{ je celé číslo} \}$.

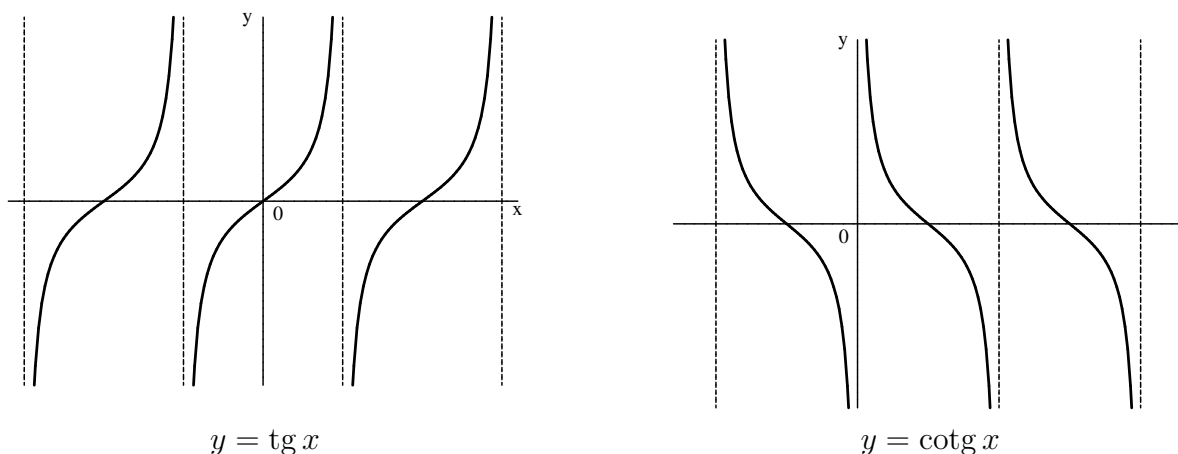
Oborem hodnot je $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.

Kotangens je funkce, která každému reálnému číslu x , pro něž je $\sin x \neq 0$, přiřadí číslo

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Definičním oborem této funkce je $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, \text{ kde } k \text{ je celé číslo} \}$.

Oborem hodnot je $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.



Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou periodické funkce s periodou π .

Obě funkce jsou liché: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$ pro všechna x z definičního oboru.

V následující tabulce jsou vypočteny hodnoty goniometrických funkcí pro některá $x \in (0; 2\pi)$, které je vhodné si pamatovat.

Tabulka 10.1: Hodnoty goniometrických funkcí pro některé důležité úhly

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0	
$\operatorname{cotg} x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0

Dále uvedeme některé důležité vzorce, které budou užitečné při řešení úloh souvisejících s goniometrickými funkcemi.

Pro každé $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí:

$$\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x)$$

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x); \quad \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x)$$

Příklad 10.2 Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí v daných bodech :

$$a) \alpha = \frac{5}{3}\pi \quad b) \alpha = -\frac{2}{3}\pi \quad c) \alpha = \frac{25}{4}\pi$$

Řešení:

$$a) \alpha = \frac{5}{3}\pi = 2\pi - \frac{1}{3}\pi$$

$$\sin(2\pi - \frac{1}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$\cos(2\pi - \frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \underline{\underline{-\sqrt{3}}} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

$$b) \alpha = -\frac{2}{3}\pi$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$ jsou periodické s periodou 2π . Platí:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin \frac{4}{3}\pi = \sin(\pi + \frac{1}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \frac{4}{3}\pi = \cos(\pi + \frac{1}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \underline{\underline{\sqrt{3}}} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

$$c) \alpha = \frac{25}{4}\pi$$

$$\sin(\frac{25}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi + 6\pi) = \sin \frac{1}{4}\pi = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\cos(\frac{25}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi + 6\pi) = \cos \frac{1}{4}\pi = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha = \underline{\underline{1}}$$

Důležité vztahy a vzorce

Pro každé reálné x platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Pro každé reálné x a celé k , $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ platí:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

Funkce dvojnásobného a polovičního argumentu

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}};$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Součtové vzorce

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq \frac{2k+1}{2}\pi : \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Příklad 10.3 Vypočítejte $\cos \frac{5}{12}\pi$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \cos \frac{5}{12}\pi &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Příklad 10.4 Vypočtěte hodnoty funkcí $\cos \alpha$, $\sin(2\alpha)$, $\operatorname{tg}(2\alpha)$, $\sin \frac{\alpha}{2}$, jestliže

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Řešení:

$$|\cos \alpha| = \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{25} = \underline{\underline{\frac{24}{25}}}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \quad \Rightarrow \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \underline{\underline{\frac{24}{7}}}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{10}}}}$$

10.3 Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice jsou rovnice, které obsahují neznámou jako argument jedné nebo několika goniometrických funkcí.

Příklad 10.5 Vyřešte v \mathbb{R} goniometrické rovnice:

$$a) 2 \sin(3x) = \sqrt{2} \quad b) \sin^2 x - \cos^2 x = 0,5 \quad c) 2 \sin^2 x - 5 \cos x + 1 = 0$$

Řešení:

$$a) \text{ Upravíme: } \sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Funkce sinus má kladné hodnoty v I. a II. kvadrantu.

$$\text{Tedy } 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Odtud}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Upravíme levou stranu rovnice:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos(2x).$$

Potom rovnice má tvar $-\cos(2x) = 0,5$, tzn. $\cos(2x) = -0,5$.

Funkce kosinus má záporné hodnoty v II. a III. kvadrantu.

$$\text{Potom } 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Odtud}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}\pi + k\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{2}{3}\pi + k\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Upravíme levou stranu rovnice:

$$2 \sin^2 x - 5 \cos x + 1 = 2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x + 1 = -2 \cos^2 x - 5 \cos x + 3$$

Potom rovnice má tvar $-2 \cos^2 x - 5 \cos x + 3 = 0$ t.j. $2 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 = 0$.

Položíme $y = \cos x$ a dostaneme kvadratickou rovnici $2y^2 + 5y - 3 = 0$.

Tato rovnice má kořeny $y_1 = -3$ a $y_2 = \frac{1}{2}$.

Protože $|-3| > 1$, řešíme jen rovnici $\cos x = \frac{1}{2}$.

Funkce kosinus má kladné hodnoty v I. a IV. kvadrantu. Dostaneme

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 10.6 Vypočítejte následující úhly v obloukové míře:

a) $\alpha = 135^\circ$ b) $\alpha = -75^\circ$ c) $\alpha = 200^\circ$

[a) $\frac{3}{4}\pi$; b) $-\frac{5}{12}\pi$; c) $\frac{10}{9}\pi$]

Příklad 10.7 Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ v daných bodech :

a) $\alpha = -\frac{7}{3}\pi$ b) $\alpha = \frac{21}{4}\pi$ c) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$ d) $\alpha = -\frac{11}{4}\pi$

[a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1$; c) $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}$;
d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1$]

Příklad 10.8 Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ jestliže platí, že $\operatorname{cotg} x = -3$ a $x \in \langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi \rangle$.

[$\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{1}{3}$]

Příklad 10.9 Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla α , β platí vzorce:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

[postupným sečtením a odečtením součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus]

Příklad 10.10 Vyřešte v \mathbb{R} goniometrické rovnice:

a) $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

c) $\frac{\sin x}{\sqrt{2} + \cos x} = 1$ d) $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

e) $2 \sin x = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$ f) $\sin x + \cos 2x = 1$

g) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ h) $1 + \sin x = 2 \cos^2 x$

[a) $\frac{13}{12}\pi + 2k\pi \vee \frac{17}{12}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; b) $2k\pi \vee \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \vee \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

e) $k\pi \vee \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; f) $k\pi \vee \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

g) $\frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; h) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$]

Příklad 10.11 Řešte v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ rovnici $\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 2 + \sqrt{3}$.

$[\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi]$

Příklad 10.12 Řešte v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ rovnici $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{2}$.

$[\frac{\pi}{4}]$

Příklad 10.13 Upravte následující výrazy pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro které jsou definovány:

$$\begin{array}{ll} a) \frac{2 \sin x + \sin 2x}{\cos^2 \frac{x}{2}} & b) \frac{\sin^3 x - \sin x}{\cos^3 x - \cos x} \\ c) \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{cotg}^2 x} & d) \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x} \end{array}$$

$[a) 4 \sin x; b) \operatorname{cotg} x; c) \operatorname{tg}^6 x; d) 1]$

Příklad 10.14 Načrtněte grafy funkcí:

$$a) y = -\sin(3x) \quad b) y = 1 + \cos \frac{x}{2} \quad c) y = 2 + \operatorname{cotg} x \quad d) y = 5 + 2 \sin(x + \pi)$$

11 Integrál funkce jedné proměnné

11.1 Primitivní funkce

Při řešení mnoha matematických, fyzikálních a technických problémů se setkáváme i s úlohou:

K dané funkci f najít na daném intervalu takovou funkci, jejíž derivace v tomto intervalu se rovná f . Taková funkce $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá primitivní funkce k reálné funkci f na intervalu (a, b) , jestliže platí pro všechna $x \in (a, b)$, že

$$F'(x) = f(x).$$

Primitivní funkce není určena jednoznačně. Přičteme-li k dané primitivní funkci konstantu, dostaneme zase primitivní funkci. Primitivní funkci také říkáme neurčitý integrál a píšeme

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Příklad 11.1 Spočítejte $\int 3x^2 dx$.

Řešení:

$(x^3)' = 3x^2$. Z toho plyne, že $\int 3x^2 dx = \underline{\underline{x^3 + c}}$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Při výpočtu neurčitého integrálu se často užívají následující vlastnosti a vzorce:

Nechť pro funkce f, g existují neurčité integrály na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a necht' $k \in \mathbb{R}$, potom

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

a

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Příklad 11.2 Vypočtete integrály:

$$a) \int \frac{6dx}{x} \quad b) \int (7 \cos x - e^x) dx$$

Řešení:

Víme, že platí $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$; $(\sin x)' = \cos x$ a $(e^x)' = e^x$.

Z toho plyne, že :

$$a) \int \frac{6dx}{x} = 6 \int \frac{dx}{x} = \underline{\underline{6 \ln x + c, x > 0}}$$

$$b) \int (7 \cos x - e^x) dx = 7 \int \cos x dx - \int e^x dx = \underline{\underline{7 \sin x - e^x + c}}$$

Tabulka 11.1: Vzorce pro integraci elementárních funkcí

Funkce f	Vzorec pro neurčitý integrál	Podmínky platnosti vzorce
$y = 0$	$\int 0 \, dx = c \quad (c \in \mathbb{R})$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = 1$	$\int 1 \, dx = x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^n, \quad n \in \mathbf{N}$	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^r, \quad r \in \mathbf{R}, \quad r \neq -1$	$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$x \in (0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = a^x$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \, dx = \operatorname{tg} x + c$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$
$y = \frac{1}{(\sin x)^2}$	$\int \frac{1}{(\sin x)^2} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

Příklad 11.3 Vypočtete integrály:

$$a) \int (2x + 1) \, dx \quad b) \int (5x^4 - \sin x) \, dx \quad c) \int \sqrt{x^3} \, dx \quad d) \int 3(e^x + 2\sqrt{x}) \, dx$$

Řešení:

$$a) \int (2x + 1) \, dx = 2 \int x \, dx + \int 1 \, dx = 2 \frac{x^2}{2} + x + c = \underline{\underline{x^2 + x + c}}$$

$$b) \int 5x^4 - \sin x \, dx = 5 \int x^4 \, dx - \int \sin x \, dx = 5 \frac{x^5}{5} - (-\cos x) + c = \underline{\underline{x^5 + \cos x + c}}$$

$$c) \int \sqrt{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c = \underline{\underline{\frac{2}{5} \sqrt{(x^5)} + c}}$$

$$d) \int 3(e^x + 2\sqrt{x}) dx = \int (3e^x + 6\sqrt{x}) dx = 3 \int e^x dx + 6 \int \sqrt{x} dx = \\ 3e^x + 6 \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{3}{2}} + c = 3e^x + 6 \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c = \underline{\underline{3e^x + 4\sqrt{x^3} + c}}$$

Příklad 11.4 Vypočtete integrály:

$$a) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad b) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad c) \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$$

Řešení:

a) Funkci, kterou chceme integrovat, nejdříve upravíme. Využijeme vztah

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Potom můžeme psát

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \underline{\underline{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c}}$$

$$b) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

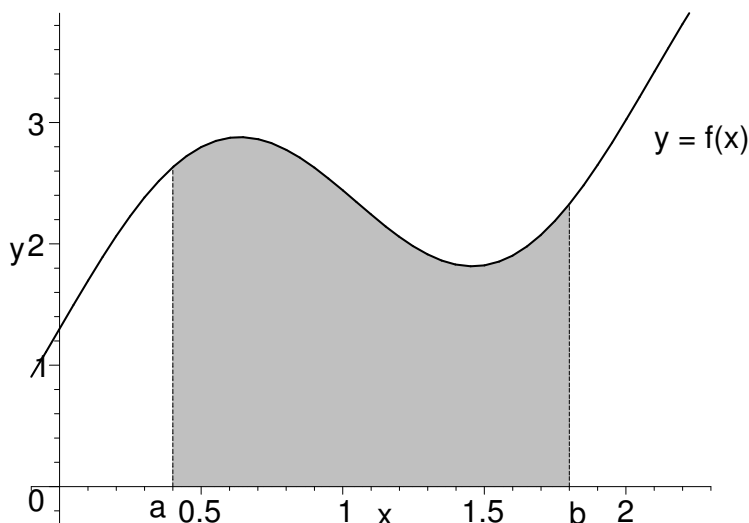
$$\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c = \underline{\underline{\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c}}$$

$$c) \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2 \sin x \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{2 \sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + c}}$$

11.2 Určitý integrál

Geometrický význam určitého integrálu

Mějme nezápornou spojitou funkci f na $\langle a, b \rangle$. Obsah obrazce ohraničeného grafem



Obrázek 11.1: Určitý integrál z nezáporné funkce $y = f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

funkce f , osou x a rovnoběžkami s osou y vedenými body a, b můžeme spočítat pomocí určitého integrálu:

$$P = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

kde funkce F je primitivní funkcí k f na $\langle a, b \rangle$.

Podle stejného vzorce můžeme spočítat určitý integrál z libovolné spojitě funkce (ne nutně nezáporné) na $\langle a, b \rangle$.

Tento vztah se nazývá **Newton-Leibnizův vzorec**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{kde } F'(x) = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

Příklad 11.5 *Užitím Newton - Leibnizova vzorce vypočtete:*

$$a) \int_0^1 (2x - x^2) dx \quad b) \int_0^\pi \sin x dx \quad c) \int_0^{2\pi} \sin x dx \quad d) \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx$$

Řešení:

a) *Nejdřív spočítáme primitivní funkci k funkci $f(x) = (2x - x^2)$.*

Dostaneme $F(x) = \int (2x - x^2) dx = x^2 - \frac{x^3}{3} + c$.

Potom podle Newton - Leibnitzova vzorce

$$\int_0^1 (2x - x^2) dx = [x^2 - \frac{x^3}{3} + c]_0^1 = (1 - \frac{1}{3} + c) - (0 - 0 + c) = (\frac{2}{3} + c) - c = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Vidíme, že integrační konstantu c při výpočtu určitého integrálu v bodě b přičteme a v bodě a zase odečteme, proto ji dále nebudem psát.

$$b) \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$c) \int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$d) \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = \underline{\underline{-1}}$$

Vlastnosti určitého integrálu.

Věta o lineárnosti určitého integrálu.

Nechť f, g jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, a c a d jsou libovolné reálné konstanty. Pak platí:

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx.$$

Věta o aditivnosti určitého integrálu.

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $c \in (a, b)$, pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Věta o střední hodnotě.

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že platí

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Číslo $f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$ se nazývá **střední hodnota** funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Příklad 11.6 Vypočtete integrál $\int_{-1}^3 |x - 1| dx$.

Řešení:

Platí, že

$$f(x) = |x - 1| = x - 1 \text{ pro } x \in \langle 1, \infty),$$

$$f(x) = |x - 1| = -(x - 1) = 1 - x \text{ pro } x \in (-\infty, 1).$$

Proto použijeme větu o aditivnosti určitého integrálu.

$$\int_{-1}^3 |x - 1| dx = \int_{-1}^1 |x - 1| dx + \int_1^3 |x - 1| dx = \int_{-1}^1 (1 - x) dx + \int_1^3 (x - 1) dx =$$

$$\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^3 = (1 - \frac{1}{2}) - (-1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}9 - 3) - (\frac{1}{2} - 1) = 2 + \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$$

Příklad 11.7 Spočítejte střední hodnotu funkce $f(x) = e^x$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

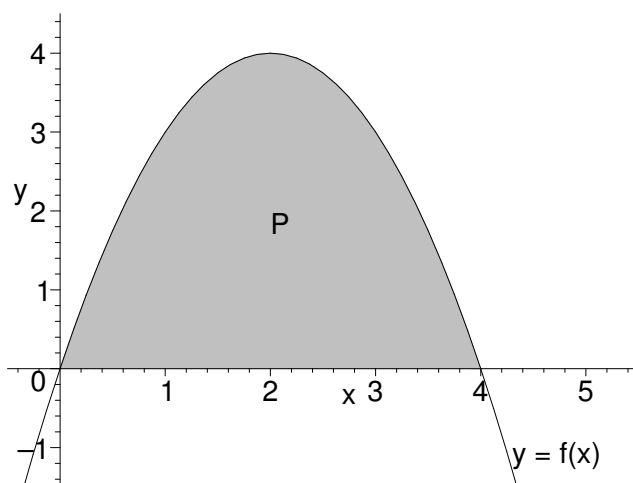
Řešení:

$$S = \frac{1}{1 - 0} \int_0^1 e^x dx = 1[e^x]_0^1 = \underline{\underline{e - 1}}$$

Příklad 11.8 Vypočítejte obsah rovinné oblasti ohraničené parabolou $y = 4x - x^2$ a osou x .

Řešení:

Parabola protne osu x v bodech $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ a na intervalu $(0, 4)$ je funkce $y = 4x - x^2$



Obrázek 11.2: Obsah oblasti ohraničené parabolou $y = 4x - x^2$ a osou x

kladná. Obsah oblasti mezi parabolou a osou x můžeme spočítat jako určitý integrál.

$$P = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 64 = \frac{96 - 64}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

Nechť pro spojité funkce f a g na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí, že $g(x) < f(x)$ na (a, b) . Potom obsah elementární oblasti:

$$a \leq x \leq b$$

$$g(x) \leq y \leq f(x)$$

můžeme počítat jako určitý integrál

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

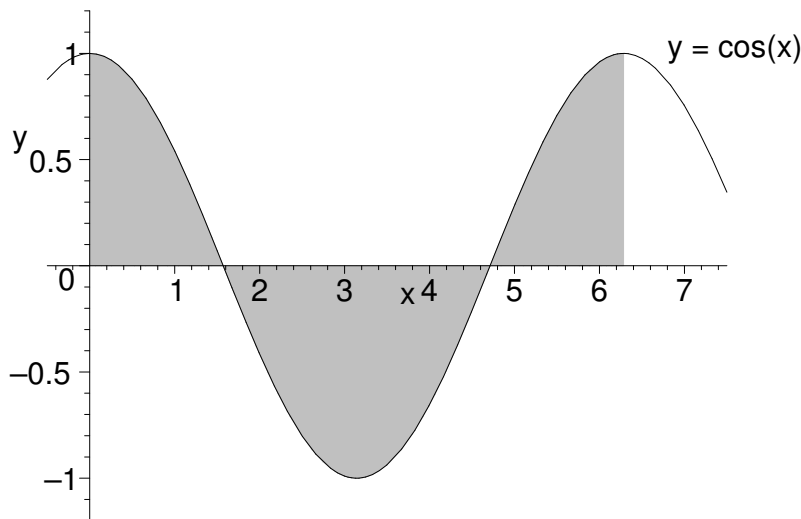
Příklad 11.9 Vypočítejte:

a) $\int_0^{2\pi} \cos x dx$

b) Obsah oblasti ohraničené funkcí $y = \cos x$, přímkami $x = 0$, $x = 2\pi$ a osou x .

Řešení:

a) $\int_0^{2\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin 0 = \underline{0}$



Obrázek 11.3: $y = \cos(x)$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$

b) Počítáme obsah vyšrafované oblasti z obrázku. Vidíme, že $P = P_1 + P_2 + P_3$, kde

$$P_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$P_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos x dx = [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

$$P_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} = \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} = 1$$

Dostaneme $P = 1 + 2 + 1 = \underline{4}$

Příklad 11.10 Vypočtěte integrály:

$$a) \int 3x^2 + 2x - 4 \, dx \quad b) \int \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \quad c) \int x(x-2)(x-3) \, dx$$

$$[a) x^3 + x^2 - 4x + c \quad b) 2\sqrt{x^5}/5 - 2\sqrt{x} + c \quad c) x^4/4 - 5x^3/3 + 3x^2 + c]$$

Příklad 11.11 Funkce nejdříve upravte a potom vypočtěte následující integrály:

$$a) \int 5 \cos x - 6e^x 2^x \, dx \quad b) \int \operatorname{tg}^2 x \, dx \quad c) \int 1 + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$$

$$[a) 5 \sin x - 6(e^x 2^x) / \ln(2e) + c \quad b) \operatorname{tg} x - x + c \quad c) x + \sin x + c]$$

Příklad 11.12 Užitím Newton - Leibnitzova vzorce vypočtěte určité integrály:

$$a) \int_1^4 (3x - 11) \, dx \quad b) \int_{-4}^{-2} \frac{1}{x} \, dx \quad c) \int_0^3 |1 - 3x| \, dx \quad d) \int_{-1}^1 e^x \, dx$$

$$[a) -21/2 \quad b) -\ln 2 \quad c) 65/6 \quad d) e - 1/e]$$

Příklad 11.13 Vypočítejte obsah rovinné oblasti ohraničené parabolou $y = 6x - x^2$ a osou x .

[36]

Příklad 11.14 Najděte střední hodnotu funkce na daném intervalu.

$$a) f(x) = x(1-x) \text{ na } \langle 0, 1 \rangle$$

$$b) f(x) = 2x - 1 \text{ na } \langle -3, 2 \rangle$$

$$c) f(x) = \sin x \text{ na } \langle 0, \pi \rangle$$

$$[a) 1/6 \quad b) -2 \quad c) 2/\pi]$$

12 Komplexní čísla

12.1 Algebraický tvar komplexního čísla

Komplexní číslo je číslo $z = a + ib$, kde a, b jsou reálná čísla a $i^2 = -1$. Výraz je jednoznačně určen uspořádanou dvojicí $[a; b]$, kde a, b jsou reálná čísla.

Pro komplexní čísla se dají operace sčítání a násobení definovat takto:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

kde $a + ib$ a $c + id$ jsou libovolná komplexní čísla.

Sčítání a násobení komplexních čísel jsou operace asociativní a komutativní. Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

Příklad 12.1 Vypočítejte součin $(2 + i)(3 + i)$.

Řešení:

$$(2 + i)(3 + i) = 6 + 3i + 2i - 1 = (6 - 1) + i(3 + 2) = \underline{\underline{5 + 5i}}$$

Zápis $z = a + ib$ nazýváme **algebraickým tvarem** komplexního čísla.

Reálné číslo a nazýváme **reálnou částí** z .

Reálné číslo b nazýváme **imaginární částí** z :

$$z = a + ib, \quad a = \mathbf{Re} z, \quad b = \mathbf{Im} z.$$

Číslo $\bar{z} = a - ib$ nazýváme **komplexně sdruženým** číslem k číslu $z = a + ib$.

Při dělení komplexních čísel využíváme komplexně sdružené číslo jmenovatele:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \quad a + ib, c + id \in \mathbb{C}, \quad c, d \neq 0$$

Příklad 12.2 Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo $\frac{2 + i}{1 - i}$.

Řešení:

$$\frac{2 + i}{1 - i} = \frac{2 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{2 + 2i + i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2 - 1 + 3i}{1 - (-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}}$$

Komplexní čísla zjednodušíme podle pravidel:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \dots,$$

to znamená, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Příklad 12.3 Vypočítejte $i + i^3 + i^5 + i^7 + i^9$.

Řešení:

$$i + i^3 + i^5 + i^7 + i^9 = i + i^2i + i^4i + i^4i^3 + (i^4)^2i = i - i + i - i + i = \underline{i}$$

Absolutní hodnotou komplexního čísla $a + ib$ nazýváme nezáporné číslo $\sqrt{a^2 + b^2}$,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Komplexní číslo z , pro které je $|z| = 1$ nazýváme **komplexní jednotkou**.

Komplexní rovina (Gaussova rovina komplexních čísel) je rovina s kartézským systémem souřadnic, ve které je každé komplexní číslo $a + ib$ znázorněno bodem $[a; b]$.

Absolutní hodnota čísla $z = a + ib$ se potom rovná vzdálenosti bodu $[a; b]$ od počátku.

Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel se rovná jejich vzdálenosti v komplexní rovině.

12.2 Goniometrický tvar komplexního čísla

Úhel φ - orientovaný úhel mezi kladnou částí osy x a polopřímkou spojující bod $[0; 0]$ s bodem $[a; b]$ se nazývá **argumentem** komplexního čísla $z = a + ib$. Platí, že

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Odtud dostaneme, že

$$a = |z| \cos \varphi \quad b = |z| \sin \varphi.$$

Zápis nenulového komplexního čísla z ve tvaru

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

nazýváme **goniometrickým tvarem** komplexního čísla z .

Omezíme-li se na $-\pi < \varphi \leq \pi$ (ev. $0 \leq \varphi < 2\pi$), je toto číslo určeno jednoznačně.

Příklad 12.4 Zapište v goniometrickém tvaru číslo $z = 2 + 2i$.

Řešení:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Takže $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ a $\varphi \in (-\pi; \pi)$, potom $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Tedy :

$$2 + 2i = \underline{\underline{\sqrt{8}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)}}$$

12.3 Moivreova věta

Vyjádření komplexních čísel v goniometrickém tvaru podstatně zjednodušuje výpočty spojené s násobením a dělením komplexních čísel. Pro každá dvě nenulová komplexní čísla $u = |u|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a $v = |v|(\cos \beta + i \sin \beta)$ platí:

$$uv = |u| \cdot |v|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

a

$$\frac{u}{v} = \frac{|u|}{|v|}(\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)).$$

Pro umocňování platí **Moivreova věta**:

$$z^n = (|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n \in \mathbb{N}$$

Příklad 12.5 Vypočtěte uv , u/v a u^3 , jestliže

$$u = 2(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi) \quad v = 6(\cos(-\frac{1}{2}\pi) + i \sin(-\frac{1}{2}\pi)).$$

Řešení:

Absolutní hodnota součinu je $2 \cdot 6 = 12$ a argument $\frac{1}{3}\pi + (-\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{6}\pi$.

Proto

$$uv = 12(\cos(-\frac{1}{6}\pi) + i \sin(-\frac{1}{6}\pi)) = 12(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \underline{\underline{6\sqrt{3} - 6i}}$$

Absolutní hodnota podílu je $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ a argument $\frac{1}{3}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) = \frac{5}{6}\pi$. Tedy

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{3}(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}i}}$$

Podobně dostaneme podle Moivreovy věty:

$$u^3 = 8(\cos \pi + i \sin \pi) = 8(-1) = \underline{\underline{-8}}$$

12.4 Řešení binomických rovnic v \mathbb{C}

Binomickou rovnicí se nazývá rovnice tvaru $z^n - a = 0$, kde $a \neq 0$ je dané komplexní číslo, z je neznámá a $n > 1$ je číslo přirozené. Tato rovnice má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů. Řešit binomickou rovnicí v \mathbb{C} znamená využitím Moivreovy věty najít všech n komplexních řešení této rovnice. Zapišeme číslo a v goniometrickém tvaru:

$$a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Potom podle důsledku Moivreovy věty dostaneme řešení ve tvaru:

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}}(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}), k = 0, 1, \dots, n-1$$

Příklad 12.6 V \mathbb{C} řešte rovnici $z^3 + 27 = 0$.

Řešení:

Upravíme na $z^3 = -27$. Napišme $a = -27$ v goniometrickém tvaru:

$$-27 = 27(\cos \pi + i \sin \pi) = 27(\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi))$$

Z Moivreovy věty dostaneme řešení

$$z = \sqrt[3]{27} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$\Rightarrow z_1 = 3 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}}}$$

$$z_2 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = \underline{\underline{-3}}$$

$$z_3 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}}}$$

Příklad 12.7 Vypočítejte:

a) $(2 - 3i)(4 + i)$ b) $(1 + i)i$ c) $(-1 + i)^{-2}$

d) $(-i)^{27}$ e) i^{2000} f) $5 - 8i + 6i^2 - 3i^3 + 6i^4$

[a) $11 - 10i$; b) $-1 + i$; c) $i/2$; d) i ; e) 1 ; f) $5 - 5i$]

Příklad 12.8 Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní čísla:

a) $(i^{10} - i^{12} - 4i^{15}) : (i^5 - i^3)$ b) $\frac{2+i}{3-i} + (i-2)(4-i)$

c) $\left(\frac{i-1}{i} + \frac{2i}{i-1} \right) (2i-3) - (i-1)i$

[a) $2 + i$; b) $-13/2 + 13i/2$; c) $-5 + 5i$]

Příklad 12.9 Přesvědčte se, že $\frac{1}{1-i} - i - \frac{1}{1+i} + i = 2i$.

[Platí]

Příklad 12.10 Najděte dvojici komplexních čísel tak, aby jejich součet byl 4 a součin 13.

[$2 + 3i, 2 - 3i$]

Příklad 12.11 Určete reálná čísla x, y pro která platí:

$$a) \frac{3 - 2i}{1 - i} = 2x + yi$$

$$b) (x + y)(5 - 4i) + (x - y)(4 - 5i) = 94 - 68i$$

$$c) \frac{x + 1 + (y + 3)i}{5 + 3i} = 1 + i$$

$$[a) x = 5/4, y = 1/2; b) x = 9, y = 13; c) x = 1, y = 5]$$

Příklad 12.12 K číslu z napište číslo komplexně združené \bar{z} a vypočítejte $|z|$:

$$a) z = 4 - 3i \quad b) z = \frac{1 + 2i}{3}$$

$$[a) 4 + 3i, |z| = 5; b) \frac{1-2i}{3}, |z| = \sqrt{5}/3]$$

Příklad 12.13 Určete komplexní čísla z , pro něž platí $z = \bar{z}$.

$$[z \in \mathbb{R}]$$

Příklad 12.14 V komplexní rovině zobrazte množinu všech komplexních čísel, pro něž platí:

$$a) |1 + z| < 2 \quad b) |1 - i| \geq |z| > \frac{1}{2} \quad c) \operatorname{Im} z < 4$$

Příklad 12.15 Pomocí vztahu $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vypočítejte absolutní hodnotu komplexního čísla

$$\frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{xy\sqrt{2} + i\sqrt{x^4 + y^4}}, \quad x, y \neq 0.$$

$$[1]$$

Příklad 12.16 Vyjádřete následující komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

$$a) 1 - i \quad b) -2 \quad c) 5i \quad d) \frac{i - 3}{2 + i} \quad e) \frac{2 - i}{3i - 1}$$

$$[a) \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)); b) 2(\cos \pi + i \sin \pi); \\ c) 5(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)); d) \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4)); \\ e) (\sqrt{2}/2)(\cos(-3\pi/4) + i \sin(-3\pi/4))]$$

Příklad 12.17 Napište algebraický tvar komplexního čísla $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.

$$[\sqrt{3}/2 + i/2]$$

Příklad 12.18 Vypočítejte algebraický tvar součinu a podílu komplexních čísel:

$$a) z_1 = 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \quad z_2 = \frac{1}{3}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

$$b) z_1 = \sqrt{3} + i \quad z_2 = 6\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$[a) z_1 z_2 = -1 + \sqrt{3}i; z_1/z_2 = 9 + 9\sqrt{3}i; b) z_1 z_2 = 12i; z_1/z_2 = \frac{1}{6}(\sqrt{3} - i)]$$

Příklad 12.19 Pomocí Moivreovy věty vypočítejte:

$$a) (-1 + i\sqrt{3})^3 \quad b) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{100}$$

$$[a) 8; b) -1/2 - \sqrt{3}i/2]$$

Příklad 12.20 Jestliže $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$, najděte algebraický tvar komplexního čísla $z^3 + \frac{1}{z^3}$.

$$[-\sqrt{2}]$$

Příklad 12.21 Vyřešte v \mathbb{C} kvadratické rovnice:

$$a) z^2 + 2z + 2 = 0 \quad b) z^2 + 6z + 25 = 0$$

$$[a) -1 \pm i; b) -3 \pm 4i]$$

Příklad 12.22 Vyřešte v \mathbb{C} následující rovnice:

$$a) z^4 = 1 \quad b) z^3 = 1/8 \quad c) z^6 = -64$$

$$[a) 1, i, -1, -i; b) \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i), -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i); c) 2i, -2i, \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} - i]$$

13 Posloupnosti a řady

13.1 Aritmetická a geometrická posloupnost

Nekonečnou posloupností se nazývá každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel \mathbb{N} .

Konečnou posloupností nazýváme každou funkci, jejíž definiční obor je množina $\{n \in \mathbb{N}, n \leq n_0\}$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo.

Posloupnost je zadána buď výčtem prvků, rekurentně, nebo vzorcem pro n -tý člen.

Příklad 13.1 Posloupnost všech čísel dělitelných třemi zapište výše uvedenými způsoby.

Řešení:

$$\{a_n\}_1^\infty = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\} \quad \text{výčet prvků}$$

$$a_{n+1} = a_n + 3, \quad a_1 = 3 \quad \text{rekurentně}$$

$$a_n = 3n \quad \text{vzorec pro } n\text{-tý člen}$$

Příklad 13.2 Je daná posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$, $a_n = \log 3^n$. Vyjádřete ji rekurentně.

Řešení:

$$\text{Pro } \forall n \in \mathbb{N} \text{ je } a_{n+1} = \log 3^{n+1} = \log 3^n \cdot 3 = \log 3^n + \log 3.$$

Zkoumanou posloupnost lze zapsat

$$\underline{\underline{a_{n+1} = a_n + \log 3, \quad a_1 = \log 3.}}$$

Příklad 13.3 Posloupnost zadanou rekurentně $a_1 = -1$, $a_{n+1} = -a_n$ vyjádřete vzorcem pro n -tý člen.

Řešení:

$$\{a_n\}_1^\infty = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}. \quad \text{Odtud } \underline{\underline{a_n = (-1)^n.}}$$

Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové číslo d (diference), že pro každé přirozené n platí: $a_{n+1} = a_n + d$, neboli $a_{n+1} - a_n = d$.

V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ s diferencí d platí pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Dále jsou-li $r, s \in \mathbb{N}$ libovolná, pak $a_s = a_r + (s - r)d$.

Pro součet S_n prvních n členů aritmetické posloupnosti lze odvodit:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Příklad 13.4 Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$, $a_n = 2n - 4$ je aritmetická. Určete diferenci.

Řešení:

Musíme dokázat existenci čísla $d \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + d$.

Je $a_n = 2n - 4$, $a_{n+1} = 2n - 2$ a tedy $a_{n+1} - a_n = 2$, čili $a_{n+1} = a_n + 2$.

Posloupnost $\{2n - 4\}_1^\infty$ je aritmetická s diferencí $d = 2$.

Příklad 13.5 Rozhodněte, které z čísel 71 a 100 je členem aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, v níž $a_1 = -10$, $d = 4,5$.

Řešení:

V dané posloupnosti platí $a_n = -10 + (n - 1) \cdot 4,5$.

Je-li $a_n = 71$, pak $71 = -10 + (n - 1) \cdot 4,5$. Z toho $n = 19$.

Je-li $a_n = 100$, pak $100 = -10 + (n - 1) \cdot 4,5$. Z toho $n = \frac{229}{9}$.

Členem aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ je pouze číslo 71.

Příklad 13.6 V aritmetické posloupnosti je

a) $a_6 = 18$, $d = -2$. Vypočítejte a_9 .

b) $a_{16} = 20$, $d = 1,5$. Vypočítejte a_1 .

c) $a_1 = 12,6$, $d = 0,2$, $a_n = 27,4$. Určete n .

Řešení:

$$a) a_s = a_r + (s - r)d \Rightarrow a_9 = a_6 + 3d = 18 - 6 = \underline{\underline{12}}$$

$$b) a_{16} = a_1 + 15d \Rightarrow a_1 = a_{16} - 15d = \underline{\underline{-2,5}}$$

$$c) a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \underline{\underline{75}}$$

Příklad 13.7 Vypočítejte součet všech přirozených čísel od jedné do 300.

Řešení:

$$Je a_1 = 1, d = 1. Součet $S_{300} = \frac{300}{2}(a_1 + a_{300}) = \underline{\underline{45150}}$.$$

Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá **geometrická**, právě když existuje číslo q tak, že pro každé přirozené n platí:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \text{ neboli } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ pro } a_1 \neq 0, q \neq 0.$$

Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ s kvocientem q platí pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Dále jsou-li $r, s \in \mathbb{N}$ libovolná, pak $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

Pro součet S_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí:

a) pro $q = 1$ je $S_n = n \cdot a_1$.

b) pro $q \neq 1$ je $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Příklad 13.8 V geometrické posloupnosti je

a) $a_1 = 18$, $q = 3$. Napište prvních pět členů.

b) $a_1 = 4$, $q = 3$. Vypočítejte a_5 .

c) $a_6 = 8192$, $q = 4$. Určete a_4 .

d) $a_1 = 40$, $q = -\frac{1}{4}$. Vypočítejte a_5 a S_5 .

Řešení:

a) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \underline{\underline{18, 54, 162, 486, 1458}}$

b) $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 4 \cdot 3^4 = \underline{\underline{324}}$

c) $a_4 = a_6 \cdot q^{4-6} = 8192 \cdot 4^{-2} = \underline{\underline{512}}$

d) $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 40 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \underline{\underline{\frac{5}{32}}}$ $S_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = \underline{\underline{\frac{1025}{32}}}$

Příklad 13.9 Najděte geometrickou posloupnost tak, aby

$$a_1 + a_3 = 5 \text{ a } a_2 + a_4 = 10.$$

Řešení:

$$\text{Je tedy } \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q^2 = 5 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + q^2) = 5 \\ a_1q(1 + q^2) = 10 \end{cases}$$

Druhou rovnici vydělíme první, dostaneme $\underline{\underline{q = 2, a_1 = 1}}$.

Příklad 13.10 Zjistěte, na jakou částku vzroste vklad a_0 Kč uložený na vkladní knížku na n let, jestliže spořitelna připisuje na konci každého roku p % z částky v tom roce uložené.

Řešení:

Na konci 1. roku připíše spořitelna p % z původně vložené částky a_0 , takže vklad vzroste na částku

$$a_1 = a_0 + \frac{p}{100}a_0 = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Na konci 2. roku připsá k této částce $p\%$ z a_1 , takže vklad vzroste na částku

$$a_2 = a_1 + \frac{p}{100}a_1 = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Obdobně je tomu v dalších letech.

Vklady po připsání úroků v jednotlivých letech tvoří zřejmě geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 + \frac{p}{100}$ a s prvním členem $a_1 = a_0q$. Tedy podle vzorce $a_n = a_1q^{n-1}$ dostaneme, že částka a_0 Kč při p -procentním složeném úrokování vzroste po n -letech na částku a_n Kč, kde

$$a_n = a_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} = \underline{\underline{a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}}.$$

13.2 Nekonečná geometrická řada

Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je geometrická posloupnost, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$.

Pak posloupnost $\{S_n\}_1^\infty$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, je konvergentní a platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Takto dostáváme **nekonečnou geometrickou řadu**

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Příklad 13.11 Sečtěte geometrickou řadu:

a) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots$

b) $1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \dots$

Řešení:

a) Je $a_1 = 1$, $q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dále $|q| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, řada konverguje a

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{2 - \sqrt{2}}}.$$

b) Je $a_1 = 1$, $q = \cos^2 x$.

Pro $|\cos^2 x| < 1 \Rightarrow |\cos x| < 1 \Rightarrow x \neq k\pi$ řada konverguje,

$$S = \frac{1}{1 - \cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\sin^2 x}}}.$$

Příklad 13.12 Převed'te na zlomek číslo $8,\bar{4}$.

Řešení:

$$8,\bar{4} = 8 + \underbrace{\frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots}_{a_1 = \frac{4}{10}, q = \frac{1}{10}} = 8 + \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 8 + \frac{4}{9} = \underline{\underline{\frac{76}{9}}}.$$

Jiné řešení:

Na jedné straně platí, že $10 \cdot 8,\bar{4} - 8,\bar{4} = 9 \cdot 8,\bar{4}$.

Na druhé straně je $10 \cdot 8,\bar{4} - 8,\bar{4} = 9 \cdot 8,\bar{4} = 84,\bar{4} - 8,\bar{4} = 76$

Potom $9 \cdot 8,\bar{4} = 76$.

Je tedy $8,\bar{4} = \underline{\underline{\frac{76}{9}}}$.

Příklad 13.13 Závitnice byla sestrojena ze čtvrtkružnic poloměru $r, \frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{8}, \dots$.
Vypočítejte její délku.

Řešení:

$$d = \frac{1}{4}(2\pi r + 2\pi \frac{r}{2} + 2\pi \frac{r}{4} + 2\pi \frac{r}{8} \dots) = \frac{2\pi r}{4}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) = \frac{\pi r}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi r}{2}}}.$$

Příklad 13.14 V aritmetické posloupnosti je

a) $a_5 = 8$, $a_8 = -10$. Vypočítejte a_{20} .

b) $a_{10} = 23$, $a_{16} = 15$. Vypočítejte a_1 .

c) $a_1 = 15$, $S_{25} = 75$. Určete d .

d) $a_1 = 450$, $a_n = 210$, $d = -24$. Vypočítejte n a S_n .

e) $a_n = 47$, $S_n = 245$, $d = 5$. Vypočítejte a_1 a n .

[a) -82 , b) 35 , c) -1 , d) 11 , 3630 e) 2 , 10]

Příklad 13.15 Ve které aritmetické posloupnosti je $a_1 + a_5 = 30$, $a_3 + a_4 = 36$?

[$a_1 = 3$, $d = 6$]

Příklad 13.16 Kolik členů aritmetické posloupnosti, ve které $a_1 = 2$, $d = 3$, musíme sečíst, aby součet přesáhl 2000?

[37 členů]

Příklad 13.17 Mezi čísla 8 a 20 vložte tolik členů aritmetické posloupnosti, aby součet vložených členů byl 196.

$$[d = \frac{4}{5}, k = 14]$$

Příklad 13.18 *V geometrické posloupnosti je*

a) $a_4 = -\frac{8}{3}$, $a_6 = -\frac{32}{3}$. *Vypočítejte a_1 a q .*

b) $a_1 + a_4 = 112$, $a_2 + a_3 = 48$. *Vypočítejte a_1 a q .*

c) $a_1 = 6144$, $q = \frac{1}{2}$, $a_n = 48$. *Vypočítejte n a S_n .*

d) $a_1 = 18$, $a_n = 288$, $S_n = 558$. *Vypočítejte n a q .*

$$[a) \frac{1}{3}, -2, \text{ nebo } -\frac{1}{3}, 2; b) 4, 3, \text{ nebo } 108, \frac{1}{3} c) 8, 12240 d) 5, 2]$$

Příklad 13.19 *Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a součet vložených členů byl 630.*

$$[10, 20, 40, 80, 160, 320]$$

Příklad 13.20 *Najděte kvocient geometrické posloupnosti, jestliže součet příslušné geometrické řady je 6, a součet prvních pěti členů je $\frac{93}{16}$.*

$$[q = \frac{1}{2}]$$

Příklad 13.21 *Dělník souhlasil, že bude pracovat, jestliže jeho mzda bude za první den práce 1 Kč, za druhý den práce 2 Kč, za třetí den práce 4 Kč, atd. Kolik si vydělá za 12 dní práce?*

$$[4095 \text{ Kč}]$$

Příklad 13.22 *Najděte součet geometrické řady $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \dots$. Stanovte podmínky.*

$$[S = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}; x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbb{Z}]$$

Příklad 13.23 *Řešte rovnici $\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \dots$. Proveďte řešitelnost rovnice.*

$$[x \in \{-6, 4\}]$$

Příklad 13.24 *Do čtverce o straně a je vepsána kružnice, do ní opět čtverec, pak kružnice atd. Vypočítejte obsah všech takto vzniklých čtverců.*

$$[2a^2]$$

Příklad 13.25 *Poločas přeměny (rozpadu jader) rádia je přibližně 20 minut. Kolik rádia zbude bez přeměny z 1mg po n hodinách? (Poločas přeměny radioaktivní látky je doba, za kterou dojde k radioaktivní přeměně přibližně poloviny jader atomů té látky.)*

$$[a_n = q^n = \frac{1}{8^n}]$$

Příklad 13.26 *Pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ řešte rovnici $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \dots = 2\operatorname{tg} x$.*

$$[x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2}, \text{ pak dostaneme } \sin 2x = 1 \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}]$$

14 Kombinatorika

14.1 Permutace, variace a kombinace

Permutace n prvků dané základní n -prvkové množiny je každá uspořádaná n -tice těchto prvků, přičemž každý prvek základní množiny se v této n -tici vyskytuje právě jedenkrát.

Pro počet $P(n)$ všech permutací n prvků platí:

$$P(n) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Symbol $n!$ čteme n faktoriál, definujeme $0! = 1$.

Příklad 14.1 *Kolik pěticiferných čísel je možno sestavit z číslic 0, 1, 3, 4, 7? Kolik je z nich sudých?*

Řešení:

Všech pěticiferných čísel je $P(5) = 5! = 120$.

Na prvním místě nesmí být nula, těchto pěticiferných je $P(4) = 4! = 24$.

Celkem je pěticiferných čísel $120 - 24 = 96$.

Sudá čísla mají na místě jednotek 0, těch je

$$P(4) = 4! = 24,$$

nebo mají na místě jednotek číslici 4, ale současně nesmí mít na prvním místě číslici 0, těch je

$$P(4) - P(3) = 4! - 3! = 18.$$

Celkem je sudých čísel 42.

Příklad 14.2 *Zmenšíme-li počet prvků o dva, zmenší se počet permutací dvacetkrát. Určete původní počet prvků!*

Řešení:

$$P(n) = n!, \quad P(n-2) = (n-2)! \Rightarrow n! = 20(n-2)! \Rightarrow n(n-1) = 20 \Rightarrow$$

$$n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow (n-5)(n+4) = 0$$

Číslo n je přirozené, proto původní počet prvků $n = 5$.

Variace k -té třídy z n prvků dané základní n -prvkové množiny ($0 \leq k \leq n$) je každá uspořádaná k -tice různých prvků, vybraná ze základní n -prvkové množiny tak, že **záleží** na pořadí prvků (a prvky se neopakují).

Pro počet $V_k(n)$ všech těchto variací platí:

$$V_k(n) = \underbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}_{k \text{ činitelů}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad 14.3 Kolika způsoby může být odměněno zlatou, stříbrnou nebo bronzovou medailí 13 účastníků sportovní soutěže?

Řešení:

Ze 13 sportovců vybíráme 3, záleží na pořadí - jedná se o variace.

$$V_3(13) = \frac{13!}{10!} = 11 \cdot 12 \cdot 13 = \underline{\underline{1716}}$$

Příklad 14.4 Pro kolik prvků je poměr variací druhé třídy ku počtu variací třetí třídy roven 1:20.

Řešení:

$$V_2(n) : V_3(n) = 1 : 20 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} : \frac{n!}{(n-3)!} = 1 : 20 \Rightarrow \frac{1}{n-2} = \frac{1}{20} \Rightarrow \underline{\underline{n=22}}$$

Kombinace k -té třídy z n prvků dané základní n -prvkové množiny ($0 \leq k \leq n$) je každá k -tice různých prvků, vybraná ze základní n -prvkové množiny tak, že **nezáleží** na pořadí prvků (a prvky se neopakují).

Pro počet $C_k(n)$ všech těchto kombinací platí:

$$C_k(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Pro kombinační číslo $\binom{n}{k}$, čteme n nad k , $0 \leq k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{0}{0} = 1;$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1};$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Příklad 14.5 Ve třídě je 5 studentů a 3 studentky, kteří hrají tenis. Kolik lze sehrát zápasů, v nichž budou hrát dvě studentky proti dvěma studentům? Každá čtveřice bude hrát pouze jednou.

Řešení:

Počet dvojic studentů, které lze vybrat z pěti studentů je dán $C_2(5) = \binom{5}{2}$ (nezáleží na pořadí).

Počet dvojic studentek, které lze vybrat ze tří studentek je $C_2(3) = \binom{3}{2}$.

Počet zápasů je pak $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \underline{\underline{30}}$.

Příklad 14.6 Kolika přímkami lze spojit 10 bodů, jestliže tři z nich leží na jedné přímce?

Řešení:

Každé dva různé body určují přímku, nezáleží na pořadí, tedy

$$C_2(10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45.$$

Třemi body (ležícími na přímce) by byly určeny tři přímky, takže počet přímek je

$$p = 45 - 2 = \underline{43}.$$

14.2 Binomická věta

Binomická věta. Pro libovolná reálná (i komplexní) čísla a, b a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí, že

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Binomické koeficienty - kombinační čísla - lze vypočítat z Pascalova trojúhelníka:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \underbrace{1 \quad 1} \\
 & & & & & \underbrace{1 \quad 2} & 1 \\
 & & & & \underbrace{1 \quad 3} & 3 & 1 \\
 & & & \underbrace{1 \quad 4} & 6 & 4 & 1 \\
 & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & & & \text{atd.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \binom{0}{0} & & & \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & \text{atd.} & &
 \end{array}$$

Příklad 14.7 Umocněte podle binomické věty $(2x - \frac{3}{2})^4$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
 (2x - \frac{3}{2})^4 &= \binom{4}{0} (2x)^4 + \binom{4}{1} (2x)^3 (-\frac{3}{2}) + \binom{4}{2} (2x)^2 (-\frac{3}{2})^2 + \\
 &+ \binom{4}{3} (2x)^1 (-\frac{3}{2})^3 + \binom{4}{4} (-\frac{3}{2})^4 = \underline{\underline{16x^4 - 48x^3 + 54x^2 - 27x + \frac{81}{16}}}
 \end{aligned}$$

Příklad 14.8 V rozvoji výrazu $(2x^2 - \frac{3}{x})^6$ určete prostý člen.

Řešení:

Označme $A_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ v obecném binomickém rozvoji.

Potom

$$A_{k+1} = \binom{6}{k} (2x^2)^{6-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k = \binom{6}{k} 2^{6-k} (-3)^k x^{12-2k-k}$$

Jde-li o prostý člen, pak $x^{12-2k-k} = x^0 \Rightarrow k = 4$.

Tedy pátý člen neobsahuje x a je roven

$$\binom{6}{4} (2x^2)^2 \left(-\frac{3}{x}\right)^4 = \frac{6!}{2!4!} 4 \cdot 81 = \underline{\underline{4860}}$$

Příklad 14.9 Upravte výraz

$$V = \frac{(n+2)!}{n!} - 2 \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}, \quad n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}.$$

[2]

Příklad 14.10 V lavici je šest studentů, z nichž dva sourozenci chtějí sedět vedle sebe. Kolika způsoby je lze přesadit?

[240]

Příklad 14.11 Bylo zakoupeno 20 lístků do jedné řady v kině. Kolika způsoby je lze rozdělit mezi 10 chlapců a 10 děvčat, chtějí-li chlapci a děvčata sedět střídavě vedle sebe?

[2(10!)²]

Příklad 14.12 V kolika bodech se protíná 9 přímek, z nichž čtyři jsou navzájem rovnoběžné?

[30]

Příklad 14.13 Kolik různých signálů lze vytvořit z pěti praporek různých barev, jestliže každý signál lze vytvořit umístěním jednoho až všech pěti praporek vedle sebe?

[325]

Příklad 14.14 Pro přípustné hodnoty upravte

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} - 4 \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + 9 \frac{n!}{(n-1)!}.$$

[$n(n-2)^2$ pro $n \geq 2$]

Příklad 14.15 *Z kolika prvků dostaneme 380 variací druhé třídy?*

[20]

Příklad 14.16 *Řešte v \mathbb{N} rovnici*

$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9.$$

[$x = 5$]

Příklad 14.17 *Řešte v \mathbb{N} nerovnici.*

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 2 \binom{9}{7}$$

[$n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$]

Příklad 14.18 *V rozvoji $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby pátý člen rozvoje byl roven 105.*

[$x = \frac{1}{8}$]

Příklad 14.19 *Který člen rozvoje $\left(\frac{1}{x} + 2x^3\right)^{10}$ obsahuje x^6 ?*

[pátý]

Příklad 14.20 *Najděte komplexní číslo $\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right)^6$.*

[1]

Reference

- [1] Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky. Praha, Prometheus, 1999.
- [2] Chrastinová, M., Kolářová E.: Matematika - Přijímací zkoušky na vysoké školy. Brno, FEI VUT, 2000.
- [3] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Praha, Prometheus, 2002.
- [4] Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II. Praha, Prometheus, 1999.